b5

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE

DE LA

LOI SUPRÊME DE WRONSKI;

PAR

CH. LAGRANGE,

Astronome à l'Observatoire royal de Bruxelles.

(Présenté à la Classe des sciences dans la séance du 2 août 1884.)

Opos nr 47553

(Extrait du tome XLVII des *Mémoires de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique*. — 1884.)

Bruxelles. — F. Hayez, imp.

RAPPORTS.

Rapport de M. P. Mansion.

1. Le mémoire de M. C. Lagrange sur la *Loi suprême* de Wronski, dont l'Académie a voté l'impression l'an dernier, ayant été remanié à la demande de la Classe, l'auteur est parvenu à établir cette loi, par une méthode tout à fait distincte de celle de Wronski. Dans une note de M. Lagrange qui a paru aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris* (9 juin 1884, t. XCVIII, pp. 1422-1425), les coefficients qui entrent dans la loi suprême ont la forme sous laquelle ils se présentent naturellement, mais non celle que leur a donnée Wronski. Le présent travail emprunté en substance au grand mémoire approuvé l'an dernier par la Classe, indique un moyen de déduire la *Loi suprême* sous la forme wronskienne des résultats obtenus dans l'article des *Comptes rendus.* Voici un aperçu de la méthode suivie :

II. Soit

$$Fx = a_0\varphi_0 x + a_1\varphi_1 x + \cdots + a_n\varphi_n x + P\psi x, \tag{1}$$

une relation entre $n+3$ fonctions jouissant des propriétés suivantes :

1° Les fonctions Fx, $\varphi_0 x$, $\varphi_1 x$,..., $\varphi_n x$, ψx sont continues pour les valeurs considérées, ainsi que celles de leurs dérivées dont il sera fait usage;

2° Les $(n+1)$ fonctions φ sont indépendantes entre elles et, par suite, d'après un théorème connu, aucun des déterminants (*)

$$\begin{vmatrix} \varphi_0 x, & \varphi_1 x \\ \varphi' x, & \varphi_1' x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \varphi_0 x, & \varphi_1 x, & \varphi_2 x \\ \varphi_0' x, & \varphi_1' x, & \varphi_2' x \\ \varphi_0'' x, & \varphi_1'' x, & \varphi_2'' x \end{vmatrix}, \text{ etc.}$$

n'est identiquement nul; de plus, aucun n'est nul pour la valeur a de x;

3° ψx est une fonction qui s'annule pour $x = a$, ainsi que ses n premières dérivées. Le coefficient P est une fonction de la valeur spéciale x, déterminé par la relation (1). D'après ces données, les coefficients $a_0, \ldots, a_n$ vérifient les $(n+1)$ équations

$$\left.\begin{array}{l} a_0\varphi_0 a + a_1\varphi_1 a + \cdots + a_n\varphi_n a = Fa, \\ a_0\varphi_0' a + a_1\varphi_1' a + \cdots + a_n\varphi_n' a = F'a, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_0\varphi_0^n a + a_1\varphi_1^n a + \cdots + a_n\varphi_n^n a = F^n a, \end{array}\right\} \tag{2}$$

d'où l'on peut déduire leurs valeurs sous forme de quotients de wronskiens.

La fonction

$$Ft - \left[a_0\varphi_0 t + a_1\varphi_1 t + \cdots + a_n\varphi_n t\right] - P\psi t$$

est nulle pour $t = x$; elle est nulle aussi pour $t = a$ ainsi que ses n premières dérivées. Il en résulte que, pour des valeurs convenables de t entre x et a, ses n dérivées s'annulent aussi. Cette remarque donne n formes distinctes du facteur P, où entrent

(*) Appelée *Wronskiens* de (φ_0, φ_1), de $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$, etc., par M. Muir.

les valeurs de t dont il vient d'être parlé. Tel est, en résumé, le contenu de la note de M. Lagrange insérée aux *Comptes rendus* (*).

III. Faisons $\varphi_0 x = 1$ et remplaçons les équations (2) par celles que l'on obtient en procédant de la manière suivante : on part de l'équation (1), dont on prend la dérivée par rapport à x; on divise ensuite par le multiplicateur du premier coefficient qui reste dans le second membre; on opère de même sur l'équation trouvée, puis sur celle que l'on en déduit et l'on continue ainsi jusqu'à ce que l'on ait tiré de (1) n équations nouvelles. Dans ces n équations et dans (1), on fait ensuite $x = a$. On trouve ainsi $(n + 1)$ relations que nous écrirons :

$$\left.\begin{array}{r} a_0 + a_1\varphi_1 a + a_2\varphi_2 a + \cdots + a_n\varphi_n a = \mathrm{F}a, \\ a_1 + a_2\varphi(1)_2 a + \cdots + a_n\varphi(1)_n a = \mathrm{F}(1)a, \\ a_2 + \cdots + a_n\varphi(2)_n a = \mathrm{F}(2)a, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n = \mathrm{F}(n)a. \end{array}\right\} \tag{3}$$

On observera que, dans ces équations, le reste $\mathrm{P}\psi x = \mathrm{F}x - (a_0 + a_1\varphi_1 x + \cdots + a_n\varphi_n x)$ ne laisse aucune trace. Cela provient de ce que les dérivées successives de cette différence, jusqu'à la $n^{\text{ième}}$, s'annulent pour $x = a$, et qu'elles entrent au numérateur des fonctions analogues à $\mathrm{F}(1)$, $\mathrm{F}(2)$,... $\mathrm{F}(n)$, que l'on déduirait de $\mathrm{P}\psi t$. C'est là un point qui n'est pas suffisamment mis en lumière dans la note de M. Lagrange.

IV. Les équations (3), que l'on peut résoudre par telle méthode que l'on veut (**), donnent les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, sous forme wronskienne, en fonction de $\mathrm{F}a$, $\mathrm{F}(1)a, \ldots \mathrm{F}(n)a$, $\varphi_n a$, $\varphi(1)_n a, \ldots \varphi_1 a$. Ces expressions auxiliaires sont formées d'après une loi très simple. On a, par exemple,

$$\mathrm{F}(1)a = \frac{\mathrm{F}'a}{\varphi_1' a}, \quad \mathrm{F}(2)a = \frac{\mathrm{F}'(1)a}{\varphi'(1)_2 a}, \quad \mathrm{F}(3)a = \frac{\mathrm{F}'(2)a}{\varphi'(2)_3 a}, \text{ etc.}$$

M. Lagrange trouve, *sans calcul*, comme il suit, l'expression analytique de ces fonctions (***).

On a évidemment $\mathrm{F}(n)a = a_n$. Or, d'après les équations (2),

$$a_n \text{ ou } \mathrm{F}(n)a = \begin{vmatrix} \varphi_1' a, & \ldots, & \varphi_{n-1}' a, & \mathrm{F}' a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1^n a, & \ldots, & \varphi_{n-1}^n a, & \mathrm{F}^n a \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \varphi_1' a, & \ldots, & \varphi_{n-1}' a, & \varphi_n' a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1^n a, & \ldots, & \varphi_{n-1}^n a, & \varphi_n^n a \end{vmatrix}.$$

Mais la loi de formation des fonctions auxiliaires est indépendante de la valeur de n. Donc, on pourra remplacer, dans la formule précédente, n par un nombre inférieur quelconque. De même, on peut substituer à F l'une quelconque des fonctions φ.

(*) Cette démonstration peut être simplifiée, dans la forme, en employant un peu plus les déterminants que ne le fait l'auteur.

(**) L'auteur les résout par la méthode des multiplicateurs de Bezout.

(***) La détermination directe de ces fonctions se fait sans peine par la théorie des déterminants. Voir la note ci-jointe.

Il résulte d'ailleurs de cette démonstration, d'après la seconde hypothèse faite sur les fonctions φ, qu'aucun des dénominateurs introduits pour arriver aux équations (3) n'est nul.

V. Personne n'a prouvé jusqu'à présent que la *Loi suprême* ait l'importance que lui attribuait son auteur. Mais, en tout cas, la note de M. Lagrange insérée aux *Comptes rendus* et celle qu'il a soumise à l'Académie contiennent la première détermination du reste de cette série et, par suite, la première démonstration qui en ait été donnée.

NOTE.

Soient

$$x \quad y \quad z \quad u \quad v$$

des fonctions d'une variable t entre lesquelles il n'existe pas une relation linéaire de la forme $ax + by + cz + gu + kv + l = 0$; puis

$$\begin{array}{ccccc} 1, & y_1, & z_1, & u_1, & v_1 \\ 0, & 1, & z_2, & u_2, & v_2 \\ 0, & 0, & 1, & u_3, & v_3 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & v_4 \end{array}$$

des fonctions que l'on en déduit, celles de la première ligne en divisant les dérivées de x, y, z, u, v par $x' = \frac{dx}{dt}$, celles de la seconde en divisant les dérivées des fonctions de la première ligne par y'_1, et ainsi de suite.

On trouve, de proche en proche,

$$v_1 = \frac{v'}{x'}, \quad v_2 = \begin{vmatrix} x' & v' \\ x'' & v'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix},$$

$$v_3 = \begin{vmatrix} x' & y' & v' \\ x'' & y'' & v'' \\ x''' & y''' & v''' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

de même

$$u_3 = \begin{vmatrix} x' & y' & u' \\ x'' & y'' & u'' \\ x''' & y''' & u''' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

et ainsi de suite.

On peut montrer que la loi est générale. Pour cela, employons les notations de Muir pour les wronskiens et écrivons

$$u_3 = w(x', y', u') : w(x', y', z')$$
$$v_3 = w(x', y', v') : w(x', y', z')$$

ou en abrégé

$$u_3 = \frac{U}{R}, \quad v_3 = \frac{V}{R}.$$

On a, d'après la loi de formation des fonctions,

$$v_4 = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{V}{R}\right)}{\dfrac{d}{dl}\left(\dfrac{U}{R}\right)} = \frac{RV' - VR'}{RU' - UR'}.$$

Mais, d'après la règle de dérivation des déterminants,

$$RV' - VR' = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' & y' & v' \\ x'' & y'' & v'' \\ x^{\text{IV}} & y^{\text{IV}} & v^{\text{IV}} \end{vmatrix}$$
$$- \begin{vmatrix} x' & y' & v' \\ x'' & y'' & v'' \\ x''' & y''' & v''' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x^{\text{IV}} & y^{\text{IV}} & z^{\text{IV}} \end{vmatrix}$$

et, d'après un théorème de Cauchy (ou d'après un cas particulier du théorème de Laplace),

$$RV' - VR' = \begin{vmatrix} x' & y' & z' & v' \\ x'' & y'' & z'' & v'' \\ x''' & y''' & z''' & v''' \\ x^{\text{IV}} & y^{\text{IV}} & z^{\text{IV}} & v^{\text{IV}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}$$
$$= w(x', y', z', v')\, w(x', y').$$

De même

$$RU' - UR' = w(x', y', z', u')\, w(x', y).$$

Donc enfin,

$$v_4 = \frac{w(x', y', z', v')}{w(x', y', z', u')}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Dans le cas où x, y, z, u, v dépendent de plusieurs variables indépendantes ou paramètres, on peut établir, absolument de la même manière, des formules analogues sur les différentielles partielles, les différentielles totales ou les variations de ces fonctions. Il suffit de remplacer la caractéristique de la dérivation par d ou δ dans ce qui précède.

Des relations semblables subsistent aussi dans le cas de différences partielles ou totales; mais pour les établir aisément, il faut modifier légèrement la démonstration en y introduisant au lieu des différences successives Δx, $\Delta^2 x$, $\Delta^3 x, \ldots$ les valeurs successives x, ∇x, $\nabla^2 x$, $\nabla^3 x, \ldots$ des fonctions ($\nabla = 1 + \Delta$).

Rapport de M. De Tilly.

Je me rallie avec empressement aux conclusions du premier commissaire, et je me félicite de n'avoir pas admis sans critique la première rédaction présentée par l'auteur.

M. Lagrange est rentré maintenant dans la voie du raisonnement rigoureux et son travail me paraît apporter un perfectionnement notable à la théorie du développement des fonctions en séries.