Z teorji szeregów.

Jest rzeczą dobrze znaną z podstaw arytmetyki, że przy obliczaniu sumy skończonej liczby składników możemy dowolnie grupować składniki. Mając np. do wyznaczenia sumę $m.n$ składników, możemy te składniki ustawić w prostokąt, zawierający m wierszy i n kolumn.

$$\begin{array}{l|l}
a_{11}\,,\ a_{12}\,,\ \ldots\ldots\ a_{1n} & s_1 \\
a_{21}\,,\ a_{22}\,,\ \ldots\ldots\ a_{2n} & s_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\
a_{m1}\,,\ a_{m2}\,,\ \ldots\ldots\ a_{m,n} & s_m \\
\hline
t_1 \quad t_2 \quad \ldots\ldots \quad t_n &
\end{array}$$

Jeżeli obliczymy z osobna sumy s składników, wypisanych w każdym wierszu, to

$$S = s_1 + s_2 + \ldots.. + s_m$$

będzie szukaną sumą wszystkich wypisanych elementów. Podobnie, obliczając z osobna sumy składników, wypisanych w każdej kolumnie, będziemy mieli

$$S = t_1 + t_2 + \ldots.. + t_n\,.$$

Mówimy, że w pierwszym przypadku wykonaliśmy sumowanie według wierszy, w drugim według kolumn.

Przy skończonej liczbie składników wartość sumy nie zależy zatym od tego, czy dokonaliśmy sumowania według wierszy, czy też według kolumn.

Inaczej rzecz się przedstawia w przypadku nieskończenie wielkiej liczby składników. Wykazanie tego na możliwie prostych przykładach jest celem niniejszego.

Wyobraźmy sobie kratę nieskończoną

www.rcin.org.pl

	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

składającą się z nieskończenie wielu wierszy, ponumerowanych kolejno numerami 1, 2, 3,... i nieskończenie wielu kolumn, również oznaczonych kolejnemi numerami 1, 2, 3,... W każdej kratce niech się znajduje pewna liczba. Tak wypełniona liczbami krata tworzy szereg podwójny.

Przekątnią główną kraty nazwiemy szereg kratek, z których pierwsza leży w 1-szym wierszu i 1-szej kolumnie, druga w 2-gim wierszu, 2-giej kolumnie, ogólnie n-ta w n-tym wierszu i n-tej kolumnie. Kratki, przylegające do kratek przekątni głównej, tworzą dwie przekątnie boczne sąsiednie przekątni głównej z prawej i lewej strony.

Utwórzmy teraz szereg podwójny w sposób następujący: Niech a i $b \neq a$ oznaczają dwie dowolne, naprzód dane liczby. Wyznaczmy różnicę

$$b - a = d.$$

W pierwszą kratkę przekątni głównej wpiszmy liczbę b, w resztę jej kratek $+d$, przekątnię zaś boczną, sąsiednią przekątni głównej z prawej strony wypełnijmy liczbami $-d$. W resztę kratek wpisujemy zera.

b	$-d$	0	0	0	.....
0	$+d$	$-d$	0	0	.....
0	0	$+d$	$-d$	0	.....
0	0	0	$+d$	$-d$	.....
0	0	0	0	$+d$	.....
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Suma szeregu 1-go wiersza daje liczbę $b-d=a$, każdego zaś następnego—zero. Sumowanie więc według wierszy daje liczbę a.

Wykonajmy teraz sumowanie podług kolumn. Widoczne jest, że z wyjątkiem pierwszej kolumny dającej sumę b, otrzymujemy z następnych kolumn na wyniki sumowania same zera. Sumowanie więc podług kolumn daje liczbę $b \neq a$.

Widzimy więc, że w przypadku nieskończonej liczby składników sumowanie według wierszy może doprowadzić do innego wyniku, niż sumowanie według kolumn.

Niech wskaźnik m $(=1, 2, 3, ...)$ oznacza numer porządkowy wiersza, zaś wskaźnik n $(=1, 2, 3, ...)$ numer kolumny. Oznaczając przez $u_{m,n}$ liczbę wpisaną w kratkę, leżącą w m-tym wierszu i n-tej kolumnie, możemy otrzymane wyniki wyrazić wzorami:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{1,n} = a ,$$

zaś

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{m,n} = 0 , \text{ gdy } m \neq 1 ,$$

skąd

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{m,n} = a .$$

Podobnie

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_{m,1} = b ,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_{m,n} = 0 , \text{ gdy } n \neq 1 ,$$

skąd

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{m,n} = b ,$$

Nie mamy więc wogóle prawa przy sumach podwójnych zmieniać porządku sumowania, gdyż wyniki mogą być różne.

Zbudujmy inny przykład. Niech będzie $a \neq 0$. Kratki przekątni głównej wypełnijmy liczbami a, $2a$, $3a$, $4a$, $5a$,.... a jej sąsiedniej z pra-

www.rcin.org.pl

wej strony liczbami $-a$, $-2a$, $-3a$, $-4a$, $-5a$,.... W resztę kratek wpiszmy zera:

a	$-a$	0	0	0	.....
0	$2a$	$-2a$	0	0	.....
0	0	$3a$	$-3a$	0	.....
0	0	0	$4a$	$-4a$	.....
0	0	0	0	$5a$	.....
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Suma szeregu każdego wiersza daje liczbę 0, więc sumując szereg podług wierszy otrzymujemy 0.

Suma szeregu każdej kolumny daje a; biorąc więc sumę według kolumn otrzymujemy szereg rozbieżny

$$a+a+a+......$$

Zmiana porządku sumowania może więc nietylko zmienić wartość sumy, ale nawet spowodować rozbieżność szeregu.

Jako inny przykład zbudujmy szereg, wypełniając kratki przekątni głównej kolejnemi nieparzystemi wielokrotnościami liczby rzeczywistej $-a$, przekątni zaś sąsiedniej z prawej strony kolejnemi parzystemi wielokrotnościami liczby a. Resztę kratek wypełniamy zerami.

$-a$	$2a$	0	0	0	.....
0	$-3a$	$4a$	0	0	.....
0	0	$-5a$	$6a$	0	.....
0	0	0	$-7a$	$8a$	.....
0	0	0	0	$-9a$	.....
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

www.rcin.org.pl

Suma szeregu każdego wiersza daje liczbę a, każdej kolnmny $-a$. Sumowanie zatym tak według wierszy, jak też według kolumn doprowadza (o ile $a \neq 0$) do szeregów rozbieżnych; ale podczas gdy sumą jednego z nich jest $+\infty$, sumą drugiego jest $-\infty$.

Ciekawe jest, że we wszystkich tych przykładach wystarczyło wypełnić dwie przekątnie kraty liczbami różnemi od zera. Nie jest to przypadkowe, gdyż mając à priori dane dwa ciągi

$$s_1\,,\; s_2\,,\; s_3\,, \ldots\ldots \quad S)$$

$$t_1\,,\; t_2\,,\; t_3\,, \ldots\ldots \quad T)$$

możemy z łatwością zbudować szereg podwójny, wypełniając dwie tylko przekątnie kraty liczbami różnemi od zera i taki, w którym kolejne wyrazy ciągu S będą kolejnemi sumami wierszy, a wyrazy ciągu T kolejnemi sumami kolumn.

Połóżmy bowiem

$$s_1 + s_2 + s_3 + \ldots\ldots + s_n = S_n$$

$$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots\ldots + t_n = T_n$$

i zbudujmy szereg podwójny

T_1	$S_1 - T_1$	0	0	0	....
0	$T_2 - S_1$	$S_2 - T_2$	0	0	....
0	0	$T_3 - S_2$	$S_3 - T_3$	0	....
0	0	0	$T_4 - S_3$	$S_4 - T_4$	....
0	0	0	0	$T_5 - S_4$	....
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Widzimy, że spełnia on postawione przez nas warunki.

Zbudujemy np. szereg podwójny, gdzie szereg sum wierszy składałby się z samych zer, szeregiem zaś sum kolumn byłby szereg, wahający się między 0 i $+1$:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots\ldots$$

Mamy tu

$$S_n = 0\,,\; T_{2n} = 0\,,\; T_{2n+1} = 1\,.$$

www.rcin.org.pl

Postępując, jak w przypadku ogólnym, znajdziemy szereg podwójny.

1	−1	0	0	0	.....
0	0	0	0	0	.....
0	0	1	−1	0	.....
0	0	0	0	0	.....
0	0	0	0	1	.....
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Jako inny przykład zbudujemy szereg podwójny, gdzie szereg sum wierszy składałby się z zer, szeregiem zaś sum kolumn byłby szereg, wahający między $+\infty$ i $-\infty$:

$$1-2+3-4+5-6+\ldots\ldots$$

Mamy tu

$$S_a=0\,,\quad T_{2n+1}=n+1\,,\quad T_{2n}=-n\,,$$

skąd otrzymujemy szereg podwójny:

+1	−1	0	0	0	0	0	.....
0	−1	+1	0	0	0	0	.....
0	0	+2	−2	0	0	0	.....
0	0	0	−2	+2	0	0	.....
0	0	0	0	+3	−3	0	.....
0	0	0	0	0	−3	+3	.....
0	0	0	0	0	0	+4	.....
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

www.rcin.org.pl

Przytoczę jeszcze przykład, podany przez F. Arndta[1]), szeregu podwójnego, gdzie suma według wierszy jest różna od sumy według kolumn.

Jest to szereg o wyrazie ogólnym

$$u_{m,n}=\frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^m-\frac{1}{n+2}\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^m$$

Łatwo sprawdzić, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_{m,n}=\frac{1}{2^{m+1}}\text{, skąd}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_{m,n}=\frac{1}{2}\,,$$

podczas gdy

$$\sum_{m=1}^{\infty}u_{m,n}=-\frac{1}{(n+1)\,(n+2)}\text{, skąd:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}u_{m,n}=-\frac{1}{2}\,.$$

Stanisław Ruziewicz.

Lwów.

---

[1]) F. Arndt: Archiv. f. Math. 11 (1848), p. 319.