MISCELLANEA.

Przykłady figur, równych przez rozkład.

Do łamigłówek gieometrycznych zaliczamy zagadnienia konstrukcyjne, w których z danych figur przez rozcięcie ich (w sposób, który należy dopiero znaleźć) i odpowiednie ustawienie otrzymanych kawałków (elementów) należy dojść do figury żądanej, której dobór ulega jedynemu warunkowi, by względem danych figur, była równoważną. Na łamigłówki te, datujące się już od czasów Archimedesa, zwrócono w ostatnich czasach baczniejszą uwagę.

Równoważność figur, rozważaną w odnośnym dziale Planimetrji, określamy w sposób czysto algiebraiczny; dzięki łamigłówkom, sprowadzamy ją na grunt gieometryczny, przekonywamy się mianowicie, że figury o równych polach, choć nie są w całości przystającemi do siebie, składają się jednak z elementów parami przystających. Łamigłówki w ten sposób przyczyniają się do „rozalgiebraizowania" odnośnego działu Planimetrji. do nadania mu charakteru, bardziej zgodnego z innemi jej działami. W tym też duchu w r. 1909/10 Koło mat. fiz. ogłosiło konkurs na zreformowanie nauki o pomiarze pól; nie siląc się na rozwiązanie tego zagadnienia, w niniejszym szkicu pragnę dać jedynie kilka przykładów rozkładu figur równoważnych na elementy, parami przystające.

Prócz pracy Fourreya („Curiosités géométriques", 1907), korzystałem w tym celu z dzieł „Récréations mathématiques" Rouse-Balla (przekład franc., wyd. II, przy piski Fitz-Patricka w zakończeniu tomu III, r. 1909) oraz z klasycznego dzieła pod tymże tytułem, opracowanego pierwotnie przez Ozanama, a znacznie w następstwie rozszerzonego przez Montuclę (wyd. IV, 1790). W polskim języku, prócz niedawnych prac p. Zarzeckiego („Wektor" N2AI2 5—6), mamy w tym zakresie tylko dwa artykuły:

1. Matematyka: Deskę długą a wązką rozciąć w ten sposób, ażeby jej części mogły służyć do pokrycia otworu krótkiego a szerokiego. („Słowianin" t. II. r. 1830 str. 237—239. Artykuł podznaczony j?=Aug. Frączkiewicz).

2. PI. Dziwiński. O rozkładaniu figur na elementa parami przystające. Wygłosił w Towarzystwie Politechnicznym we Lwowie d. 11 grudnia 1886... Lwów, 1887: 8° str. 8,*tab. I (Odbitka z „Czasopisma Technicznego").

Zaczniemy od kwadratów, przedstawiając wyniki zasadniczych działań z niemi znów w postaci kwadratów.

Mamy np. dwa kwadraty o bokach b i c. Ustawmy je obok siebie jak na fig. 1, gdzie $ABCD=b^2$, $AEFG=c^2$. Z trójkąta prostokątnego AEB wynika $EB = a = \sqrt{b^2+c^2}$, t. j. że odcinek EB stanowi bok kwadratu, równoważnego sumie danych. By na boku tym zbudować kwadrat, odcinamy na CD część $CI=EA$, poczym $\triangle BCI \cong \triangle AEB$ i $BI \perp BE$. Odcinając $KD=HG$, mamy $\triangle IKD = \triangle BHG$ i $IK \parallel BE$. Odcinając wreszcie na przedłużeniu IK odcinek $IL=BE$ i łącząc punkty E i L, otrzymamy żądany kwadrat $BILE$. Kwadrat ten składa się: 1) z czworokąta $ABIK$, stanowiącego część kwadratu b^2; 2) z trapezu $AEHG$, stanowiącego część kwadratu c^2; 3) z trójkąta BHG, będącego jakby przeniesionym trójkątem IKD, odciętym od b^2; prowadząc następnie $LM \perp EK$, pozostałą część EKL podzielimy na: 4) trójkąt $EML = BCI$, odciętemu od b^2, 5) $KLM=EHF$, odciętemu od c^2. W ten więc sposób większy z danych kwadratów (b^2) podzieliliśmy na trzy, mniejszy (c^2) na dwa elementy, które przy innym rozmieszczeniu tworzą kwadrat a^2, równoważny czyli — jak będziemy się nadal wyrażali — równy przez rozkład sumie danych kwadratów. (Dla łatwiejszego odróżniania przystających elementów dwuch figur, będziemy je—jak na fig. 1—zaznaczali jednakowemi liczbami).

Jeżeli mamy znaleźć kwadrat c^2, równy przez rozkład różnicy danych kwadratów a^2-b^2, w kwadracie $BELI=a^2$ (fig. 1) z wierzchołka B zakreślamy łuk promieniem $BA=b$ i z wierzchołka E prowadzimy do niego styczną, która dotknie łuku w punkcie A; otrzymamy w ten sposób $EA = c$, poczym— mutatis mutandis — postępujemy jak wyżej.

W razie sumy więcej niż dwu kwadratów, zbieramy dwa pierwsze w sposób powyższy, poczym do sumy tej dodajemy trzeci i t. d.; za każdym razem poprzednio podzielone kwadraty ulegają nowemu rozkładowi, działanie to jednak nic ciekawego nie przedstawia.

Przy rozkładzie, podanym na fig. 1, korzystaliśmy z twierdzenia Pitagorasa; przeciwnie, gdybyśmy twierdzenia tego nie znali, moglibyśmy ze wspomnianego rozkładu skorzystać dla jego wyprowadzenia. Przytoczymy inny dowód, podany przez Ozanama (fig. 2). Na bokach trójkąta prostokątnego ABC o przeciwprostokątnej $BC = a$ i przyprostokątnych $AC=b$ i $AB = c$ wznosimy kwadraty $BCDE$, $ACFG$ i $ABHI$, których boki przedłużamy: DC wewnątrz kwadratu b^2 do przecięcia FG w punkcie K, EB wewnątrz c^2 do przecięcia AI w punkcie L, FC wewnątrz a^2 do przecięcia DE w punkcie M i wreszcie HB do przecięcia CM w punkcie N. Prowadzimy wreszcie $KO \perp KC$. Wówczas kwadraty a^2 i b^2 zawierać będą po równym trójkącie: $BCN = CFK$, z których każdy równa się danemu trójkątowi ABC. Dalej, czworoboki $ACKO$ w b^2 i $BEMN$ w a^2 zawierają $CK=BE$, $CA=BN$, $\angle C = \angle B'$, przy przeniesieniu więc pierwszego na drugi tak, by wierzchołek C upadł na B i ramię CK na ramię BE, ramię CA przystanie do BN, i punkty K i A padną odpowiednio na E i N. Skoro zaś każdy z tych 4 punktów jest wierzchołkiem kątów prostych, których jedne ramiona wzajemnie poprzystawały do siebie, przeto i drugie ramiona również przystaną, mianowicie KO do EM i AO do NM, a tym samym i wierzchołek O do M, tak iż $ACKO \cong BEMN$. Pozostały element kwadratu b^2, trójkąt prostokątny OKG, zawiera przy K kąt o ramionach $KG \perp CM$ i $KO \perp CD$, gdy więc odetniemy $CP=KO$ i poprowadzimy $PR \perp CM$, otrzymamy trójkąt $CPR \cong KGO$. Ponieważ $DC=DE$, $CP=ME=KO$, przeto $DP=DM$, prowadząc $DS \perp CM$, mamy $\triangle CDS \cong CKF$, skąd $DS=KF=C$. Jeżeli przeto pozostałą część kwadratu a^2 podzielimy według *DS* na dwa elementy, to zważając że *DM—DP* i *^AIDS-]-Z.SDP—99^* wnosimy, że *DSM* można przystawić do *DPRS* w położeniu *DPT,* otrzymując prostokąt *DSRT,* w którym *DS—PT=c,* czyli kwadrat równy c^2, poszczególne zaś elementy *DSM* i *DPRS* odpowiednio są równe elementom *ABL* i *BHIL.* Każdy więc z elementów, stanowiących kwadraty przyprostokątnych, odpowiednio równa się jednemu z elementów, wchodzących w skład kwadratu przeciwprostokątnej.

Tenże dowód, w zmienionej nieco postaci, podają Rouché i Comberousse („Traité de Géométrie", wyd. VI 1891). Na bokach trójkąta ABC* (fig. 3) wznosimy kwadraty *CBED—a'¹* i *AGFG—IP.* (Bok *FG* winien przejść przez wierzchołek *D).* Prowadząc *EH* || *FG* i *El* || *BG,* otrzymamy *EIGH—c²* (skoro bowiem *DIE=EHB=ABC,* przeto *EH=EI=ć).* Odcinając *HL—c—* i prowadząc *LM__BG,* otrzymamy *EHLM^EIGK,* poczym *DGK^_BLM.* Tak zmieniony dowód spotykamy również w „Gieometrji" p. Łomnickiego (1911).

Przystępując do ustawiania kwadratów n-krotnych, możemy wyłączyć przypadki, gdy *n* jest liczbą kwadratową łub sumą dwu kwadratów, jakoteż n=2: jakoż, w pierwszym razie mamy zbudować kwadrat o bosu *\/n* razy większym od danego, w drugim sprowadzamy zadanie do dodawania dwu kwadratów o bokach nierównych, w trzecim rozwiązujemy zadanie wprost przez rozcięcie każdego z dwu równych kwadratów według jednej z przekątnych i zestawienie otrzymanych trójkątów kątami prostemi. W pozostałych przypadkach, zestawiając w jednym rzędzie *n* równych kwadratów, otrzymamy prostokąt o wysokości, spólnej z kwadratem o podstawie *n* razy większej; zadanie więc sprowadzamy do zbudowania kwadratu, równego przez rozkład danemu prostokątowi.

Tym ostatnim zadaniem właśnie się zajmiemy. Przypuśćmy, że mamy prostokąt *ABCD* (fig. 4, również 5 i 5 bis); odcinając od wierzchołka *AE— — yAB. AD,* otrzymamy podstawę szukanego kwadratu *AEGH.* Jeżeli na przedłużeniu *BC* odetniemy *CF—BE* i *F* połączymy z *D,* to *ICDF^BAE,* tak iż prostokąt *ABCD,* a tym samym i kwadrat *AEGH,* jest równoważny równoległobokowi *AEFD',* że zaś *AEGH* i *AEFD* mają spóiną podstawę, przeto boki jej przeciwległe *DF* i *HG* winny tworzyć linję prostą, tak iż wierzchołek *D* bądź na odcinku *HG,* bądź na jego przedłużeniu — a to stosownie do tego czy w<2 czy też n>2.

W pierwszym razie (fig. 4) mamy *ABE=DIG-\-CIGF, ADH=EFG — = ECIA-CIGF.* Odcinając *AK=DI, AL=DG, AM=EC, AN=EI,* dzielimy prostokąt *ABCD* na 4 części: *AEID, AKL, BELE, EIC,* które, zestawione w inny sposób, dają szukany kwadrat *AEGH* (Równe elementy, dla łatwiejszego ich wyróżnienia, zaznaczamy przy pomocy jednakowych wewnątrz nich umieszczonych liczb). W drugim razie, w podobny sposób dzielimy dany prostokąt na 4 lub więcej elementów, przychodząc do rozkładów, wskazanych na fig. 5 lub 5 bis.

Powyższy sposób opisał Montucla w przypiskach do wspomnianych wyżej „Rekreacji" Ozanama. Perigal w czasopiśmie „Messenger of Mathematics" za r. 1875, przez odmienne ustawienie figur równoważnych, zmniejszył liczbę składowych elementów. Do danego prostokąta *ABCD* (fig. 6) przystawiamy równoważny mu kwadrat *DEFG,* poczym wierzchołki *G* i *C* łączymy a przez *D, B* i *E* prowadzimy równolegle do *GC* otrzymane w ten sposób trójkąty *ADH, BCI, DEK* i *GFL* będą sobie równe. Jakoż, przedłużając

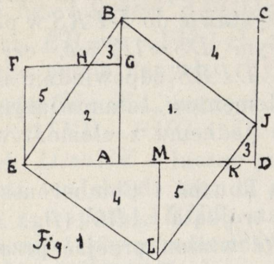


Fig 1

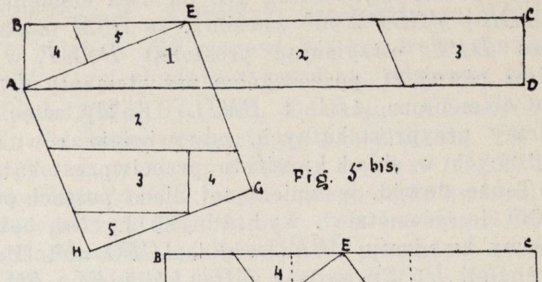


Fig. 5-bis.

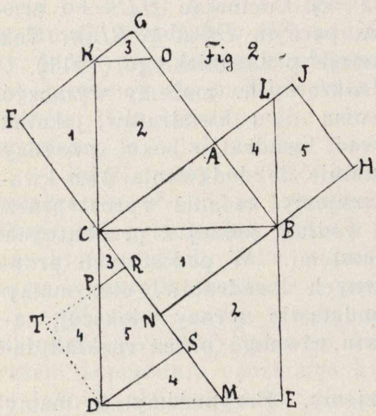


Fig 2

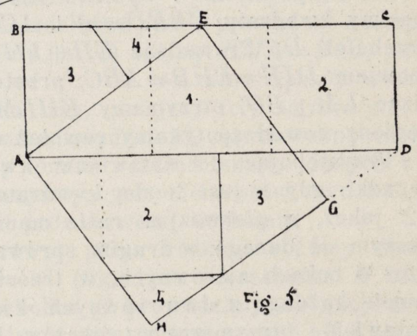


Fig. 5.

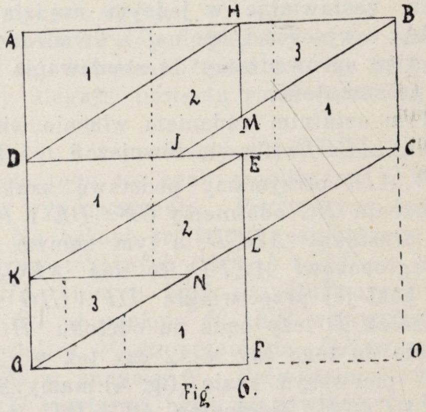


Fig 6.

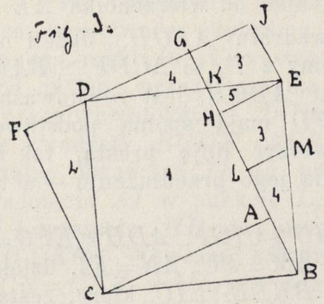


Fig 3.

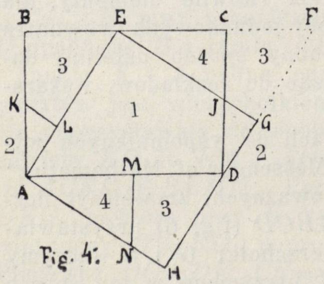


Fig. 4.

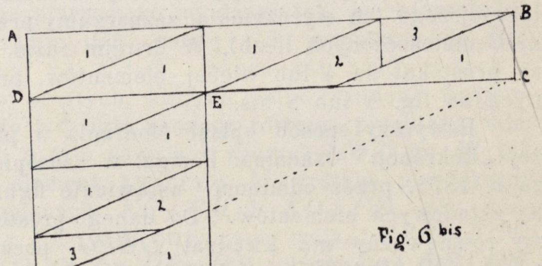


Fig. 6 bis

GF i *BC* do przecięcia w punkcie *O*, znajdziemy $\frac{LF}{CO}=\frac{GF}{GO}$ czyli $\frac{LF}{DE}=\frac{DE}{DC}$, a że według założenia $DE^2=AD.DC$, przeto $LF=AD$. Po odcięciu tych 4 narożnych trójkątów otrzymamy wewnątrz każdej z danych figur po równoległoboku: *DIBH* i *GKEL*. Prowadząc $KN \parallel DC$ i $HM \parallel AD$, mamy $GKEL = GEN + KNLE = ELC + KNLE = KNCE = DIBH = DHMI + HMB$, t. j. środkowe równoległoboki przez jedno tylko rozcięcie stają się równe przez rozkład. (Można wogóle zamiast punktów *H* i *K* wziąć na prostych *HD* i *KE* jakiekolwiek punkty, równooddalone od wspomnianych wierzchołków).

Podział opisany jest możliwy, o ile punkt *I* przypada wewnątrz odcinka *DE*, tak iż $DI<DE$ czyli $DI.DE<DE^2.DE$, że zaś $DE=IC$, mamy stąd $DC<2\sqrt{AD.DC}$, tak $DC<4AD$ czyli $n<4$. Gdy więc w sposobie Montucli najmniejszą liczbę elementów otrzymujemy w razie $n<2$, u Perigala przypadek ten sięga aż do $n<4$, co dowodzi większej skuteczności nowego sposobu.

W razie $n>4$, gdy $DI>DE$, odmierzamy na *DC* odcinki, równe *DE*, tyle razy, ile okaże się to możliwe i przez ich krańcowe punkty prowadzimy szereg równoległych do *GC*, odcinając od danych figur szereg równych równoległoboków, z których każdy za pomocą prostych, pionowych w prostokącie a poziomych w kwadracie, daje się podzielić na dwa odpowiednio przystające trójkąty, a ostatnie—jak w poprzednim przypadku — na trójkąt i trapez.

Przystępując do zajmującego nas zagadnienia o n-krotnym powiększeniu danego kwadratu, rozwiążemy je w ten sposób, że ustawiwszy prostokąt, złożony z *n* kwadratów, równych danemu, i przekształciwszy go na równoważny kwadrat, rozcinamy te figury na odpowiednio przystające elementy. Fig. 5 i 6 przedstawiają, w sposobach Montucli i Perigala, rozwiązanie zagadnienia dla $n=3$, przyczym 3 dane kwadraty pooddzielane są linjami kropkowanemi. W sposobie Montucli element 1 zostaje dodatkowo podzielony przez to na trzy, a 3 i 4 na dwa drobniejsze elementy, w sposobie zaś Perigala każdy z 4 poprzednich jeszcze na dwoje, tak iż w obu razach do ustawienia żądanego kwadratu mamy po 8 elementów.

Przez proste jednak przesunięcie ostatecznego kwadratu, jak wskazuje fig. 7, możemy w sposobie Montucli liczbę elementów zredukować do 7: bok szukanego kwadratu odmierzamy między podstawami prostokąta *AD* i *BC* nie od wierzchołka skrajnego *A*, lecz od jednego ze środkowych, np. *F*, t. j. kwadrat ten jakby przesuwamy równolegle na odległość *AE*. Do tej sprawy wrócimy jeszcze w następstwie.

Mając dany kwadrat o boku *C* rozłożyć na *n* równych kwadratów, bok *c* każdego z nich określimy jako $\frac{C}{\sqrt{n}}$; kreśląc więc prostokąt, złożony z ustawionych obok siebie *n* kwadratów o bokach *c*, postępujemy jak w razie poprzednim. Gdy np. $n=3$, dla danego kwadratu *EFGH* (fig. 7) kreślimy naprzód odcinek $c=\frac{1}{3}EF\sqrt{3}$ (t. j. trzeciej części boku trójkąta foremnego, wpisanego w koło o promieniu *EF*) i z punktu *F* promieniem *c* zakreślamy łuk, do którego z punktu *E* prowadzimy styczną. Przez punkt *F* do tej stycznej prowadzimy równoległą, na której w jedną stronę odcinamy $FC=c$, a w dru-

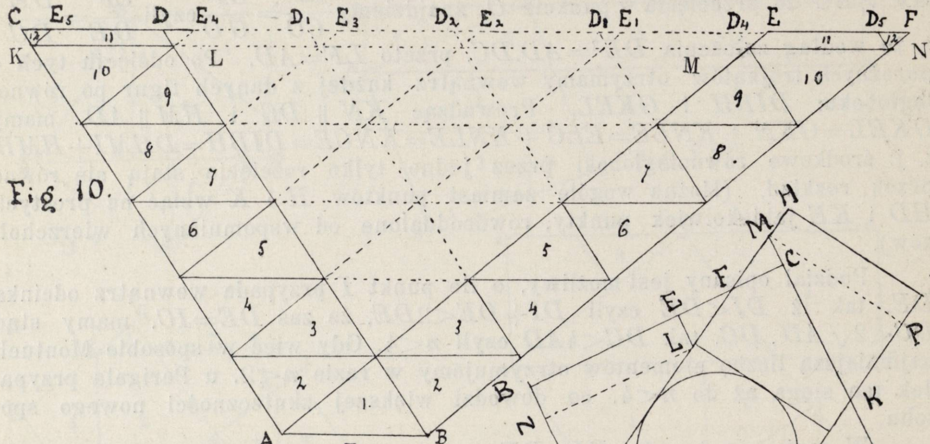


Fig. 10.

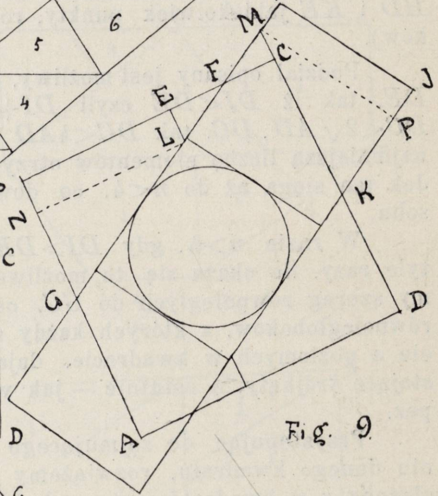


Fig. 9

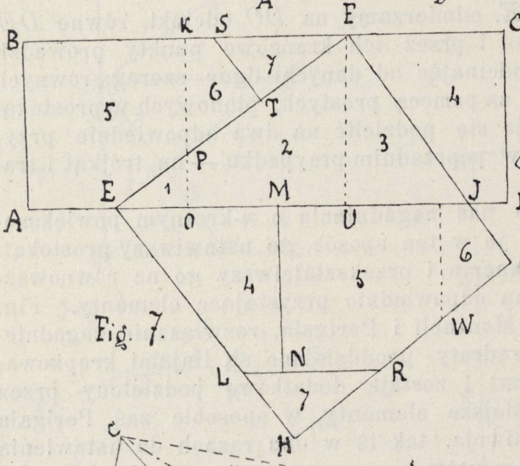


Fig. 7

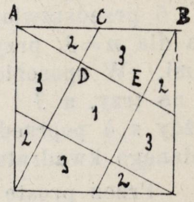


Fig. 8

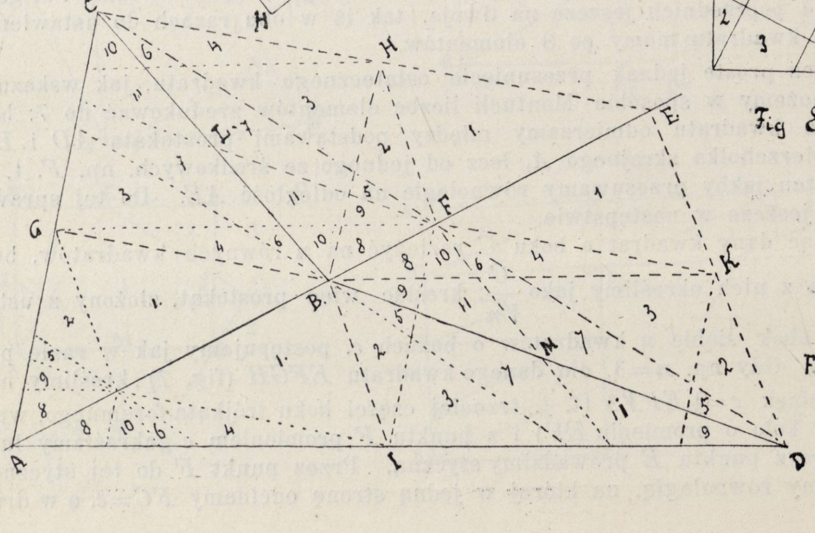


Fig. 14.

gą *FK=KB=c,* poczym budujemy prostokąt *ABCD,* w którym *AB = c,* dzieląc go prostemi *KO* i *FY* na 3 równe kwadraty. W ten sposób od danego kwadratu odcinamy ezęść *EFI.* zawierającą po jednym elemencie z trzech drobnych kwadratów (1, 2, 3). Odcinając *EL=FI* i *EM=FC.* a w punktach *L* i *M* prowadząc || do *ID* i *CD,* otrzymamy trapez *EMNL ^.FCDl* (elementy te zaznaczamy przez 4). W podobny sposób do pierwotnego kwadratu przenosimy pięciokąt *ABKPE* (oznoczony przez 5), wreszcie odcinając *SF=LR* i prowadząc *STJ_EF,* trójkąt *KPF* podzielimy na dwa elementy (ó i 7), odpowiednio przystające do pozostałych elementów pierwotnego kwadratu.

W razie n=5 możemy użyć bardzo prostego wykreślenia (fig. 8): środek każdego z boków kwadratu łączymy z jednym z przeciwległych wierzchołków. Cztery takie poprzeczne utworzą pośrodku kwadrat (1). a przy wierzchołkach 4 trójkąty (2) i tyleż trapezów (3). Biorąc którykolwiek trójkąt i przyległy mu trapez, np. *ACD* i *CDEB,* ze względu na *AC=CB* i *CD=^BE,* wnosimy, że figury te, zestawione bokami *AC* i *CB,* utworzą kwadrat, równy środkowemu.

Coatpont w czasopiśmie Catalana *) za r. 1877 rozwiązał obecne zagadnienie w sposób praktyczny, skuteczny dla wszelkiej nieparzystej wartości na *n.* Ze środka danego kwadratu *ABCD* (fig. 9) zakreślamy okrąg promieniem

$\frac{C}{2y/ li} = \frac{1}{2}c$ i na jednym z boków, np. *BC,* odcinamy od wierzchołka odcinek *BE=c,* a pozostałą część boku dzielimy w punkcie *F* napół, poczym z punktu *F* prowadzimy styczną do powyższego okręgu. Na stycznej tej budujemy kwadrat, na tymże opisany, a obok niego przy tejże stycznej w obie strony

po $\frac{n-2}{2}$ takichże kwadratów. W razie *n=3,* przedstawionym na fig. 9, wewnątrz danego kwadratu otrzymamy kwadrat środkowy o boku c=$\frac{ty}{V 3}$ oraz dwa 5-kąty i dwa trójkąty prostokątne, a zewnątrz — dwa 5-kąty wklęsłe, odpowiednio równoważne trójkątom, tak iż np. *CFHIK—BFG.* Prowadząc *EL_BF* i przedłużając *DC* do przecięcia z *FH* w punkcie *M,* otrzymamy *SFEL^ FMC,* skąd wnosimy, że trapezy *CBEL* i *MHIK* są równoważne. Prowadząc *LN__BG* i *MPpKI,* otrzymamy w nich naprzód trójkąty prostokątne *LNG* i *MKP,* w których *LN=MP,* jako odpowiednio równe odcinkom *BE* i *HI,* równym według założenia, a kąty ostre też równe, zatym *NG=KP* czyli *BG— EL=KI—MH.* Że zaś z równoważności rozważanych trapezów oraz równości ich wysokości wynika *BG-\-EIn=KI-\-MH,* przeto ostatecznie *BG=KI* i *EL—AłH,* tak iż trapezy te nietylko są równoważne, ale i równe. Gdybyśmy styczną do środkowego okręgu wyprowadzili z innego niż *F* punktu, otrzymane elementy nie dałyby się tak łatwo sprowadzić do przystawania.

Podział równoległoboków o równej podstawie i wysokości na elementy odpowiednio przystające, w razie jeżeli dolne podstawy całkowicie na siebie zachodzą a górne posiadają spoiny odcinek, mieliśmy sposobność zauważyć już np. na fig. 4, gdzie prostokąt *ABCD* przez przeniesienie trójkąta *ABE* na miejsce *DCF* przekształciliśmy w równoległobok *AEFD.* Jeżeli jednak,

---

9 „Nouvelle Correspondance Mathematique“ (Bruksela).

jak na fig. 10, górne podstawy CD i EF nie mają spólnego odcinka, odcinamy kolejno $DD_1 = D_1D_2 = ... = CD$, dopóki nie dojdziemy do punktu D_n leżącego wewnątrz odcinka EF, i podobnież $EE_1 = E_1E_2 = ... = EF$, dopóki nie dojdziemy do E_n wewnątrz CD. Prowadząc przez każdy z punktów pierwszego szeregu równoległe do AC, a drugiego — do BF i łącząc punkty ich wzajemnego przecięcia oraz przecięcia ich z bokami równoległoboków, każdy z tych ostatnich podzielimy na jednakową liczbę równych trójkątów oraz na równoległoboki $KCDL$ i $MEFN$, z których każdy składa się z odpowiednio przystających do siebie trójkąta (12) i trapezu (11).

W razie równoległoboków równoważnych, lecz o różnych podstawach i wysokościach, postępujemy jak przy przekształcaniu prostokąta na kwadrat sposobem Montucli. Mamy na fig. 11 rówmoważne równoległoboki $ABCD$ i $AEFG$, podzielone każdy na 4 elementy; po wyjaśnieniach, podanych przy fig. 4, obecna sama się już tłumaczy.

Jako przykład stosowania wyżej wspomnianej metody przesunięć równoległych. rozwiążmy na tym miejscu dwa zagadnienia, dotyczące przekształcenia foremnego: 1) sześciokąta i 2) pięciokąta na kwadrat równoważny.

Rozcinając dany sześciokąt foremny wzdłuż jednej ze średnic, otrzymamy dwa trapezy $ABCD$ i $ABFE$ (fig. 12) które przez połączenie ramionami utworzą równoległobok $EFCD$. Odcinając Tćr=bokowi szukanego kwadratu, prowadząc $CE\perp FG$ i biorąc $EI=FG$, otrzymamy szukany kwadrat $IHCK$. Z danym równoległobokiem ma on spólny 5-kąt $IMCNG$ (złożony z dwuch elementów, z których 1 należy do jednego, 2 do drugiego trapezu); następnie trójkąt prostokątny $GEN=FIM$ (kąty przy F i G równe, a odejmując od obu stron równości $FG = IE$ po IG znajdziemy $FI = GIF$), skąd wynika $IM=EN$, zatym $MK=NC$. Prowadząc $KL \parallel CD$ otrzymamy $MKL=NCD$ i $ELC= EFG$. Ogółem więc dany sześciokąt dzielimy na 5 elementów. Gdybyśmy szukany kwadrat zbudowali na odcinku FG, wypadłoby dany sześciokąt dzielić na 6 elementów, otrzymując w tej liczbie jeden bardzo wydłużony trapez.

Jeżeli dany pięciokąt foremny $ABCDE$ (fig. 13) mamy przekształcić na kwadrat, prowadzimy naprzód przekątną BD i na jej przedłużeniu odcinamy B7*=bokowi 5-kąta. poczym łącząc F i A, otrzymamy trapez $AFDE$, równoważny 5-kątowi, i prowadząc $EG \parallel ED$ przez środek odcinka AF, trapez ten przekształcamy na równoważny mu równoległobok $EGDE$. Odcinamy EI=X>o-kowi szukanego kwadratu, spuszczamy $EK \perp EI$ (oczywiście $EK = EF$), poczym budujemy szukany kwadrat $EKLM$, który, jak widzimy, wskutek powyższego wykreślenia będzie Zawierał 7 elementów mieszczących się w danym pięciokącie.

Z twierdzeniami Gerwiena, dotyczącemi trójkątów równych przez rozkład, zapoznał nas niedawno p. Zarzecki („Wektor“ Ns 5); poprzestaniemy więc na wykazaniu ich użytku. Fig. 14 przedstawia podział na elementy, parami przystające, dwu trójkątów ABC i ABD, mających równe wysokości i zestawionych podstawami w ten sposób, że linja wierzchołków CD przecina podstawę AB w punkcie zewnętrznym F. W takim razie, jak wiadomo, winniśmy się uciec do szeregu trójkątów pomocniczych, o wierzchołkach w C i D i podstawach, równych AB a odcinanych na jej przedłużeniu, dopóki się nie dojdzie do odcinka, mieszczącego wewnątrz punkt F. W przypadku, podanym na fig. 14, zaraz pierwszy taki odcinek BE odpowiada temu warun-

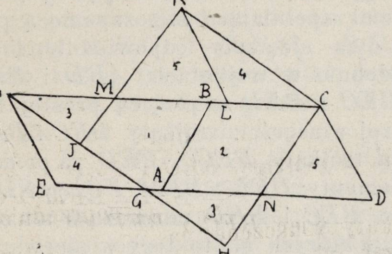


Fig. 12

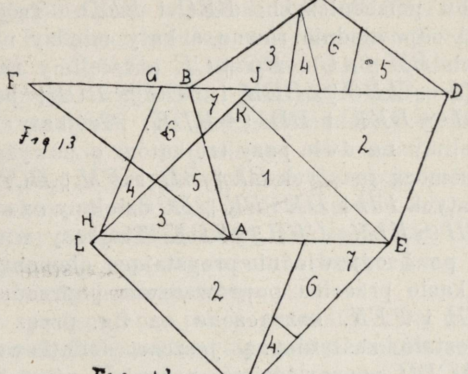


Fig. 13

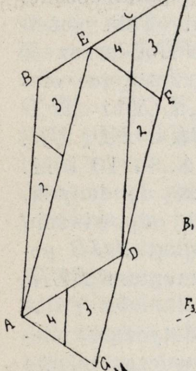
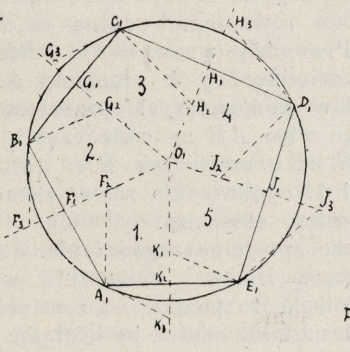


Fig. 11.



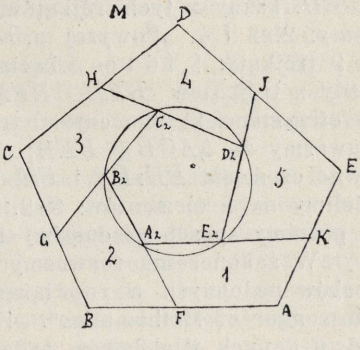
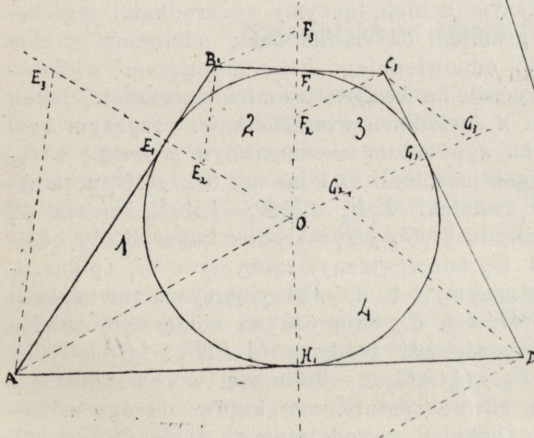


Fig 15



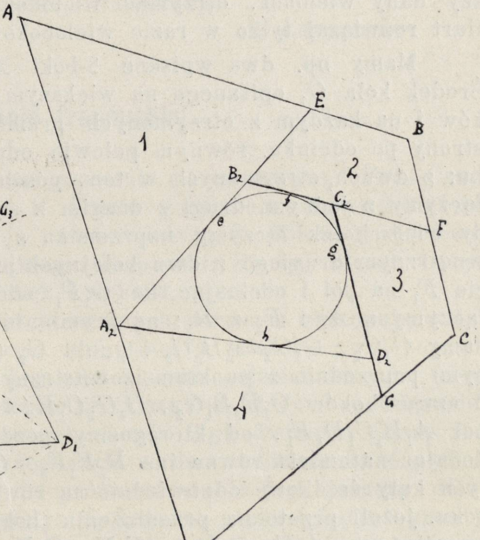


Fig. 16.

kowi, tak iż dla danych trójkątów *ABC* i *ABD* mamy jedną tylko parę trójkątów pomocniczych: *BEC* i *BED.* Trójkąty *ABC* i *CBE,* mające po dwa boki odpowiednio równe, a kąty między niemi spełniające się, zapomocą prostych *BH* || *AC* i *BG* || *CE* podzielimy na dwa elementy, odpowiednio przystające: *ABG<=^_ BEH* i *BCG^BCH',* podobnie w trójkątach *ABD* i *BED* *ABI^BEK* i *BDI^BDK.* Trójkąty *BEC* i *BED* za pomocą prostej *CD* dzielimy na dwie pary trójkątów o powyższej własności: trójkąty *BFC* i *BED* zapomocą prostych *FL* || *BD* i *FM* || *BC,* a trójkąty *FEC* i *FED* zapomocą prostych *FH* || *DE* i *FK* || *EC* dzielimy na elementy: *BFL^ABFM, FCE^FDM, FEH^FEK, CFH^FDK.* Trójkąty więc *BEC* i *BED* mieszczą w ten sposób po 4 odpowiednio przystające elementy, z których nadto trzy w pierwszym trójkącie przecina poprowadzona poprzednio *BH,* a w drugim *BK.* Elementy *FEH* i *FEK,* zaznaczone na fig. przez 1, pozostają przytym nienaruszone, pozostałe zaś ulegną jeszcze dodatkowym rozczłonkowmniom. Tak, jeżeli w *\CFH* poprowadzimy przez *H* równoległą do *BK,* a w *SFDK* przez *K* do *BH.* każdy z tych trójkątów podzielimy na 3 odpowiednio przystające elementy: 2, 3 i 4. Powyżej prowadzone równoległe odetną od *LCF* i *MFD* po 2 trójkąty: 5 i 6 i po 5-kącie: 7. Prowadząc wreszcie *FG* || *BK* i *FI* || *BH,* każdy z trójkątów *BFL* i *BFM* podzielimy na 4 elementy: 8, 9, 10 i 11. By otrzymane 11 elementów trójkątów pomocniczych przenieść do danych, zauważmy że *KAGB^BEH',* dzieląc więc *AB* na dwie części, odpowiednio równe częściom *BE.BF* i *FE,* a *AG* na 4 części jak *BH,* trójkąt *AGB* podzielimy na 5 elementów: 8, 9, 5, 2 i 1, odpowiednio równe elementom *BEH.* W podobny sposób przenosimy i pozostałe elementy.

W zakończeniu rozważmy jeszcze specjalne zagadnienie, dotyczące wieloboków" podobnych a rozwiązane przez Harta w roku 1877 w czasopiśmie „Messenger of Mathematics“. Zagadnienie to polega na rozcięciu większego z dwu danych wieloboków" podobnych na takie części, by okalając niemi mniejszy dany wielobok, otrzymać wielobok podobny do danych. Zagadnienie to Hart rozwiązał tylko w razie wieloboków wpisanych lub opisanych.

Mamy np. dwa wpisane 5-boki *A^B^D^D^E^* i $A_2B_2C_2D_2E_2$ (fig. 15). Środek koła $(9_1$ opisanego na większym z nich, łączymy ze środkami jego boków i na każdym z otrzymanych promieni od środka boku odcinamy w obie strony po odcinku, równym połowie odpowiedniego boku mniejszego wńeloboku; z dwuch, otrzymanych w ten sposób na każdym promieniu punktów, jeden łączymy z jednym, drugi z drugim z sąsiednich wierzchołków, przyczym każdy wierzchołek łączymy naprzemian z punktem wewnętrznym jednego, a zewnętrznym drugiego z dwu kolejnych promieni. Dzieląc np. bok H_1B_1 w punkcie F_x na pół i odcinając na O_lF_1 odcinki $I\backslash F_2$ $=F_1F_3=$^.$A_2B_{i'}$ punkt F_2 łączymy z A_r i F_3 z B_1; na promieniu O_1G_1 *(*G_r*—* środek boku *B^^)* odcinamy G_VG_2= G_VG_3=^B_2C_2 i punkt G_z (wewnętrzny) łączymy z B_1 (połączonym poprzednio z punktem zewnętrznym) i t. d. Otrzymamy w ten sposób 5 czworoboków *O^F^ByG^,* $O_XG_3C_XH_2$ i t. d., dających na sumę dany wielobok $A_lB_lC_lD_lE_{l'}$ od któregośmy poodcinali trójkąty $A_lI\backslash F_2$, $B_lG_lG_2$, ... dodając natomiast równe im $B_rP\backslash F_3$, *C^G^G*...* Ponieważ w czworobokach tych kąty środkowm odpowiednio są równe spełnieniom kątów danego wieloboku, jeżeli przeto na przedłużeniu boku B_2A_2 odetniemy $A_2F=0_1F_i$ a na przedłużeniu A_2E_2 odcinek $E_2K=O_VK_2$, poczym z punktów *F* i *K* zakreślimy łuki odpowiednio promieniami ń^zl, i K_3A_1, przecinające się w punkcie

A, otrzymamy czworobok AFA_2KAJF^$\underline{\sim}OyK$^, *w* podobny sposób BCB_2F^ ^$B_XG_2O_XF_3$ i t. d. Ostatecznie wypadnie nam wielobok *AFBGCHDIEKA,* równy przez rozkład -sumie danych. Ponieważ, według powyższego wykreślenia. kąty $A_1F_2O_1$ i $B_XF_3O_X$, $B_XG_2O_X$ i Cjćr$_3$ć\,... wzajemnie się spełniają, przeto każde trzy wierzchołki ostatniego wieloboku, jak: *A, F* \ *B-, B, G* i *C,...* leżą na jednej prostej, tak iż wielobok ten jest jednoimienny z danemi. Że zaś w dwuch trójkątach, przyległych do jednego wierzchołka, jak w $B_lF_lF_3$ i $B_XG_XG_2$, $C_XG_XG_3$ i $C_XH_XH_2$,... przyprostokątne stanowią połowy odpowiednich boków danych wieloboków, a wskutek podobieństwa ostatnich boki te są w stosunku stałym, wnosimy że takiż stosunek się zachowa i między bokami ostatecznego wieloboku, a kąty jego odpowiednio będą równe kątom danych, tak iż wszystkie te wieloboki będą podobne.

W razie wieloboków opisanych postępujemy jak poprzednio, z tą różnicą, że na promieniach, wyprowadzonych ku punktom styczności boków większego wieloboku z wpisanym weń kołem, odcinać będziemy części, na jakie odnośne punkty styczności podzielą odpowiednie boki mniejszego wieloboku: $E_XE_3 = A_2e$, $E_xE_2 = eB_2$, $F_xF_3 = B_2f$, $F_xF_2 = fC_2$ i t. d. (fig. 16), tak iż trójkąty prostokątne przyległe do jednego wierzchołka, jak $B_XE_XE_2$ i $B_XF_XF_3$, będą równe, a przyległe do jednego boku, jak $A_XE_XE_3$ i $B_XE_XE_2$ — podobne; otrzymany przeto wielobok *ABCD* będzie podobny do danych wieloboków i równy im przez rozkład.

Zauważmy, że w zagadnieniu Harta konstrukcja jest możliwa, o ile boki większego wieloboku od swego środka odległe są nie mniej niż o właściwy odcinek odpowiedniego boku mniejszego wieloboku (t. j. o połowę tegoż w razie wieloboków wpisanych lub o część od wierzchołka do punktu styczności—w razie opisanych). Jeżeli odległość ta staje się równą rzeczonemu odcinkowi (jak na fig. 16 gdzie $G_XE_X = A_2h$~). wówczas odpowiedni czworobok zamienia się na trójkąt, a odpowiedni wierzchołek mniejszego z danych wieloboków przypadnie na obwodzie wieloboku ostatecznego.

A. Łaparewiez.