Rozwiązania zadań, umieszczonych w 5.№

36*. Dowieść, że suma

$$S=\sum_{k=0}^{k=m}(-1)^k\binom{m}{k}\binom{(n+1)\ (m-k)}{x},$$

gdzie *m* i *n* całkowite i stałe, zaś *x* całkowita zmienna, przy a:=m jest równa (1+ft)™, zaś Przy *x*<*Zm* jest =0.

Mamy wielomian

1 . . . . $1+x+x^2+\ldots\ldots+x^n=\sum_{\alpha=0}^{\alpha=n}x^\alpha$

Oznaczymy:

2 . . . . $\left[\sum_{\alpha=0}^{\alpha=n}x^\alpha\right]^m=\sum_{i=0}^{i=mn}A_i^{(m)}x^i$

3 . . . . $\left[\sum_{\alpha=0}^{\alpha=n}x^\alpha\right]^{m-1}=\sum_{j=0}^{j=(m-1)n}A_j^{(m-1)}x^j$

4 . . $\sum_{i=0}^{i=mn}A_i^{(m)}x^i=\sum_{j=0}^{j=(m-1)n}A_j^{(m-1)}x^j\cdot\sum_{\alpha=0}^{\alpha=n}x^\alpha=\sum_{j=0}^{j=(m-1)n}\ \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n}A_j^{(m-1)}x^{j+\alpha}$

skąd jest oczywiste, że

5 . . . . $A_i^{(m)}=\sum A_j^{(m-1)},$

gdzie $j=i-\alpha,\ 0\leqslant i\leqslant mn,\ 0\leqslant\alpha\leqslant n.$

Kładąc tutaj $i = pn + w$, gdzie p dowolne, a $w < n$, otrzymamy dla a = 0, 1, 2,.......... n

$$j = pn + w - a = pn + w,\ pn + w - 1,\ pn + w - 2, \ldots\ldots (p-1)n + w;$$

będzie zatym:

$$6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad A^{(m)}_{pn+w} = \sum_{l=0}^{l=n} A^{(m-1)}_{(p-1)n+w+l}$$

Przy pomocy tego ostatniego znajdziemy:

$$A^{(m)}_{pn+w+1} = A^{(m)}_{pn+w} - A^{(m-1)}_{(p-1)n+w} + A^{(m-1)}_{pn+w+1}$$

$$A^{(m-1)}_{pn+w+1} = A^{(m-1)}_{pn+w} - A^{(m-2)}_{(p-1)n+w} + A^{(m-2)}_{pn+w+1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A^{(m-t)}_{pn+w+1} = A^{(m-t)}_{pn+w} - A^{(m-t-1)}_{(p-1)n+w} + A^{(m-t-1)}_{pn+w+1}$$

skąd po zsumowaniu otrzymamy łatwo:

$$7 \quad \ldots\ldots \quad A^{(m)}_{pn+w+1} = \sum_{t=t}^{t=0} A^{(m-t)}_{pn+w} - \sum_{t=t}^{t=0} A^{(m-1-t)}_{(p-1)n+w} + A^{(m-1-t)}_{pn+w+1}$$

Położywszy zaś w tym $t=m-2$, znajdujemy:

$$A^{(m-1-t)}_{pn+w+1} = A^{(1)}_{pn+w+1} = 0 \text{ pod warunkiem, że } p > 0$$

łub że $w+1 > n$ jeżeli $p = 0$. W tym założeniu otrzymamy

$$8 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad A^{(m)}_{pn+w+1} = \sum_{t=m-2}^{t=0} A^{(m-t)}_{pn+w} - \sum_{t=m-2}^{t=0} A^{(m-1-t)}_{(p-1)n+w}$$

Jeżeli w 5-tym położymy $i = w,\ w \leqslant n,$ to dla a = 0, 1, 2 .... w otrzymamy $j = i - a = w - a = w,\ w-1 \ldots\ldots\ldots 0$; a zatym mamy:

$$9 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad A^{(m)}_{w} = \sum_{j=0}^{j=w} A^{(m-1)}_{j} \text{, a stąd}$$

$$A^{(2)}_{w} = \sum_{j=0}^{j=w} A^{(1)}_{j} = \binom{w+1}{1}, \quad \text{gdyż } A^{(1)}_{j} = 1 .$$

$$A_w^{(3)} = \sum_{j=0}^{j=w} A_j^{(2)} = \sum_{j=0}^{j=w} \binom{j+1}{1} = \binom{w+2}{2} \text{ i t. d.,}$$

wreszcie ogólnie:

10 . . . . . . $$A_w^{(m)} = \binom{m-1+w}{m-1} = \binom{m-1+w}{w}, \text{ gdzie } w \leqslant n .$$

Kładąc w 8-ym: $p=1$, $w=0$, znajdziemy

$$A_{n+1}^{(m)} = \sum_{t=m-2}^{t=0} A_n^{(m-t)} - \sum_{t=m-2}^{t=0} A_0^{(m-1-t)}$$, co na zasadzie 10-go dostarczy

$$A_{n+1}^{(m)} = \sum_{t=m-2}^{t=0} \binom{n+m-1-t}{n} - \sum_{t=m-2}^{t=0} \binom{0+m-t-2}{0} =$$

$$= \sum_{t=m-1}^{t=0} \binom{n+m-1-t}{n} - \sum_{t=m-1}^{t=0} \binom{m-t-1}{0} =$$

$$= \binom{m+n}{n+1} - m\binom{m-1}{0} = \binom{m+n}{m-1} - m\binom{m-1}{m-1} .$$

Kładąc dalej w 8-ym: $p=1$ oraz kolejno: $w=1, 2, \ldots\ldots\ldots, w$, otrzymamy analogicznie

$$A_{n+2}^{(m)} = \binom{m+n+1}{m-1} - m\binom{m}{m-1} ; \quad A_{n+3}^{(m)} = \binom{m+n+2}{m-1} - m\binom{m+1}{m-1}$$

i t. d. aż wreszcie:

11 . . . . $$A_{n+w}^{(m)} = \binom{m+n+w-1}{m-1} - m\binom{m+w-2}{m-1}, \text{ gdzie } w \leqslant n.$$

Podstawiając następnie do wzoru 8-go kolejno:

$$\left.\begin{array}{l} p=2 \\ p=3 \\ \ldots\ldots \\ p=p \end{array}\right\} \quad w=0,\ 1,\ 2, \ldots\ldots, w-1,\ w$$

Otrzymamy drogą sumowania szereg wzorów, jak np.

12 . . . . . $$A_{2n+w}^{(m)} = \binom{m+2n+w-1}{m-1} - \binom{m}{1}\binom{m+n+w-2}{m-1} + \binom{m}{2}\binom{m+w-3}{m-1}$$

$$13 \quad \dots\dots \quad A^{(m)}_{3n+w} = \binom{m+3n+w-1}{m-1} - \binom{m}{1}\binom{m+2n+w-2}{m-1} + $$

$$+ \binom{m}{2}\binom{m+n+w-3}{m-1} + \binom{m}{3}\binom{m+w-4}{m-1}$$

i t. p., aż wreszcie dojdziemy do wzoru najogólniejszego:

$$14 \quad \dots\dots\dots\dots \quad A^{(m)}_{pn+w} = \sum_{k=0}^{k=p} (-1)^k \binom{m}{k}\binom{m+(p-k)n+w-k-1}{m-1}$$

Kładąc tutaj p —m, znajdziemy

$$15 \quad \dots\dots\dots\dots \quad A^{(m)}_{mn+w} = \sum_{k=0}^{k=m} (-1)^k \binom{m}{k}\binom{(n+1)(m-k)+w-1}{m-1}$$

Ponieważ ostatnim spółczynnikiem rozwinięcia 2-go jest $A^{(m)}_{mn} = 1$, przeto wzór 15-ty dla w — 0 będzie posiadał wartość 1, dla wszelkiego zaś $w > 1$ jego wartość musi być równą zeru, i mamy przedewszystkim dla w—1

$$16 \quad \dots\dots\dots\dots \quad \sum_{k=0}^{k=m} (-1)^k \binom{m}{k}\binom{(n+1)(m-k)}{m-1} = 0 .$$

Jeżeli weźmiemy sumę: $S = \sum_{k=0}^{k=m} (-1)^k \binom{m}{k}\binom{(n+1)(m-k)}{m-2}$, to, ponieważ $\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k} + \binom{m-1}{k-1}$, będziemy mogli napisać:

$$S = \sum_{k=0}^{k=m} (-1)^k \binom{m-1}{k}\binom{(n+1)(m-k)}{m-2} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=m-1} (-1)^k \binom{m-1}{k-1}\binom{(n+1)(m-k)}{m-2} .$$

Lecz na zasadzie wzoru 15-go i tego, co o nim powiedziano, wynika, że każda z sum składających sumę S jest zerem, tedy i $S=0$. To samo i w ten sam sposób okażemy dla sumy, w której $x = m$—3, m— 4,..., 2. 1, 0, przez co część druga danego twierdzenia jest dowiedziona.

Dalej nader łatwo okazać, że

$$\sum_{i=0}^{i=mn} A_i^{(m)} = \sum (-1)^k \binom{m}{k} \binom{(n+1)\ (m-k)}{m} = (1+n)^m$$

co stanowi dowód 1-ej części twierdzenia. X *Y.*

37*. Znaleźć liczbę całkowitą, równą sumie cyfr własnego sześcianu.

W założeniu, że liczba szukana jest n-cyfrowa, najmniejszą jej wartość określimy na 10"—L Ponieważ sześcian jej będzie liczbą conajwyżej 3w-cyfrową, a największą wartością każdej z ostatnich może być 9, suma cyfr sześcianu szukanej liczby, a tym samym i ona sama, może się równać conajwyżej 27w. Stąd wnosimy, że liczba *n* winna odpowiadać nierówności 10"—1<27w, która się sprawdza jedynie dla w=l i *n — 2.* Liczba więc szukana może być conajwyżej liczbą dwucyfrową, nie większą nad 54.

Przedstawiając dowolną liczbę w postaci *3a-j-b,* gdzie *b — Q,* -f-1 lub —1, sześcian jej wyrazimy jako 9<?+ó^s, tak iż każdy sześcian bądź jest podzielony przez 9, bądź daje w tym razie na resztę -+-1. Tak też zachowuje się względem mod. 9 i suma cyfr sześcianu, a więc i sama liczba szukana.

Stąd wnosimy, że liczb, odpowiadających podanemu warunkowi, poszukiwać należy jedynie śród liczb szeregu

1, 8, 9, 10. 17, 18, 19, 26, 27, 28, 35, 36, 37, 44. 45, 46, 53. 54.

Z liczb jednocyfrowych wspomnianemu warunkowi odpowiadają 1 i 8.

Sześcian liczby dwucyfrowej jest liczbą złożoną bądź z 6 cyfr (powyżej 46), bądź z 5 (od 22 do 46), bądź wreszcie z 4 (poniżej 22). Z tego względu liczby 53 i 54 z powyższego szeregu należy wyłączyć; jakoż sześciany ich kończą się na 7 i 4, tak iż choćby nawet pozostałe cyfry były 9, suma ich uczyni tylko 52 i 49. Podobnież liczby 44, 45 i 46 o sześcianach 5-cyfrowych, kończących się na 4, 5 i 6, nawet w razie 4 dziewiątek w tym składzie, na sumę cyfr swych sześcianów mogłyby dać tylko 40, 41 i 42, jako więc takie zawczasu mogą być odrzucane. Podnosząc do sześcianu pozostałe liczby dwucyfrowe powyższego szeregu, znajdziemy, że wspomnianemu warunkowi odpowiadają jedynie

17, 18, 26 i 27

o sześcianach

4193, 5832, 17576 i 19683

tak iż ogółem mamy tylko sześć rozwiązań obecnego zagadnienia*).

A. Łapareiwicz.

---

*) Zagadnienie obecne znalazłem w przypiskach Fitz Patricka do franc. przekładu „Rekreacji" Rouse Balia (II wyd., t. I. iy07 str. 18S) i zamieściłem w r. 1910 w „Przyjacielu Dzieci", formułując je w sposób nast.:

Zapewne każdy liczbę zna,
Która ciekawą własność ma:
Gdy do sześcianu ją wzniesiemy
I cyfry tegoż wraz zbierzemy
Wypadnie w sumie—istny cud! —
Znowuż ta liczba, znana wprzód.
Liczb takich sześć być może tylko.
Znajdźcie je wszystkie wolną chwilką. A. Ł.