27.

THÉORIE DES NOMBRES.

(*Extrait d'une Lettre adressée à* M. HERMITE *par* M. SYLVESTER.)

[*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, L. (1860), p. 367.]

...EN désignant par $(n; a, b)$ le nombre des solutions entières et positives de l'équation

$$ax + by = r$$

pour la série des valeurs $r = 0, 1, 2, \ldots, n$, j'ai obtenu ces deux théorèmes :

1°. Soit $n + 1 = kab + n'$, on aura

$$(n; a, b) = k\frac{kab + a + b + 2n' - 1}{2} + (n'; a, b).$$

Cette relation permet déjà de remplacer n par son résidu minimum suivant le module ab dans $(n; a, b)$.

2°. Soit ν un nombre entier inférieur à ab; on pourra déterminer les entiers positifs a' et b' de manière à avoir

$$ab' - ba' = 1,$$

a' étant moindre que a, et b' moindre que b. Cela posé, si l'on désigne par $E(x)$ l'entier compris dans une quantité quelconque x, et qu'on pose

$$E\left(\frac{b'\nu}{b}\right) = \nu',$$

on aura
$$(\nu; a, b) = (\nu'; a', b') - \mathfrak{R},$$

ou
$$\mathfrak{R} = \left[\nu' - E\left(\frac{a'\nu}{a}\right)\right] E\left(\frac{a\nu' - \nu a' + 1}{a'}\right).$$

Par ce second théorème on peut diminuer les deux coefficients a et b, en les remplaçant par a' et b'; donc en le joignant au précédent et appliquant successivement les deux propositions, on voit qu'on pourra exprimer $(n; a, b)$ par une série contenant au plus autant de termes qu'il a de fonctions convergentes vers $\frac{a}{b}$.