

Une nouvelle classe de lois de comportement décrivant les grandes déformations viscoélastoplastiques

P. GUELIN et P. STUTZ (GRENOBLE)

L'EXPOSÉ traite d'une nouvelle classe de lois de comportement visco élasto-plastiques de corps isotropes. Cette classe de lois tensorielles est capable de décrire les grandes déformations en respectant le principe d'objectivité. Les résultats numériques présentés concernent des essais de traction-compression et des essais de fluage simple.

Przedstawiono nową klasę związków fizycznych dla izotropowych ciał lepko sprężysto-plastycznych. Ta klasa związków tensorowych pozwala opisać duże odkształcenia z zachowaniem zasady obiektywności. Wyniki numeryczne dotyczą próby rozciągania-ściskania oraz zwykłej próby pełzania.

Представлен новый класс физических соотношений для изотропных вязко упруго-пластических тел. Этот класс тензорных соотношений позволяет описать большие деформации с сохранением принципа объективности. Численные результаты касаются испытания растяжение-сжатие и обыкновенного испытания ползучести.

Introduction

L'EXPOSÉ traite d'une nouvelle classe de lois de comportement élastoplastiques purement mécaniques de corps isotropes, matériellement simples, non vieillissants, à état de contraintes initiales stationnaire.

La génération de cette classe de lois tensorielles met essentiellement en jeu une superposition, en repères corotationnels, d'accroissements de contraintes (cf [1]). Elle est donc capable de décrire les grandes déformations en respectant d'emblée le principe d'objectivité.

On distingue deux genres d'accroissements infinitésimaux de contraintes, respectivement dénommés par les termes viscoélastique et élastoplastique.

Schématiquement, la classe de lois étudiée est donc engendrée par sommation en repères corotationnels de deux vitesses de contrainte de forme viscoélastique et élastoplastique. (**)

La forme de vitesse de contrainte élastoplastique employée ici implique l'irréversibilité des évolutions, même pour des déformations infinitésimales très lentes.

Notons enfin qu'il n'est pas nécessaire, dans la théorie présentée, de décomposer un tenseur de déformation ou de transformation linéaire tangente en deux parties telles que élastique et non élastique.

Après avoir précisé les hypothèses fondamentales nous présentons l'expression de la

(**) On indique à propos de l'hypothèse 3 ci-après la raison de cette sommation des vitesses de contrainte et non des contraintes.

loi en repères corotationnels et montrons qu'elle est susceptible de décrire des comportements solide et fluide ainsi que le comportement critique au sens de SAWCZUK-STUTZ (cf [2] à [4]). Dans ce dernier cas, une vitesse de déformation, caractéristique du matériau, introduite par la structure de la loi, joue un rôle important.

On procède alors à un choix particulier d'hypothèses secondaires peu restrictives, physiquement significatives et commodes en vue de quelques développements détaillés.

Un dernier paragraphe concerne l'étude d'un schéma unidimensionnel déduit de la loi tensorielle envisagée.

Les résultats numériques présentés concernent soit des essais de traction-compression à vitesse de déformation imposée, soit des essais de fluage simple. On procède à quelques comparaisons qualitatives avec les résultats expérimentaux.

L'étude de la propagation des vibrations ne figure pas dans l'exposé.

1. Hypotheses fondamentales

Hypothèse 1: Lors d'une évolution infinitésimale la variation du tenseur contrainte résulte de la somme des variations $d\sigma_{ep}$ et $d\sigma_{ve}$ d'une contrainte du genre élastoplastique et d'une contrainte du genre viscoélastique:

$$(1.1) \quad d\sigma = d\sigma_{ep} + d\sigma_{ve}.$$

Hypothèse 2: Les tenseurs σ_{ep} et σ_{ve} s'obtiennent comme somme infinie en repères corotationnels d'éléments $d\Sigma_{ep}$ d'une part, $d\Sigma_{ve}$ et $d\Sigma_{vh}$ d'autre part, éléments dont les influences sont pondérées par des mémoires et dont les formes sont:

$$(1.2) \quad d\Sigma_{ep} = H(\mathcal{D}, \sigma, I_i) dt,$$

$$(1.3) \quad d\Sigma_{ve} = f(\mathcal{D}) d\tau,$$

$$(1.4) \quad d\Sigma_{vh} = \overset{\star}{A}(E_i, S_i, I_i) f(\mathcal{D}) d\tau, \quad i = 1, 2, 3.$$

Dans ces formules H et f sont des fonctions tensorielles isotropes s'annulant avec le tenseur vitesse de déformation \mathcal{D} , H est homogène de degré -1 relativement au temps.

Le scalaire $\overset{\star}{A}$ est une fonction des invariants E_i, S_i, I_i respectivement associés à \mathcal{D}, σ et γ , tenseur déformation pour la définition duquel la forme de référence va être précisée.

Les fonctions $\overset{\star}{A}$ et H sont stationnaires relativement aux très grandes valeurs de I_1 et I_2 qui tendent vers l'infini avec la déformation.

Hypothèse 3(*): Les mémoires relatives à $d\Sigma_{vh}$ et $d\Sigma_{ve}$ sont fonctions d'un temps intérieur. La mémoire affectant $d\Sigma_{vh}$ est une fonction de Heaviside. Celle, χ , affectant $d\Sigma_{ve}$ est positive décroissante sommable sur tout son support borné par un temps caractéristique t_c .

(*) La définition de la mémoire élastoplastique pose des problèmes particuliers non examinés ici. On convient d'employer par exemple celle de [3] souvent dite de Masing dont la transposition dans ce travail serait une mémoire du genre déferlante dans l'espace (I_1, S_i) . Compte tenu de certains résultats expérimentaux (cf. [5]), on peut envisager d'introduire également une mémoire continue du même espace ou d'un sous espace.

On note que des effets visqueux de première espèce existent même si les effets viscoélastiques dus à la mémoire χ disparaissent. Cette hypothèse est essentielle dans le cas où les écoulements tendent vers une limite (évolutions stationnaires).

Hypothèse 4: Le corps est au repos depuis un laps de temps au moins égal à t_c antérieurement à l'instant initial $t = 0$. La forme de référence nécessaire à la définition de γ est celle à $t = 0$ et $\mathcal{D}(0) = 0$. L'état de contrainte initial est stationnaire mais pas nécessairement neutre.

Avec les hypothèses ci-dessus, (1.1) à (1.4) donnent, après dérivation sous le signe somme et par exemple pour une évolution assez régulière de \mathcal{D} :

$$(1.5) \quad \frac{d\sigma}{dt} = H(\mathcal{D}, \sigma, I_i) + [1 + A(E_i, S_i, I_i)] \chi(0) f[\mathcal{D}(t)] + \int_a^t \chi'(t-\tau) f[\mathcal{D}(\tau)] d\tau,$$

où $a = 0$ si $t \leq t_c$ et $t - t_c$ si $t > t_c$ et où l'on a posé: $\dot{A} = \chi(0)A$. Cette loi de comportement visco élastoplastique purement mécanique concerne des corps isotropes, matériellement simples, non vieillissants à état de contrainte initial stationnaire.

Il est difficile d'étudier les conditions que doivent remplir les fonctions tensorielles mises en jeu pour que (1.5) puisse décrire un comportement solide ou fluide défini par exemple au sens suivant (cf. [6] page 12):

Si sous σ maintenue indéfiniment constante le corps tend vers une forme limite (atteinte ou non) le corps a un comportement solide et $\mathcal{D} \rightarrow 0$ à $t \rightarrow \infty$. Si $\mathcal{D} \rightarrow \text{cste} \neq 0$ (atteinte ou non) le corps a un comportement fluide.

Par contre il est possible d'examiner en choisissant des cinématiques particulières, les possibilités d'existence d'une limite de σ si $t \rightarrow \infty$. Nous allons examiner trois cas de cinématique.

Intéressons nous à une évolution où \mathcal{D} devient nul à partir du temps T . Il est bien évident, puisque la mémoire est à support borné, que la contribution de l'intégrale est nulle pour: $t - T > t_c$. Comme $f(0) = 0$ et $H(0, \sigma, I_i) = 0$ la contrainte devient stationnaire à partir de l'instant $T + t_c$. La loi est donc susceptible de décrire un comportement solide.

Envisageons à présent un écoulement sous contrainte constante. Remarquons d'abord que la solution: $\mathcal{D} = 0$ si $t > T$ satisfait (1.5) pour $t > T + t_c$. Le fluage est alors limité et l'on retrouve le comportement solide ci-dessus. Reste à envisager une solution où \mathcal{D} est supposé tendre vers une limite finie non nulle. La loi (1.5) conduit à l'équation:

$$(1.6) \quad H(\mathcal{D}, \sigma, I_3) + A(E_i, S_i, I_3) \chi(0) f(\mathcal{D}) = 0$$

Si la fonction du premier membre est suffisamment régulière elle détermine implicitement \mathcal{D} comme fonction de σ . La loi décrit donc un fluage à \mathcal{D} constant c'est à dire un comportement fluide.

Soit H de la forme $\bar{H} \cdot \mathcal{D}$ (H linéaire en \mathcal{D}) et soit V un domaine de l'espace E_i dans lequel: $f = \bar{f}_0 \cdot \mathcal{D}$ où \bar{f}_0 est un scalaire constant. La loi (1.5) conduit, pour de très grandes déformations, à une condition d'écoulement critique au sens de SAWCZUK-STUTZ:

$$(1.7) \quad \bar{H}(\sigma, I_3) + A(S_i, I_3) \chi(0) \bar{f}_0 = 0$$

à condition que A soit indépendant de E_i . La vitesse de déformation est indéfinie dans le domaine de vitesse caractéristique.

2. Un choix particulier d'hypothèses secondaires

a) On pose:

$$(2.1) \quad H = a_0 \delta + a_1 \mathcal{D} + a_2 \sigma$$

où δ désigne le tenseur unité et les a_i ($i = 0, 1, 2$) des scalaires fonctions de I_i ($i = 1, 2, 3$) et des invariants construits sur σ et \mathcal{D} .

D'autre part on impose l'homogénéité de degré—1 par rapport au temps de H comme en [3] ou [4]:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} a_0 &= \alpha_0 E_1 + \alpha_3 \bar{M} + \alpha_5 \bar{N}, \\ a_1 &= \alpha_1, \\ a_2 &= \alpha_2 E_1 + \alpha_4 \bar{M} + \alpha_6 \bar{N}, \end{aligned}$$

avec:
$$E_1 = \mathcal{D}_{ii}, \quad \bar{M} = \bar{\sigma}_{ij} \bar{\mathcal{D}}_{ij}, \quad \bar{N} = \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{jk} \bar{\mathcal{D}}_{ki}.$$

Les scalaires α sont alors fonctions des invariants I_i de la déformation totale γ et des invariants S_i du tenseur contrainte, définis ici par:

$$S_1 = \sigma_{ii}, \quad \bar{S}_2^2 = \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{ij}, \quad \bar{S}_3^3 = \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{jk} \bar{\sigma}_{ki}$$

où

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} S_1.$$

b) On pose (cf. hypothèse 2):

$$(2.3) \quad f = M_0(E_i) E_1 \delta + M_1(E_i) \mathcal{D},$$

où E_i ($i = 1, 2, 3$) désigne les invariants de \mathcal{D} analogues aux S_i soit:

$$E_1 = \mathcal{D}_{ii}, \quad \bar{E}_2^2 = \bar{\mathcal{D}}_{ij} \bar{\mathcal{D}}_{ij}, \quad \bar{E}_3^3 = \bar{\mathcal{D}}_{ij} \bar{\mathcal{D}}_{jk} \bar{\mathcal{D}}_{ki}.$$

D'autre part, si ε ($0 < \varepsilon \ll 1$) et m sont deux constantes caractéristiques du matériau, on utilisera ici:

$$(2.4) \quad \chi(u) = \begin{cases} K \left[\exp\left(-\frac{u}{m}\right) - \varepsilon \right] & \text{si } 0 < t \leq -m \log \varepsilon, \\ 0 & \text{si } t > -m \log \varepsilon, \end{cases}$$

où $K 1/(1-\varepsilon)$.

Avec (2.1) à (2.3) et après dérivation sous le signe somme la loi (1.5), décomposée en partie isotrope et déviatoire s'écrit:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \frac{d\sigma_{ii}}{dt} &= [3\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 S_1 + (1+A)\chi(0)(3M_0 + M_1)_t] E_1(t) + [3\alpha_3 + \alpha_4 S_1] \bar{M}(t) \\ &\quad + (3\alpha_5 + \alpha_6 S_1) \bar{N}(t) + \int_a^t \chi'(t-\tau) (3M_0 + M_1)_\tau E_1(\tau) d\tau \\ \frac{d\bar{\sigma}_{ij}}{dt} &= [\alpha_1 + (1+A)\chi(0) M_1(t)] \bar{\mathcal{D}}_{ij}(t) + [\alpha_2 E_1 + \alpha_4 \bar{M} + \alpha_6 \bar{N}] \bar{\sigma}_{ij}(t) \\ &\quad + \int_a^t \chi'(t-\tau) M_1(\tau) \bar{\mathcal{D}}_{ij}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Rappelons que le scalaire A est fonction de S_i, I_i, E_i , que les scalaires α_i sont fonctions des invariants S_i et I_i de contrainte et de déformation et que M_0, M_1 sont des fonctions des invariants E_i de la vitesse de déformation.

La loi (2.5) est du genre viscoélastoplastique. Elle décrit des évolutions essentiellement irréversibles. Les produits de convolution mettent en jeu la même fonction de relaxation. Les tenseurs physiquement significatifs ne sont pas décomposés en sommes ou produits.

3. Comportement critique et vitesse caractéristique

Grâce aux hypothèses secondaires qui viennent d'être envisagées, nous illustrons ici l'analyse qui conduit aux conditions (1.6) et (1.7) relatives à des écoulements pour lesquels \mathcal{D} tend vers une limite non nulle.

a) Supposons d'abord que les fonctions M_0 et M_1 soient constantes dans un voisinage de l'origine de l'espace des E_i . Ceci implique que la vitesse de déformation est petite relativement à une vitesse de déformation caractéristique notée V . Alors si \mathcal{D} tend vers une constante au bout d'un temps fini, l'inversion de (2.5) (et donc l'existence de l'état critique au sens de Sawczuk-Stutz) peut être étudiée à partir du système linéaire en E_1, \bar{M}, \bar{N} tiré de (2.5):

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \dot{S}_1 &= [3\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 S_1 + A\chi(0)(3M_0 + M_1)]E_1 + (3\alpha_3 + \alpha_4 S_1)\bar{M} + (3\alpha_5 + \alpha_6 S_1)\bar{N}, \\ \frac{1}{2}\dot{S}_2^2 &= \alpha_2 \bar{S}_2^2 E_1 + [\alpha_1 + \alpha_4 \bar{S}_2^2 + A\chi(0)M_1]\bar{M} + \alpha_6 \bar{S}_2^2 \bar{N}, \\ \frac{1}{3}\dot{S}_3^3 &= \alpha_2 \bar{S}_3^3 E_1 + \alpha_4 \bar{S}_3^3 \bar{M} + [\alpha_1 + \alpha_6 \bar{S}_3^3 + A\chi(0)M_1]\bar{N}. \end{aligned}$$

Ce système est analogue à celui envisagé en élastoplasticité mais α_0 et α_1 sont remplacés par:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_0 &= \alpha_0 + A\chi(0)M_0, \\ \bar{\alpha}_1 &= \alpha_1 + A\chi(0)M_1. \end{aligned}$$

Si les fonctions α et A sont stationnaires pour de grandes déformations (telles que I_1 et I_2 tendent vers $l' \infty$) alors I_3 demeure seul en jeu et remplace la masse spécifique ρ (envisagée en [2], [3] et [4] par exemple).

Schématiquement on peut dire^(*) que la loi (2.5) permet l'existence d'un état critique au sens de Sawczuk-Stutz pour des vitesses de déformation assez faibles relativement à un domaine de vitesse caractéristique V .

Pour de grandes déformations obtenues lentement et au bout d'un temps assez long le comportement est à la limite élastoplastique critique au sens ci-dessus.

b) Supprimons l'hypothèse concernant M_0 et M_1 . Considérons la deuxième équation de (3.1) et allégeons les calculs en supposant A constant et en prenant:

$$(3.2) \quad \frac{d\bar{\sigma}_{ij}}{dt} = [\alpha + (1+A)\mu M]\bar{\mathcal{D}}_{ij} - \frac{\alpha}{Y^2}\bar{\sigma}_{ij}\bar{M} - \frac{K\mu}{m} \int_a^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{m}\right) M(\tau)\bar{\mathcal{D}}_{ij}(\tau) d\tau.$$

(*) Sous les hypothèses faites au sujet de la partie visqueuse de la loi (soit (2.4) d'une part et la constance de M_0 et M_1 d'autre part).

Dans cette équation on a posé: $\alpha_4 = -\alpha_1/Y^2$, $\alpha_1 = \alpha$, $M_1 = \mu M(\bar{E}_2^2/V^2)$ et l'on a employé (2.4). Les 7 constantes phénoménologiques du corps sont α , A , Y , μ , V , m , t_c et les paramètres entrant dans la définition de la fonction adimensionnelle M .

Le produit contracté de (3.2) par $\bar{\sigma}_{ij}$ donne:

$$\frac{1}{2} \dot{\bar{S}}_2^2 = [\alpha(1 - \bar{S}_2^2/Y^2) + (1 + A)\mu M(\bar{E}_2^2/V^2)] \bar{M} - \frac{K\mu}{m} \bar{\sigma}_{ij}(t) \int_a^t \left(-\frac{t-\tau}{m} \right) \exp M(\tau) \bar{\mathcal{D}}_{ij}(\tau) d\tau.$$

Intéressons nous à un écoulement dont la vitesse tend vers une limite sous un état de contrainte constant et pour $t > t_c$. Ceci est possible (avec \bar{M} non nul) si:

$$(3.3) \quad \alpha \left(1 - \frac{\bar{S}_2^2}{Y^2} \right) + A\mu M \left(\frac{\bar{E}_2^2}{V^2} \right) = 0.$$

Un déviateur constant, supérieur au déviateur critique, provoque un fluage à vitesse de déformation bien déterminée, de déviateur proportionnel à la vitesse caractéristique. Si M est non décroissant sur l'axe positif, \bar{E}_2 est d'autant plus grand que \bar{S}_2 est au-delà du critère Y et que l'effet visqueux relatif $A\mu/\alpha$ est plus faible. Nous retrouverons ce résultat (cf. (4.9)).

4. Schema unidimensionnel simple

a) On considère la partie déviatoire de la loi (2.5) et l'on pose:

$$(4.1) \quad \alpha_1 - \alpha = \alpha_2 = \alpha_6 = \alpha_4 + \alpha_1/Y^2(\gamma) = 0,$$

où α est une constante caractéristique du matériau et Y une fonction de la déformation γ dont la vitesse est:

$$(4.2) \quad \frac{d\gamma}{dt} = \mathcal{D}.$$

Ici:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \bar{M} &= \sigma \mathcal{D}, \\ \bar{E}_2^2 &= \mathcal{D}^2. \end{aligned}$$

Choisissons pour $M_1(E_i)$ une fonction paire, positive non décroissante:

$$(4.4) \quad M_1 = \mu M(\mathcal{D}^2/V^2),$$

où V est une vitesse de déformation caractéristique du matériau et μ une constante.

Définissons χ par (2.4) soit:

$$(4.5) \quad \chi(u) = \begin{cases} K[\exp(-u/m) - \varepsilon] & \text{si } 0 < t \leq t_c, \\ 0 & \text{si } t > t_c, \end{cases} \quad t_c = -m \log \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad m > 0,$$

$$1 - \varepsilon = 1/K$$

où ε et m sont des constantes du matériau.

De (2.5), avec (4.1) et (4.3) à (4.5) on obtient l'équation intégrodifférentielle:

(4.6)

$$\frac{d\sigma}{dt} = \left\{ \alpha \left[1 - \frac{\sigma^2}{Y^2}(\gamma) \right] + (1+A)\mu M \left(\frac{\mathcal{D}^2}{V^2} \right) \right\} \mathcal{D} - (K\mu/m) \int_a^t \exp \left(-\frac{t-\tau}{m} \right) M(\tau) \mathcal{D}(\tau) d\tau.$$

Cette loi comporte 6 constantes A , α , μ , V , t_c , m et 2 fonctions Y et M .

Les conditions initiales envisagées ici sont:

$$(4.7) \quad \sigma(0) = \gamma(0) = \left. \frac{d\sigma}{dt} \right|_0 = \mathcal{D}(0_+) = 0.$$

Remarquons immédiatement que si Y est constant et si les effets viscoélastiques disparaissent on retrouve le modèle de Prager: $\sigma = Y\text{th}(\alpha\gamma/Y)$

b) Etudions la première sollicitation à vitesse de déformation \mathcal{D}_0 (positive imposée).

Si Y est constant on a, avec (4.2) et (4.6):

$$(4.8) \quad \frac{d\sigma}{d\gamma} = \alpha \left(1 - \frac{\sigma^2}{Y^2} \right) + \mu M \left(\frac{\mathcal{D}_0^2}{V^2} \right) \cdot (A + \lambda); \quad \lambda = \begin{cases} K(e^{-t/m} - \varepsilon) & \text{si } t \leq t_c, \\ 0 & \text{si } t > t_c. \end{cases}$$

On note d'abord immédiatement qu'au début de l'évolution ($t \ll t_c$) et pour Y variant peu, la pente à l'origine de la courbe de charge varie avec \mathcal{D}_0 entre $\alpha + (1+A)\mu M(0)$ et $\alpha + (1+A)\mu M(\infty)$.

Inversement lors d'une évolution à: $t \gg t_c$, la valeur limite de σ doit être, compte tenu de (4.8):

$$(4.9) \quad Z_{\mathcal{D}_0} = Y \left[1 + A \frac{\mu}{\alpha} M \left(\frac{\mathcal{D}_0^2}{V^2} \right) \right]^{1/2} (> Y).$$

A $t < t_c$, il est aussi possible d'avoir σ stationnaire à une valeur S telle que:

$$1 - \frac{S^2}{Y^2} + [A + K(e^{-\frac{t}{m}} - \varepsilon)] \frac{\mu}{\alpha} M \left(\frac{\mathcal{D}_0^2}{V^2} \right) = 0.$$

En effet, compte tenu de ce que: $\exp(-t/m) > \exp(-t_c/m) = \varepsilon$ si: $t < t_c$, on a, compte tenu de (4.9):

$$(4.10) \quad S > Z_{\mathcal{D}_0} > Y.$$

Notons γ_π la déformation associée au maximum S de σ . Comme:

$$\exp(-t/m) = \exp \left(-\frac{t\mathcal{D}_0}{V t_c} \frac{V}{\mathcal{D}_0} \frac{t_c}{m} \right) = \varepsilon^{\frac{\gamma_\pi V}{\gamma_c \mathcal{D}_0}}$$

on a:

$$(4.11) \quad S = Y \left[1 + \frac{\mu}{\alpha} M \left[A + K \left(\varepsilon^{\frac{\gamma_\pi V}{\gamma_c \mathcal{D}_0}} - \varepsilon \right) \right] \right]^{1/2}.$$

Toujours pour Y constant on peut alors schématiser graphiquement les résultats obtenus (cf. fig. 1).

c) En vue d'examiner le cas des sollicitations à vitesse de déformations constantes par morceaux il est nécessaire de définir les effets de mémoire relatifs à la partie élastoplastique de la loi de comportement (cf. fig. 2).

Considérons le cas d'un écrouissage linéaire. Nous remplaçons dans (4.8) le terme σ par $\dot{\sigma} = \sigma - \sigma_a$ et le terme Y par \dot{Y} nouvelle distance à l'état critique vers lequel tend virtuellement une évolution élastoplastique.

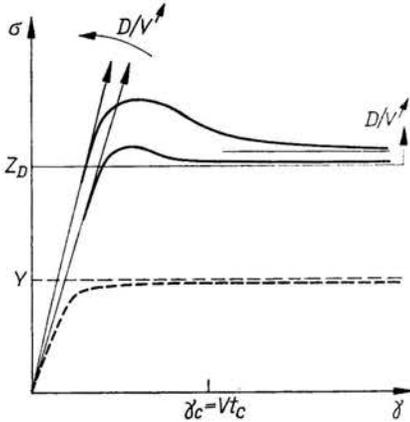


FIG. 1.

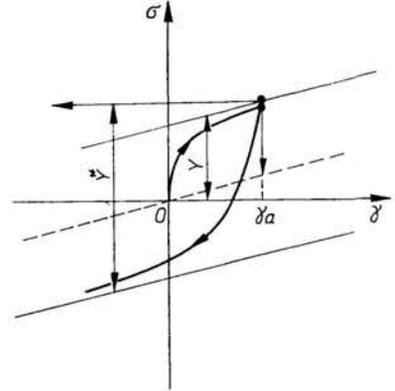


FIG. 2.

d) Dans la suite, pour étudier le fluage simple nous réduisons (4.6) à une équation différentielle à retard, sous la forme:

$$(4.12) \quad \ddot{\sigma} + \dot{\sigma} \left[\frac{1}{m} + 2 \frac{\alpha}{Y^2} \sigma \mathcal{D} \right] + \sigma \left[\frac{1}{m} \frac{\alpha}{Y^2} \sigma \mathcal{D} \right] \\ = R + \dot{\mathcal{D}} \left[\alpha \left(1 - \frac{\sigma^2}{Y^2} \right) + (1+A) \mu \left(M + 2 \frac{\mathcal{D}^2}{Y^2} M' \right) \right] + \mathcal{D} \frac{\alpha}{m} \left[1 + \frac{\mu}{\alpha} M(1+A-K) \right],$$

où R n'est nul que si: $t \leq t_c$, et vaut dans le cas contraire:

$$(4.13) \quad R = \frac{1}{m} \varepsilon K \mu M (t - t_c) \mathcal{D}(t - t_c).$$

L'équation du fluage simple est obtenue en réduisant le premier membre de (4.12) à son dernier terme, soit:

$$(4.14) \quad \dot{\mathcal{D}} \left[1 - \frac{\sigma_0^2}{Y^2} + (1+A) \frac{\mu}{\alpha} \left(M + 2 \frac{\mathcal{D}^2}{Y^2} M' \right) \right] \\ + \frac{1}{m} \left[1 - \frac{\sigma_0^2}{Y^2} + (1+A-K) \frac{\mu}{\alpha} M \right] \mathcal{D} + \frac{1}{\alpha} R = 0$$

équation où σ_0 désigne la contrainte imposée.

Il est possible de retrouver le résultat du b) précédent grâce à cette équation. Supposons Y constant et examinons les conditions d'existence d'un fluage indéfini tel que $\mathcal{D}(t)$ tend vers une limite non nulle. Pour $t > t_c$ l'équation n'est plus à retard et devient:

$$\dot{\mathcal{D}}/\mathcal{D} = -\frac{1}{m} \left[1 - \frac{\sigma_0^2}{Y^2} + A \frac{\mu}{\alpha} M \right] / \left[1 - \frac{\sigma_0^2}{Y^2} + (1+A) \frac{\mu}{\alpha} \left(M + 2 \frac{\mathcal{D}^2}{Y^2} M' \right) \right].$$

On retrouve bien (4.9) (ou le résultat analogue (3.3)).

5. Quelques resultats numeriques

a) Nous avons examiné quelques solutions de (4.6) pour des essais à \mathcal{D} constant par morceaux ou pour des essais à σ constant au bout d'un temps fini.

Ces solutions ont toutes été obtenues en se plaçant dans le cas où A est constant et ε petit devant l'unité.

Les fonctions $M(\mathcal{D}^2/v^2)$ employées ont été: $1+x^2$ et $1-\exp(-x^2)$. Ici nous nous bornons à illustrer l'exposé avec des essais employant la seconde définition.

Les fonctions servant à définir l'écroutissage ont l'une des trois définitions suivantes:

$$\text{I) } Y = Y_0 \quad (\text{pas d'écroutissage}),$$

$$\text{II) } Y = cY_0 \pm h(\gamma - \gamma_a)$$

formule, à 2 paramètres Y_0 et h , où c vaut 1 lors de la charge initiale et 2 ultérieurement. Le signe positif est employé lors des évolutions à $\mathcal{D} > 0$. L'écroutissage envisagé ici est linéaire

$$\text{III) } Y = cY_0 \pm [h(\gamma) - h(\gamma_a)]$$

formule où: $h = \sigma_e(\gamma/\gamma_e)^{n_e}$, avec en pratique ici: $\sigma_e = 2Y_0$, $\gamma_e = 0.1$ et $n_e = 3$. L'écroutissage est qualifié de non linéaire.

L'écroutissage nécessite donc l'introduction de 1, 2 ou 4 paramètres. La loi est alors à 7, 8 ou 11 paramètres.

Pour les calculs d'essais de fluage on utilise une mise en charge de la forme:

$$\sigma = \sigma_1 [1 - \exp(-t^2/t_1^2)].$$

Les intégrations sont effectuées par une méthode du genre Runge-Kutta sur les équations (4.8) (\mathcal{D} imposé) et (4.12) (fluage). Dans ce dernier cas, le terme R défini par (4.13) est estimé par interpolation à partir des valeurs antérieures de \mathcal{D} .

Le pas d'intégration est modifié automatiquement de façon à maintenir l'erreur relative de troncature au-dessous d'une valeur fixée (ici 10^{-4}).

b) Les résultats obtenus pour des essais à \mathcal{D} imposé sont illustrés ci-dessous (cf. fig. 3 à 6). On a toujours: $\varepsilon = 10^{-2}$, $\alpha = 10^3$, $H = 10$, $Y_0 = 2.8$. Deux essais indiquent les allures typiques d'essais à \mathcal{D} imposé. Ils correspondent à: $A\mu/\alpha = 10$, $\gamma_c = 0.23$ et à: $A\mu/\alpha = 0.1$, $\gamma_c = 2.310^{-3}$ (cf. respectivement fig. 3 et 4). Le premier évoque les résultats expérimentaux relatifs aux aciers doux, le second évoque ceux relatifs aux aciers inox sous sollicitations très rapides (cf. [7]) ou encore ceux relatifs aux monocristaux de LiF (cf. [8]) (ou de Al_2O_3 à haute température (cf. [9])).

Les paramètres du deuxième essai évoqué ci-dessus sont employés pour décrire des cycles d'hystérésis avec écroutissage linéaire ou non linéaire (cf. fig. 5 et 6). La valeur de \mathcal{D} imposée est faible ($\mathcal{D}/V = 10^{-2}$).

c) Enfin on emploie à nouveau ces paramètres(*) pour effectuer des essais de fluage sous les contraintes suivantes: 2.7, 4, 5, 5.6, 6 et 8 kg/mm² (cf. fig. 7).

Divers calculs ont mis en évidence la dépendance du fluage vis à vis des conditions de mise en charge. Les courbes tracées ici correspondent à: $t_1 = t_c/5$.

(*) $\alpha = 1000$ kg/mm², $A = 0.01$, $Y_0 = 2.8$ kg/mm², $H = 10$, $\mu = 10\alpha$, $V = 10^{-2}$ s⁻¹, $m = 5.10^{-2}$ s, $\varepsilon = 10^{-2}$.

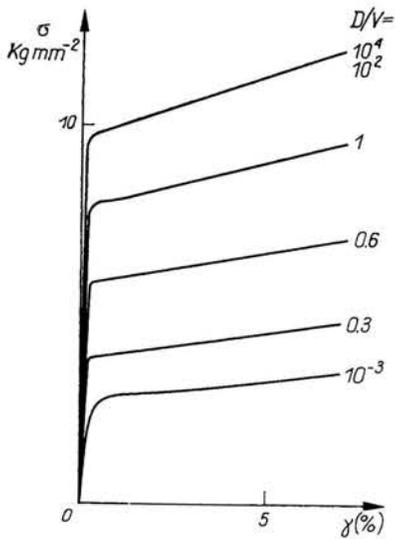


FIG. 3.

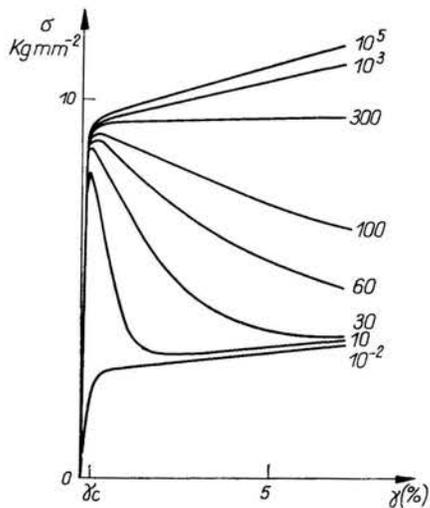


FIG. 4.

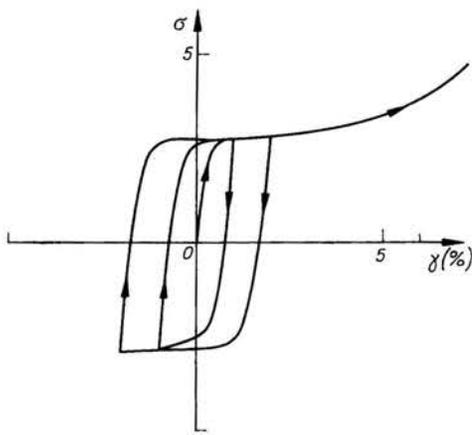


FIG. 5.

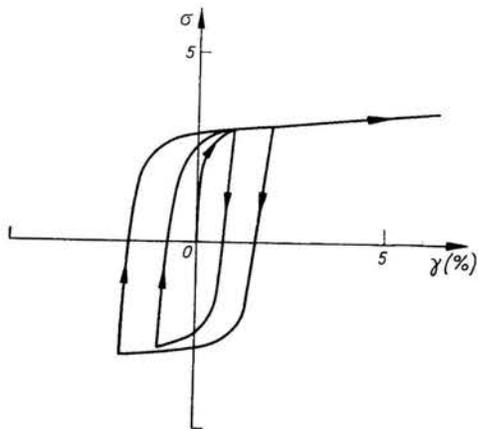


FIG. 6.

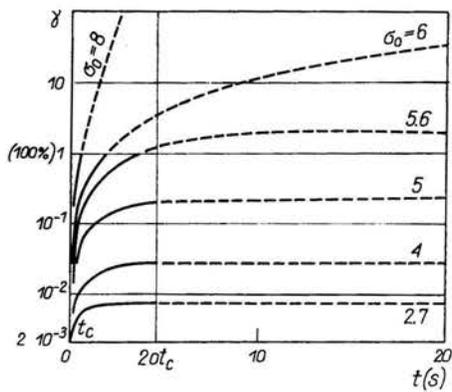


FIG. 7.

Dans la zone: $t < 20t_c$, on note que les déformations sont de l'ordre de celles souvent rencontrées en pratique. Pour: $\sigma_0 < Y_0$ le fluage est limité au bout d'un temps inférieur à $10t_c$ environ. Le fluage sous: $\sigma_0 = 6$ ou 8 kg/mm^2 paraît nettement indéfini. Le calcul montre qu'il l'est effectivement. En revanche l'examen du fluage sous $\sigma_0 = 5 \text{ kg/mm}^2$, toujours pour $t < 20t_c$ ou $\gamma < 20\%$, n'est pas nettement limité ou indéfini. La poursuite du calcul conduit à un fluage limité. Pour σ_0 compris entre 5 et 6 kg/mm^2 l'examen de la seule zone $t < 20t_c$ ne permet pas non plus de conclure et il faut atteindre des déformations très élevées ($\gamma > 100\%$) pour obtenir des valeurs numériques de \mathcal{D} tendant vers zéro ou croissantes. (Il n'a pas été possible d'obtenir numériquement une limite finie non nulle de \mathcal{D}).

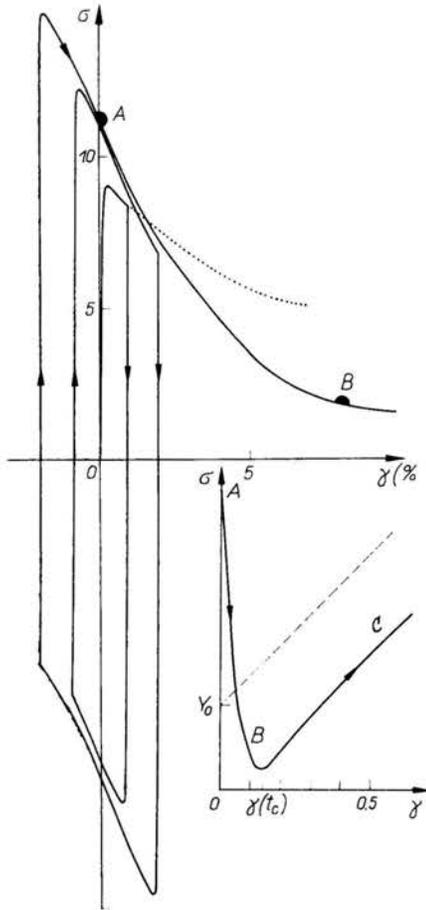


FIG. 8.

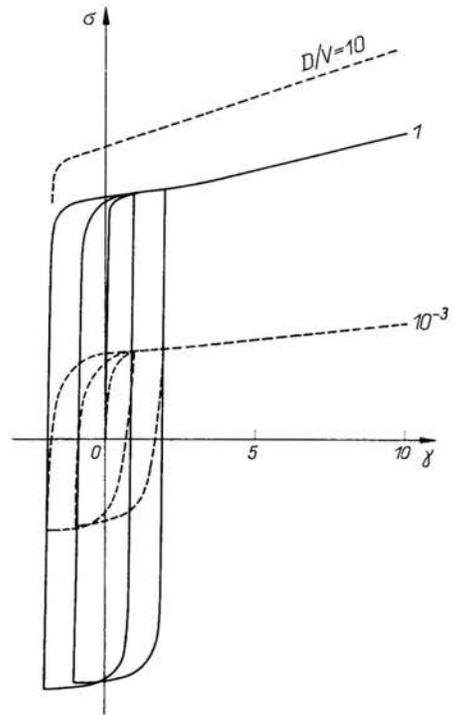


FIG. 9.

d) La complexité de la loi associée aux hypothèses fondamentales 1 à 4 est illustrée par l'examen des cycles d'hystérésis décrits à des vitesses de déformation de l'ordre de V . L'étude de l'analogie de (4.8) permet d'observer des effets visqueux provoquant des pics successifs en contrainte et une dissymétrie de l'ensemble du graphe (cf. fig. 8 tracée pour:

$\mathcal{D} = 0.6$ avec les paramètres du deuxième essai). L'exemple montré ici a été choisi pour une caractéristique particulièrement marquée de l'arc ABC du graphe. Le minimum inférieur de l'écroutissage existe aussi si cet écroutissage est non linéaire. A des valeurs de \mathcal{D}/V assez petites ou grandes un tel comportement disparaît.

Les résultats obtenus avec les paramètres du premier essai ont un aspect moins inhabituel (cf. fig. 9).

Conclusions

De nombreux travaux numériques sont encore nécessaires à l'étude complète des propriétés du modèle unidimensionnel dans les essais en vitesse de déformation imposée et surtout dans les essais de fluage simple (état critique en particulier), d'hésitation au fluage, de radoucissement, de propagation d'ondes.

Les résultats présentés ici semblent inciter à entreprendre de tels développements qui devraient être complétés par l'étude des dissipations mises en jeu^(*).

L'intérêt physique du passage à l'étude de la loi tensorielle dépend essentiellement d'une bonne conception de la mémoire élastoplastique. Un traitement convenable de ce problème permettrait des extensions au cas où les propriétés mécaniques peuvent dépendre de paramètres physiquement significatifs.

References

1. P. GUELIN, P. LE ROY, J. M. PIERRARD, *Sur la détermination et l'utilisation de certaines lois de comportement de matériaux à mémoire*, Symposium franco-polonais, Problèmes de la Rhéologie, Varsovie, 1971, 145-159.
2. A. SAWCZUK, P. STUTZ, *On formulation of stress-strain relations for soils at failure*, Z. Angew. Math. Phys., **19**, 770-778, 1968.
3. P. STUTZ, *Comportement élastoplastique des milieux pulvérulents*, Mémorial de l'Artillerie Française, **47**, 2, 1973.
4. P. GUELIN, P. STUTZ, *Comportement élastoplastique de milieux cohérents*, Colloque Franco-polonais de Nice, 1974, en cours de publication (aux IPPT de la PAN).
5. A. A. ILYUSHIN, *Prikl. Mat. Mekh.*, **18**, 641-666, 1954.
6. P. ANGLES d'AURIAC, *Définitions et principes en rhéologie tensorielle*, IUTAM, Grenoble 1964, Springer Verlag 1966.
7. R. BOTTE et coauteurs, *Mémoires sc. Rev. Métallurg.*, **67**, 543-551, 1970.
8. W. G. JOHNSTON, *J. Appl. Phys.*, **33**, 2716, 1962.
9. J. J. GILMAN, *Micromechanics of flow in solids*, Mc Graw Hill, 1969, 210.

INSTITUT DE MECANIQUE DE GRENOBLE.

Received October 4, 1974.

(*) Notons que la loi présentée semble fournir des comportements asymptotiques conformes aux conceptions classiques: ce point est en accord avec à l'un des plus importants résultats dégagé par certains travaux contemporains.