31.

DEMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE M. CHASLES.

[From the *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (Liouville), tome x. (1845), pp. 383—384.]

"Soient P, P' des points correspondants de deux figures homographiques; si la droite PP' passe toujours par un point fixe O, les points P sont situés sur une courbe du troisième degré, qui passe par ce même point."

Soient $\frac{x}{w}$, $\frac{y}{w}$, $\frac{z}{w}$ les coordonnées de P; $\frac{x'}{w'}$, $\frac{y'}{w'}$, $\frac{z'}{w'}$, celles de P'. En supposant que x', y', z', w' sont des fonctions linéaires (sans terme constant) de x, y, z, w, les deux figures seront homographiques.

Soient, de même, $\frac{\alpha}{\delta}$, $\frac{\beta}{\delta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ les coordonnées de O; $\frac{\lambda}{\varpi}$, $\frac{\mu}{\varpi}$, $\frac{\nu}{\varpi}$ les coordonnées d'un point quelconque T.

Puisque P, P', O sont sur la même droite, on peut faire passer un plan par les quatre points P, P', O, T. Cela donne tout de suite l'équation

$$\left\{\begin{matrix} \lambda, & \mu, & \nu, & \varpi \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta \\ x, & y, & z, & w \\ x', & y', & z', & w' \end{matrix}\right\} = 0$$

(en representant de cette manière le déterminant formé avec les quantités λ, μ, ν, &c.), équation qui doit être satisfaite quels que soient λ, μ, ν, ϖ, et qui équivaut ainsi aux deux conditions

$$\left\{\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ x, & y, & z \\ x', & y', & z' \end{matrix}\right\} = 0, \qquad \left\{\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \delta \\ x, & y, & w \\ x', & y', & w' \end{matrix}\right\} = 0.$$

Ces deux dernières équations sont du second degré par rapport aux quantités $\frac{x}{w}$, $\frac{y}{w}$, $\frac{z}{w}$. Le point P est donc situé à l'intersection de deux surfaces du second ordre. Mais ces surfaces ont en commun la droite représentée par les équations

$$\alpha y - \beta x = 0, \quad \alpha x' - \beta y' = 0.$$

Donc elles se coupent de plus suivant une courbe du troisième degré qui passe évidemment par le point O, parce qu'on satisfait aux équations en écrivant

$$x : \alpha = y : \beta = z : \gamma = w : \delta.$$

www.rcin.org.pl