63.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE M. BOOLE CONCERNANT DES INTÉGRALES MULTIPLES.

[From the *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (Liouville), tom. XIII. (1848), pp. 245—248.]

THÉORÈME. "Soient P, Q des fonctions de n variables $x, y, \ldots$; lesquelles fonctions satisfont à la condition

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots dxdy \ldots e^{-(Pv+Qw)\,i} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n} e^{-\frac{1}{4}n\pi i}\, e^{-G(v,\,w)\,i}}{\sqrt{H(v,\, w)}} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

où, comme à l'ordinaire, $i = \sqrt{-1}$; $G(v,\ w)$, $H(v,\ w)$ sont des fonctions homogènes de v, w des ordres 1 et n respectivement (on verra, dans la suite, qu'il y a plusieurs fonctions P, Q qui satisfont à une équation de cette forme).

Cela étant, posons

$$V = \int \ldots dxdy \ldots \frac{f(P)}{Q^{\frac{1}{2}n+q}} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

les limites de l'intégration étant données par la condition $P = 1$; et soient

$$G\left(1, \frac{1}{s}\right) = \sigma, \quad H\left(1, \frac{1}{s}\right) = s^{-n}\phi \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

On aura pour l'intégrale V cette formule,

$$V = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n + q\right)} \int_0^{\infty} \frac{S s^{-q-1}\, ds}{\sqrt{\phi}} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

dans laquelle

$$S = \frac{(1-\sigma)^{-q}}{\Gamma(-q)} \int_0^1 t^{-q-1} f[\sigma + t(1-\sigma)]\, dt \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)."$$

Ce théorème remarquable est dû à M. Boole, qui me l'a communiqué sous une forme un peu différente[1], en me priant d'y suppléer la démonstration et d'en faire part aux géomètres; il ne m'a fallu, pour le prouver, que modifier un peu le procédé dont s'est servi M. Boole même, dans son Mémoire: "On a certain Multiple Definite Integral," *Irish Transactions*, t. XXI. [1848].

Je vais donc reproduire cette démonstration en l'appliquant au problème dont il s'agit.

On démontre par une analyse semblable à peu près à celle par laquelle se démontre le théorème de Fourier, que l'expression

$$\frac{1}{\pi\Gamma\left(\frac{1}{2}n+q\right)}\int_0^1 d\alpha\int_0^\infty dv\int_0^\infty dw\, e^{[(\alpha-P)v-Qw+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}n+q)\pi]\,i}\ldots w^{\frac{1}{2}n+q-1}f\alpha \ldots\ldots\ldots (6),$$

se réduit (en n'y faisant attention qu'à la partie réelle) à $\dfrac{fP}{Q^{\frac{1}{2}n+q}}$ ou à zéro, selon que la quantité P se trouve ou ne se trouve pas comprise entre les limites 0, 1. Donc, en substituant cette intégrale triple dans l'expression de V, on peut étendre depuis $-\infty$ jusqu'à ∞ les intégrations par rapport aux variables $x, y, \ldots$; de cette manière, et en réduisant par l'équation (1), on obtient tout de suite

$$V=\frac{\pi^{\frac{1}{2}n-1}e^{\frac{1}{2}q\pi i}}{\Gamma(\frac{1}{2}n+q)}\int_0^1 d\alpha\int_0^\infty dv\int_0^\infty dw\,\frac{e^{[\alpha v-G(v,\,w)]i}\ldots w^{\frac{1}{2}n+q-1}}{\sqrt{H(v,\,w)}}f\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7).$$

Donc, en écrivant

$$w=\frac{v}{s},\qquad dw=-\frac{vds}{s^2}$$

(ce qui donne, par les équations (3),

$$G(v,\ w)=v\sigma,\quad H(v,\ w)=v^n s^{-n}\phi),$$

les limites par rapport à la nouvelle variable s seront ∞, 0, et l'on obtiendra, en changeant l'ordre des intégrations,

$$V=\frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(\frac{1}{2}n+q)}\int_0^\infty\frac{ds\,Ss^{-q-1}}{\sqrt{\phi}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (8),$$

dans laquelle expression

$$S=\frac{1}{\pi}e^{\frac{1}{2}q\pi i}\int_0^1 d\alpha\int_0^\infty dv\,v^q\,e^{(\alpha-\sigma)vi}f\alpha\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9);$$

[1] M. Boole écrit

$$S=\left(-\frac{d}{d\sigma}\right)^q f\sigma,$$

expression à la vérité plus simple, mais qui donne lieu, ce me semble, à quelques difficultés.

et il ne s'agit plus que de faire voir l'identité de cette valeur avec celle qui est donnée par l'équation (5). Pour cela, je remarque que l'on aura

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty dv\, v^q\, e^{(\alpha-\sigma)\, vi} &= \Gamma(q+1)\, e^{\frac{1}{2}(q+1)\pi i}\ (\alpha-\sigma)^{-q-1},\\ \text{ou}\qquad &= \Gamma(q+1)\, e^{-\frac{1}{2}(q+1)\pi i}\,(\sigma-\alpha)^{-q-1},\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ (10),$$

selon que $(\alpha-\sigma)$ est positif ou négatif; les valeurs correspondantes de $\dfrac{1}{\pi} e^{\frac{1}{2}q\pi i}\displaystyle\int_0^\infty dv\, v^q\, e^{(\alpha-\sigma)vi}$ sont

$$\frac{1}{\pi} e^{(q+\frac{1}{2})\pi i}\,\Gamma(q+1)(\alpha-\sigma)^{-q-1} \text{ et } \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}\pi i}\,\Gamma(q+1)(\sigma-\alpha)^{-q-1}\ldots\ldots\ (11);$$

or, en ne faisant attention qu'aux parties réelles, et en réduisant par une propriété connue des fonctions Γ, ces valeurs se réduisent à $\dfrac{1}{\Gamma(-q)}(\alpha-\sigma)^{-q-1}$ et zéro respectivement; d'après cela, l'équation (9) se réduit à

$$S=\frac{1}{\Gamma(-q)}\int_\sigma^1 (\alpha-\sigma)^{-q-1} f\alpha\, d\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (12),$$

et enfin, en écrivant

$$\alpha=\sigma+t\,(1-\sigma),\quad d\alpha=(1-\sigma)\,dt,$$

on obtient pour S la valeur donnée par l'équation (5), de manière que la formule dont il s'agit se trouve complétement démontrée.

Il paraît difficile de trouver les formes générales de P, Q {rien n'étant, je crois, connu sur la solution des équations telles que l'équation (1)}; mais des formes particulières se présentent assez facilement. Ainsi, en ne considérant que les exemples que m'a donnés M. Boole (lesquels j'ai depuis vérifiés), soit

$$P=2\,(lx+my+\ldots),\quad Q=v^2+x^2+y^2+\ldots\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (13).$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (1), les intégrations s'effectuent sans difficulté et sous la forme nécessaire, et l'on obtient

$$G(v,\ w)=wv^2-\frac{(l^2+m^2+\ldots)\,v^2}{w},\quad H(v,\ w)=w^n,$$

ou enfin

$$\sigma=\frac{v^2}{s}-(l^2+m^2+\ldots)\,s,\quad \phi=1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (14).$$

Soit encore (ce qui comprend, comme cas particulier, le problème des attractions)

$$P=\frac{x^2}{f^2}+\frac{y^2}{g^2}+\ldots,\quad Q=v^2+(a-x)^2+(b-y)^2+\ldots\quad \ldots\ldots\ldots\ (15);$$

on obtient sans plus de difficulté

$$\phi = \frac{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}{f^2g^2}, \quad \sigma = \frac{v}{s} + \frac{a^2}{f^2+s} + \frac{b^2}{g^2+s}\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16).$$

Soit encore, pour dernier exemple,

$$P = l^2x^2 + \frac{L^2}{x^2} + \ldots, \quad Q = v^2 + \lambda^2x^2 + \frac{\Lambda^2}{x^2} + \ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17);$$

on aura, pour ce cas,

$$\left.\begin{aligned} \phi &= (l^2s+\lambda^2)(L^2s+\Lambda^2)\ldots, \\ \sigma &= \frac{1}{s}\left\{v^2 + 2\sqrt{(l^2s+\lambda^2)(L^2s+\Lambda^2)} + \ldots\right\} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18);$$

les formules qui se rapportent à cet exemple aussi bien qu'au premier sont, je crois, entièrement nouvelles.