3.

NOTE SUR LE THÉORÈME DE LEGENDRE CITÉ DANS UNE NOTE INSÉRÉE DANS LES *COMPTES RENDUS*.

[*Comptes Rendus*, XCVI. (1883), pp. 463—465.]

Le théorème de Legendre, cité par MM. de Jonquières et Lipschitz, est une conséquence immédiate d'un théorème logique bien connu, lequel, *mis sous forme sensible*, équivaut à dire que, si A, B, C, ... sont des corps avec la faculté de s'entrecouper, contenus dans un vase d'eau, et si a, ab, abc, ... représentent symboliquement les volumes de A, de la partie commune à A et à B, de la partie commune à A, B, C, ..., alors le volume du liquide déplacé par la totalité des corps sera

$$\Sigma a - \Sigma ab + \Sigma abc - \ldots.$$

Conséquemment, ce théorème admet une généralisation infinie dont je donnerai un seul exemple.

Nommons les nombres premiers qui n'excèdent pas n, nombres premiers subordonnés à n, et distinguons entre eux ceux qui sont plus grands que $\sqrt{n}$ comme supérieurs.

Le théorème de Legendre équivaut à dire que, si p_1, p_2, ..., p_i sont les nombres premiers subordonnés à $\sqrt{n}$, le nombre des nombres premiers subordonnés à n du genre supérieur augmenté de l'unité est égal à

$$n - \Sigma\left(\frac{n}{p_1}\right) + \Sigma\left(\frac{n}{p_1 p_2}\right) - \Sigma\left(\frac{n}{p_1 p_2 p_3}\right) + \ldots.$$

Or, représentons la fonction $\frac{1}{2}x(x+1)$ par Δx; alors on aura le théorème que la *somme* des nombres premiers subordonnés à n du genre supérieur augmenté de l'unité sera égale à

$$\Delta n - \Sigma p_1 \Delta\left(\frac{n}{p_1}\right) + \Sigma p_1 p_2 \Delta\left(\frac{n}{p_1 p_2}\right) - \ldots.$$

Par exemple, si $n = 11$, les nombres premiers subordonnés à 11 du genre supérieur seront 5, 7, 11, et les nombres premiers subordonnés à $\sqrt{n}$ sont 2, 3.

On doit donc trouver, et en effet on trouve

$$(11\,.\,12) - 2\,(5\,.\,6) - 3\,(3\,.\,4) + 6\,(1\,.\,2) = 2\,(1 + 5 + 7 + 11).$$

Je saisis cette occasion pour dire que j'ai fait calculer la valeur de $J(n)$, "somme-totient de n," pour toutes les valeurs entières de n jusqu'à 500, et je trouve que sans aucune exception $J(n)$ est toujours plus grand que $\frac{3}{\pi^2}(n^2)$ et plus petit que $\frac{3}{\pi^2}(n+1)^2$.

Il reste à démontrer que ces limites sont d'application universelle pour un nombre entier quelconque n.

On peut faire une extension illimitée du théorème donné dans le numéro précédent des *Comptes rendus* sur les *sommes-totients*, tout à fait analogue à l'extension ci-dessus donnée au théorème de Legendre sur les nombres premiers. Nommons, par exemple, $u(j)$ la somme de tous les nombres premiers et inférieurs à j, et Uj la somme

$$u(1) + u(2) + \ldots + u(j).$$

On établit facilement* l'identité

$$\sum_{r=\infty}^{r=1} \Delta\left(E\frac{j}{r}\right) u\left(\frac{j}{r}\right) = \tfrac{1}{6}j(j+1)(j+2),$$

où Δx signifie le nombre triangulaire $\frac{1}{2}x(x+1)$, et avec ce théorème, en se servant, comme dans la théorie des sommes-totients, du principe† de la division harmonique et en écrivant

$$Vj = Uj - 2U\frac{j}{2} + 3U\frac{j}{3} - 4U\frac{j}{4} + 5U\frac{j}{5} - \ldots,$$

on en déduit facilement $Vj = \dfrac{j^3}{12} - \dfrac{j}{3}$ quand j est pair,

$$Vj = \frac{(j+1)^3}{12} + \frac{j+1}{6} \text{ quand } j \text{ est impair, etc.}$$

Dans ma Note‡ *Sur le nombre des fractions ordinaires inégales*, etc., j'ai omis de dire que l'équation

$$\sum_r E\frac{j}{r}\,Tr = \frac{j^2+j}{2}$$

peut être écrite sous la forme

$$Jj + J\frac{j}{2} + J\frac{j}{3} + J\frac{j}{4} + \ldots = \frac{j^2+j}{2}. \tag{1}$$

[* With $u(r) = \frac{1}{2}rT(r)$, $u(1) = \frac{1}{2}$, $T(r)$ being the totient of r, we have

$$2\sum_{r=1} \Delta\left(E\frac{i}{r}\right) u(r) = \tfrac{1}{6}i(i+1)(2i+1).]$$

[† Vol. III. of this Reprint, p. 673.] [‡ p. 84 above.]

De même, l'équation

$$\Sigma\Delta E\frac{j}{r}\,u\frac{j}{r}=\frac{j(j+1)(j+2)}{6}$$

équivaut à l'équation *

$$Uj+2U\frac{j}{2}+3U\frac{j}{3}+4U\frac{j}{4}+\ldots=\frac{j(j+1)(j+2)}{6}. \qquad (2)$$

Il est facile de démontrer, avec l'aide des équations (1) et (2), que les valeurs asymptotiques de $\frac{Jj}{j^2}$ et $\frac{Uj}{j^3}$ pour j indéfiniment grand sont $\frac{3}{\pi^2}$ et $\frac{1}{\pi^2}$ respectivement.

Cauchy, MM. Halphen et Lucas ont écrit sur *les suites de Farey*. Il est donc bon de faire remarquer que Jj est le nombre des fractions et Uj la somme des numérateurs des fractions dans une telle suite pour laquelle la limite donnée est j.

[* For $\frac{1}{6}j(j+1)(j+2)$ *read* $\frac{1}{12}j(j+1)(2j+1)$.]