23.

SUR UNE EXTENSION DE LA LOI DE HARRIOT RELATIVE AUX ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

[*Comptes Rendus*, XCVIII. (1884), pp. 1026—1030.]

ON peut envisager la loi de Harriot comme une loi qui affirme la possibilité de décomposer d'une seule manière un polynôme en x dans un produit de facteurs linéaires composés avec les différences entre x et les racines du polynôme. En réfléchissant sur la cause de cette possibilité et la manière de la démontrer, on voit facilement que le même principe doit, avec une certaine modification, s'appliquer à toute équation en matrices d'un ordre quelconque dont les coefficients sont transitifs entre eux-mêmes, c'est-à-dire qui agissent les uns sur les autres exactement comme les quantités de l'Algèbre ordinaire, si chaque coefficient, par exemple, est une fonction rationnelle de la même matrice. On peut nommer les équations dont les coefficients satisfont à cette condition équations *monothétiques:* on remarquera que de telles équations forment une classe spéciale des équations que j'ai nommées *unilatérales* dans une Note précédente.

Pour fixer les idées, prenons comme exemple une équation monothétique du second degré en matrices binaires, laquelle peut toujours être ramenée à la forme

$$x^2 - 2px + Ap + B = 0.$$

En supposant que $p^2 - (\alpha + \beta)p + \alpha\beta = 0$ soit l'*équation identique* de p, on aura

$$x = \frac{p-\beta}{\alpha-\beta}\{\alpha \pm \sqrt{(\alpha^2 - A\alpha - B)}\} + \frac{p-\alpha}{\beta-\alpha}\{\beta \pm \sqrt{(\beta^2 - A\beta - B)}\}.$$

Faisons $\dfrac{p-\beta}{\alpha-\beta}\sqrt{(\alpha^2 - A\alpha - B)} = u,\ \ \dfrac{p-\alpha}{\beta-\alpha}\sqrt{(\beta^2 - A\beta - B)} = v.$

Alors les quatre racines de p seront

$$p+u+v,\quad p-u-v;\quad p+u-v,\quad p-u+v.$$

Disons r_1, r_2, r_3, r_4.

On trouve

$$(p-\beta)^2=(p-\beta)(p-\alpha)+(\alpha-\beta)(p-\beta)=(\alpha-\beta)(p-\beta),$$

et de même $$(p-\alpha)^2=(\beta-\alpha)(p-\alpha),$$

de sorte que

$$u^2+v^2=\frac{p-\beta}{\alpha-\beta}(\alpha^2-A\alpha-B)+\frac{p-\alpha}{\beta-\alpha}(\beta^2-A\beta-B)$$

$$=(\alpha+\beta)p-\alpha\beta-Ap-B=p^2-Ap-B.$$

On a aussi $uv=0$ et conséquemment $(u+v)^2=u^2+v^2=(u-v)^2$. Donc

$$(x-r_1)(x-r_2)=(x-p)^2-(u+v)^2=x^2-2px+Ap+B,$$

$$(x-r_3)(x-r_4)=(x-p)^2-(u-v)^2=x^2-2px+Ap+B.$$

Or considérons le cas général d'une équation monothétique du degré n en matrices de l'ordre ω.

Cette équation (que j'écrirai $fx=0$), en vertu de ce que j'ai nommé la seconde loi de mouvement algébrique (c'est-à-dire la formule

$$\phi m=\Sigma\frac{(m-b)(m-c)\ldots(m-l)}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)}\phi a,$$

où $a, b, c, \ldots, l$ sont les *racines latentes* de la matrice m), aura n^ω racines qu'on peut représenter par les symboles composés

$$r_1,\quad r_2,\quad \ldots,\quad r_\omega,$$

où chaque r parcourt les valeurs 1, 2, 3, ..., n.

En réfléchissant sur la manière de démontrer le principe de Harriot, on arrivera facilement à la conclusion suivante : en prenant une combinaison quelconque de n symboles $r_1, r_2, \ldots, r_\omega$, de telle manière que chaque r parcoure toutes ses n valeurs, $R_1, R_2, \ldots, R_n$, on aura

$$fx=(x-R_1)(x-R_2)\ldots(x-R_n).$$

Ainsi on arrive au théorème suivant :

Toute fonction monothétique rationnelle et entière de x du degré n en matrices de l'ordre ω peut être représentée de $(1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,n)^{\omega-1}$ *manières différentes comme un produit de n facteurs linéaires dont chacun sera la différence entre x et une des racines de la fonction donnée.*

Telle est la loi de Harriot, étendue au cas des quantités multiirrationnelles.

Dans le cas de l'Algèbre ordinaire, $\omega=1$, et le nombre des décompositions de fx en facteurs, selon la formule, devient unique, comme il doit être.

De même, pour les quaternions, le nombre des décompositions d'une fonction monothétique du degré n en facteurs linéaires sera πn. Par exemple, si $n = 3$, les racines de fx peuvent être exprimées par les neuf symboles

$$\begin{matrix} 0.0 & 0.1 & 0.2 \\ 1.0 & 1.1 & 1.2 \\ 2.0 & 2.1 & 2.2 \end{matrix}$$

La fonction (comme on le démontrera facilement) peut être mise sous la forme $x - 0.0$ multipliée par une fonction quadratique dont les racines seront des racines de fx, et conséquemment, par raison de symétrie, seront les quatre racines

$$\begin{matrix} 1.1 & 1.2, \\ 2.1 & 2.2; \end{matrix}$$

donc la fonction quadratique dont j'ai parlé sera égale à

$$(x-1.1)(x-2.2)$$

et à $$(x-1.2)(x-2.1).$$

Ainsi il y aura deux décompositions de fx qui correspondent aux deux diagonales 0.0, 1.1, 2.2; 0.0, 1.2, 2.1, et de même il y aura des décompositions qui répondent aux diagonales 0.1, 1.2, 2.0; 0.1, 1.0, 2.2; 0.2, 1.0, 2.1; 0.2, 1.1, 2.0, de sorte que le nombre total est égal à $1.2.3$.

De même, quand fx est monothétique et matrice du troisième ordre, on peut prendre les diagonales d'un cube. Par exemple, les racines de l'équation monothétique du second degré en matrices du troisième ordre peuvent être représentées par

$$\begin{matrix} 0.0.0 & 0.0.1 & 0.1.0 & 0.1.1 \\ 1.1.1 & 1.1.0 & 1.0.1 & 1.0.0 \end{matrix}$$

et l'on aura les quatre décompositions

$$(x-0.0.0)(x-1.1.1); \quad (x-0.0.1)(x-1.1.0);$$
$$(x-0.1.0)(x-1.0.1); \quad (x-0.1.1)(x-1.0.0);$$

et de même, en général, pour le degré n, le nombre des diagonales (en se servant de ce mot dans le sens analytique, bien entendu) sera

$$(1.2.3\ldots n)^2.$$

C'est ainsi qu'on trouve l'expression générale que j'ai donnée $(\pi n)^{\omega-1}$ pour le nombre des décompositions quand le degré est n et que l'ordre des matrices est ω.

En multipliant ensemble toutes les équations de décomposition, et en nommant v chacune des n^ω racines, on parvient à l'équation

$$\pi(x-v)^{\pi(n-1)^{\omega-1}} = (fx)^{\pi n^{\omega-1}};$$

donc, quoiqu'on ne puisse pas en général conclure que, si $X^j = Y^j$ (X et Y

étant des matrices), X est nécessairement égal à Y, il y a toute raison de croire qu'on pourra démontrer que, dans le cas actuel, on aura

$$\pi(x-v) = (fx)^{n^{\omega-1}}.$$

Ainsi la règle de Harriot se reproduira de nouveau sous la forme très peu modifiée qu'un polynôme (monothétique) en x (élevé à une puissance convenable) est égal au produit des différences entre x et toutes les racines en succession de ce polynôme.

On aura remarqué, dans ce qui précède, qu'en appliquant la seconde des trois lois du mouvement algébrique aux équations monothétiques, on a trouvé que le nombre des racines est n^{ω}, et conséquemment est n^2 dans le cas des quaternions, tandis que le nombre des racines pour la classe des équations en quaternions unilatérales (à laquelle les formes monothétiques appartiennent) est en général n^3-n^2+n (*voir* le numéro d'avril 1884 du *London and Edinburgh Phil. Mag.*), de sorte qu'il y a une élimination $n(n-1)^2$ de racines en passant du cas général au cas particulier.

Il reste à examiner s'il n'est pas possible d'étendre la loi de Harriot aux équations unilatérales polythétiques. C'est ce que je vais étudier, mais sans cela, et en me bornant au cas monothétique, il me semble qu'en attribuant aux éléments des matrices des valeurs entières (simples ou complexes), comme le fait M. le professeur Lipschitz pour les quaternions, on voit s'ouvrir un nouveau champ immense de recherches arithmétiques fondées sur la loi fondamentale de Harriot généralisée de la manière indiquée dans ce qui précède.