# 231.

## NOTE SUR L'ÉQUATION $x^2 - Dy^2 = \pm 4$, $D \equiv 5$ (mod. 8).

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, (Crelle), tom. LIII. (1857), pp. 369—371.]

On sait que pour un déterminant positif $D \equiv 5$ (mod. 8) le nombre des formes quadratiques proprement primitives est égal au nombre des formes improprement primitives, quand il existe une solution en nombres impairs de l'équation $x^2 - Dy^2 = 4$; mais que le nombre des formes proprement primitives est égal à trois fois le nombre des formes improprement primitives, quand il n'existe pas de solution en nombres impairs de l'équation $x^2 - Dy^2 = 4$.

Les tables de Degen font voir immédiatement, pour les nombres $D \equiv 5$ (mod. 8) qui ne sont pas plus grands que 997, s'il existe ou non une solution en nombres impairs de l'équation $x^2 - Dy^2 = 4$. À savoir si le nombre 4 se trouve dans la série des dénominateurs des quotients complets (la seconde ligne dans les tables), il existe une solution de l'équation; si non, il n'en existe pas. De plus, si la place où se trouve le nombre 4 est d'ordre pair il existe une solution tant de l'équation $x^2 - Dy^2 = +4$ que de l'équation $x^2 - Dy^2 = -4$, mais si cette place est d'ordre impair il existe seulement une solution de l'équation $x^2 - Dy^2 = 4$. On trouve la plus petite solution de ces équations au moyen de la série des quotients (la première ligne des tables), en s'arrêtant au nombre qui précède le nombre placé au-dessus du nombre 4, et en calculant la fraction continue déterminée par cette suite; par exemple, pour le nombre 61 on trouve dans les tables

| | |
|---|---|
| | 7, 1, 4, 3, 1 (2, 2) |
| 61 | 1, 12, 3, 4, 9 (5, 5) |
| | 226153980 |
| | 1766319049 |

Cela fait voir qu'il existe une solution de l'équation $x^2 - Dy^2 = -4$, solution que l'on obtient au moyen de la fraction continue $7 + \frac{1}{1+} \frac{1}{4}, = \frac{39}{5}$ en faisant $x = 39$, $y = 5$. La plus petite solution de l'équation $x^2 - Dy^2 = 4$ se déduit très facilement de la plus petite solution de l'équation $\tau^2 - Dv^2 = -4$ au moyen de la formule $x + y\sqrt{D} = \frac{1}{2}(\tau + v\sqrt{D})^2$, ce qui donne $x = \tau^2 + 2$, $y = \tau v$.

On obtient pareillement la plus petite solution de l'équation $x^2 - Dy^2 = -1$ au moyen de la formule $(x + y\sqrt{D}) = \frac{1}{8}(\tau + v\sqrt{D})^3$, ce qui donne

$$x = \tfrac{1}{2}(\tau^3 + 3\tau), \quad y = \tfrac{1}{2}(\tau^2 + 1)\, v.$$

De même la plus petite solution de l'équation $x^2 - Dy^2 = 1$ se déduit de la plus petite solution de l'équation $T^2 - DU^2 = 4$ au moyen de la formule $x + y\sqrt{D} = \frac{1}{8}(T + U\sqrt{D})^3$, ce qui donne $x = \frac{1}{2}(T^3 - 3T)$, $y = \frac{1}{2}(T^2 - 1)\, U$.

Je fais observer à cette occasion que suivant une remarque de Göpel ("Notiz über A. Göpel," t. XXXV. [1847] p. 315 de ce Journal) si dans l'équation $\left(\frac{x + \sqrt{y}}{p}\right)^n = P + \sqrt{Q}$, où $x$, $y$, $p$, $n$, $P$, $Q$ sont des entiers, le dénominateur $p$ est plus grand que l'unité et $x$, $y$, $p$ n'ont pas de dénominateur commun, on aura nécessairement $p = 2$, $n = 3$ ou égal à un multiple de 3, $x$ impair, et $y$ de la forme $8n + 5$.

J'ai calculé au moyen des tables de Degen la table suivante des plus petites solutions en nombres impairs de l'équation $x^2 - Dy^2 = -4$ ou, si cette équation n'en admet pas, de l'équation $x^2 - Dy^2 = 4$; en d'autres termes, une table des plus petites solutions impaires de l'équation $x^2 - Dy^2 = \pm 4$, $D \equiv 5$ (mod. 8).

*Londres*, 2 *Stone Buildings*, 10 Mars, 1855.

TABLE DES PLUS PETITES SOLUTIONS IMPAIRES DE L'ÉQUATION $x^2-Dy^2=\pm 4$, $D\equiv 5$ (MOD. 8).

| $D$ | $\pm$ | $x$ | $y$ | $D$ | $\pm$ | $x$ | $y$ | $D$ | $\pm$ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | − | 1 | 1 | 341 | + | 277 | 15 | 677 | | impossible | |
| 13 | − | 3 | 1 | 349 | | imposs. | | 685 | − | 759 | 29 |
| 21 | + | 5 | 1 | 357 | + | 19 | 1 | 693 | + | 79 | 3 |
| 29 | − | 5 | 1 | 365 | − | 19 | 1 | 701 | | imposs. | |
| 37 | | imposs. | | 373 | | imposs. | | 709 | | imposs. | |
| 45 | + | 7 | 1 | 381 | | imposs. | | 717 | + | 241 | 9 |
| 53 | − | 7 | 1 | 389 | | imposs. | | 725 | + | 27 | 1 |
| 61 | − | 39 | 5 | 397 | − | 3447 | 173 | 733 | − | 27 | 1 |
| 69 | + | 25 | 3 | 405 | | imposs. | | 741 | + | 245 | 9 |
| 77 | + | 9 | 1 | 413 | + | 61 | 3 | 749 | + | 12945 | 473 |
| 85 | − | 9 | 1 | 421 | − | 444939 | 21685 | 757 | | imposs. | |
| 93 | + | 29 | 3 | 429 | + | 145 | 7 | 765 | + | 83 | 3 |
| 101 | | imposs. | | 437 | + | 21 | 1 | 773 | − | 139 | 5 |
| 109 | − | 261 | 25 | 445 | − | 21 | 1 | 781 | | imposs. | |
| 117 | + | 11 | 1 | 453 | + | 149 | 7 | 789 | + | 31825 | 1133 |
| 125 | − | 11 | 1 | 461 | − | 365 | 17 | 797 | − | 367 | 13 |
| 133 | + | 173 | 15 | 469 | + | 65 | 3 | 805 | + | 1447 | 51 |
| 141 | | imposs. | | 477 | + | 2599 | 119 | 813 | | imposs. | |
| 149 | − | 61 | 5 | 485 | | imposs. | | 821 | − | 16189 | 565 |
| 157 | − | 213 | 17 | 493 | − | 111 | 5 | 829 | | imposs. | |
| 165 | + | 13 | 1 | 501 | + | 28225 | 1261 | 837 | + | 29 | 1 |
| 173 | − | 13 | 1 | 509 | − | 925 | 41 | 845 | − | 29 | 1 |
| 181 | − | 1305 | 97 | 517 | + | 10573 | 465 | 853 | − | 27483 | 941 |
| 189 | | imposs. | | 525 | + | 23 | 1 | 861 | + | 1027 | 35 |
| 197 | | imposs. | | 533 | − | 23 | 1 | 869 | + | 49377 | 1675 |
| 205 | + | 43 | 3 | 541 | − | 1396425 | 60037 | 877 | | imposs. | |
| 213 | + | 73 | 5 | 549 | + | 1523 | 65 | 885 | | imposs. | |
| 221 | + | 15 | 1 | 557 | | imposs. | | 893 | + | 2301 | 77 |
| 229 | − | 15 | 1 | 565 | − | 309 | 13 | 901 | | imposs. | |
| 237 | + | 77 | 5 | 573 | | imposs. | | 909 | | imposs. | |
| 245 | + | 47 | 3 | 581 | + | 6725 | 279 | 917 | + | 1181 | 31 |
| 253 | + | 1177 | 74 | 589 | + | 4359377 | 179625 | 925 | | imposs. | |
| 261 | + | 727 | 45 | 597 | + | 7949 | 399 | 933 | | imposs. | |
| 269 | | imposs. | | 605 | + | 123 | 5 | 941 | − | 1135 | 37 |
| 277 | − | 2613 | 157 | 613 | − | 98763 | 3989 | 949 | − | 32685 | 1061 |
| 285 | + | 17 | 1 | 621 | + | 25 | 1 | 957 | + | 31 | 1 |
| 293 | − | 17 | 1 | 629 | − | 25 | 1 | 965 | − | 31 | 1 |
| 301 | + | 22745 | 1311 | 637 | + | 14159 | 561 | 973 | | imposs. | |
| 309 | + | 5045 | 287 | 645 | + | 203 | 8 | 981 | + | 68123 | 2175 |
| 317 | − | 89 | 5 | 653 | − | 1661 | 65 | 989 | + | 103245 | 3283 |
| 325 | | imposs. | | 661 | − | 1789539 | 69605 | 997 | | imposs. | |
| 333 | | imposs. | | 669 | + | 305285 | 11803 | | | | |