356.

SUR UN CAS PARTICULIER DE LA SURFACE DU QUATRIÈME ORDRE AVEC SEIZE POINTS SINGULIERS.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tom. LXV. (1866), pp. 284—291.]

DANS la note "sur la surface des ondes" (*Liouville* t. XI., 1846), [47], j'ai étudié sous le nom de *tétraédroïde* la surface du quatrième ordre douée de seize points singuliers, et qu'une transformation homographique fait naître de la surface des ondes. Mon point de départ a été la propriété fondamentale suivante.

"Le tétraédroïde est une surface du quatrième ordre, qui est coupée par les plans d'un certain tétraèdre suivant des paires de coniques par rapport auxquelles les trois sommets du tétraèdre dans ce plan sont des points conjugués. De plus: les seize points d'intersection des quatre paires de coniques sont des points singuliers de la surface, c'est-à-dire des points où, au lieu d'un plan tangent, il y a un cône tangent du second ordre."

Dans la même note j'ai reconnu l'existence de seize plans singuliers qui touchent chacun la surface suivant une conique. Il est intéressant d'examiner de quelle manière mes formules se rattachent à celles de M. Kummer dans ses belles recherches (Monatsbericht der Berliner Akademie für 1864, pp. 246—260 et 495—499) relatives à la surface du quatrième ordre douée de seize points singuliers.

Partant des formules de M. Kummer il convient, pour plus de symmétrie, de changer les signes de a, f; puis en remarquant que dans l'équation (3) p. 250 on doit avoir (voir p. 496) $+\frac{3}{2}cf$ au lieu de $-\frac{3}{2}cf$, l'équation de la surface sera

$$\begin{aligned}
&a^2q^2r^2 + b^2r^2p^2 + c^2p^2q^2 + d^2p^2s^2 + e^2q^2s^2 + f^2r^2s^2 \\
&+ 2bcp^2qr + 2cepq^2s - 2bfpr^2s - 2efqrs^2 \\
&+ 2capq^2r + 2afqr^2s - 2cdqp^2s - 2fdrps^2 \\
&+ 2abpqr^2 + 2bdrp^2s - 2aerq^2s - 2depqs^2 - 4gpqrs = 0.
\end{aligned}$$

Pour donner les équations des seize plans singuliers de cette surface je pose d'abord pour abréger

$$ad=\alpha, \quad be=\beta, \quad cf=\gamma,$$

et je détermine k au moyen de l'équation cubique

$$\gamma k^3+(-g-\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}\beta+\tfrac{3}{2}\gamma)\,k^2+(-g-\tfrac{3}{2}\alpha-\tfrac{1}{2}\beta+\tfrac{1}{2}\gamma)\,k-\alpha=0\,;$$

puis j'introduis les quantités

$$\begin{aligned}
p' &= \quad\cdot\quad + cq + \frac{b}{k+1}r \quad + \frac{d}{k}s,\\
q' &= \quad -cp \quad\cdot\quad + \frac{a}{k}r - \frac{e}{k+1}s,\\
r' &= -\frac{b}{k+1}p \quad -\frac{a}{k}q \quad\cdot\quad + fs,\\
s' &= \quad -\frac{d}{k}p + \frac{e}{k+1}q \quad -fr \quad\cdot\quad ,
\end{aligned}$$

enfin je dénote par p_1, q_1, r_1, s_1; p_2, q_2, r_2, s_2; p_3, q_3, r_3, s_3 ce que deviennent les quantités p', q', r', s' en y substituant successivement pour k les trois racines k_1, k_2, k_3 de l'équation en k. Cela posé, les seize plans singuliers sont donnés par les équations

$$\begin{array}{llll}
p=0, & q=0, & r=0, & s=0,\\
p_1=0, & q_1=0, & r_1=0, & s_1=0,\\
p_2=0, & q_2=0, & r_2=0, & s_2=0,\\
p_3=0, & q_3=0, & r_3=0, & s_3=0.
\end{array}$$

En prenant une ligne quelconque (p_1, q_1, r_1, s_1) et une colonne quelconque (r, r_1, r_2, r_3), puis en omettant le terme commun r_1, on a une des seize combinaisons $(p_1, q_1, s_1, r, r_2, r_3)$ de six plans qui se rencontrent dans un des seize points singuliers.

Supposons que les plans p, s_1, r_2, q_3 se rencontrent dans le même point. Pour que cette circonstance ait lieu il faut que la condition $\dfrac{k_2(k_3+1)}{k_3(k_1+1)}=1$ ou, ce qui est la même chose, $k_3(k_1-k_2)-(k_2-k_3)=0$ soit remplie ; mais si cette condition est remplie, non seulement les plans (p, s_1, r_2, q_3) se rencontront dans le même point, mais aussi les plans (q, p_1, s_2, r_3), les plans (r, q_1, p_2, s_3) et les plans (s, r_1, q_2, p_3) se rencontront dans le même point. L'équation $k_3(k_1-k_2)-(k_2-k_3)=0$ appartient évidemment à un système de six équations, et l'une quelconque de ces équations donnerait un résultat semblable ; chacune de ces équations conduit, comme on va voir, à une certaine relation entre les quantités g, α, β, γ (ou g, a, b, c, d, e, f), relation en vertu de laquelle la surface générale du quatrième ordre douée de seize points singuliers se réduit au *tétraédroïde*. Pour former la relation dont il s'agit, il faut égaler à zéro le produit des six fonctions analogues à $k_3(k_1-k_2)-(k_2-k_3)$. Je forme d'abord le produit des trois fonctions $k_3(k_1-k_2)-(k_2-k_3)$, $k_1(k_2-k_3)-(k_3-k_1)$, $k_2(k_3-k_1)-(k_1-k_2)$, et en représentant pour un moment l'équation en k par $\mathfrak{a}k^3+\mathfrak{b}k^2+\mathfrak{c}k+\mathfrak{d}=0$, on trouve que le produit des trois fonctions est égal à

$$\begin{aligned}P+Q\sqrt{\Delta}=(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})(\mathfrak{bc}+9\,\mathfrak{ad})-6\,(\mathfrak{ac}^2+\mathfrak{b}^2\mathfrak{d})\\ +(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}-2\,\mathfrak{a}-2\,\mathfrak{d})\sqrt{\mathfrak{b}^2\mathfrak{c}^2-4\,\mathfrak{b}^3\mathfrak{d}-4\,\mathfrak{ac}^3+18\,\mathfrak{abcd}-27\,\mathfrak{a}^2\mathfrak{d}^2},\end{aligned}$$

et en substituant pour $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ leurs valeurs

$$\mathfrak{a}=\gamma,\quad \mathfrak{b}=-g-\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}\beta+\tfrac{3}{2}\gamma,\quad \mathfrak{c}=-g-\tfrac{3}{2}\alpha-\tfrac{1}{2}\beta+\tfrac{1}{2}\gamma,\quad \mathfrak{d}=-\alpha,$$

on trouve, toute réduction faite,

$$\begin{aligned}P&=-2g^3+\tfrac{1}{2}g\,(\Sigma\alpha^2-10\Sigma\alpha\beta)+2\,(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta),\\ Q&=-2g,\\ \Delta&=\ g^4-\tfrac{1}{2}g^2(\Sigma\alpha^2-10\Sigma\alpha\beta)-4g\,(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)\\ &\quad+\tfrac{1}{16}(\Sigma\alpha^4+12\Sigma\alpha^3\beta-26\Sigma\alpha^2\beta^2+244\Sigma\alpha^2\beta\gamma).\end{aligned}$$

Cela posé, l'équation cherchée est $P^2-Q^2\Delta=0$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}0=\tfrac{1}{2}(P^2-Q^2\Delta)&=g^3\,.\,4\,(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)\\ &+g^2\,.\,4\,(-\Sigma\alpha^3\beta+4\Sigma\alpha^2\beta^2-2\Sigma\alpha^2\beta\gamma)\\ &+g\ .\ (\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)(\Sigma\alpha^2-10\Sigma\alpha\beta)\\ &+\quad 2\,(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2(\alpha-\beta)^2;\end{aligned}$$

cette équation, dans laquelle $\alpha=ad$, $\beta=be$, $\gamma=cf$, constitue la condition sous laquelle la surface de M. Kummer se réduit à un tétraédroïde.

Je passe à présent à mes formules de 1846. En écrivant pour plus de commodité f^2, g^2, h^2, l^2, m^2, n^2 au lieu de f, g, h, l, m, n, mon équation du tétraédroïde est

$$\begin{vmatrix} . & x^2, & y^2, & z^2, & w^2\\ x^2, & . & h^2, & g^2, & l^2\\ y^2, & h^2, & . & f^2, & m^2\\ z^2, & g^2, & f^2, & . & n^2\\ w^2, & l^2, & m^2, & n^2 & .\end{vmatrix}=0,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(A,\ B,\ C,\ D,\ F,\ G,\ H,\ L,\ M,\ N\between x^2,\ y^2,\ z^2,\ w^2)^2=0,$$

c'est-à-dire

$$Ax^4+By^4+Cz^4+Dw^4+2Fy^2z^2+2Gz^2x^2+2Hx^2y^2+2Lx^2w^2+2My^2w^3+2Nz^2w^2=0,$$

où les coefficients ont les valeurs

$$
\begin{aligned}
&A = 2m^2n^2f^2, \quad B = 2n^2l^2g^2, \quad C = 2l^2m^2h^2, \quad D = 2f^2g^2h^2,\\
&F = l^2\,(\quad l^2f^2 - m^2g^2 - n^2h^2), \quad L = f^2\,(\quad l^2f^2 - m^2g^2 - n^2h^2),\\
&G = m^2\,(-l^2f^2 + m^2g^2 - n^2h^2), \quad M = g^2\,(-l^2f^2 + m^2g^2 - n^2h^2),\\
&H = n^2\,(-l^2f^2 - m^2g^2 + n^2h^2), \quad N = h^2\,(-l^2f^2 - m^2g^2 + n^2h^2).
\end{aligned}
$$

Les coordonnées des seize points singuliers sont

$$(0,\ \pm h,\ \pm g,\ \pm l), \quad (\pm h,\ 0,\ \pm f,\ \pm m), \quad (\pm g,\ \pm f,\ 0,\ \pm n), \quad (\pm l,\ \pm m,\ \pm n,\ 0),$$

et les équations des seize plans singuliers sont

$$
\begin{array}{rrrrl}
. & \pm ny & \pm mz & \pm fw & = 0,\\
\pm nx & . & \pm lz & \pm gw & = 0,\\
\pm mx & \pm ly & . & \pm hw & = 0,\\
\pm fx & \pm gy & \pm hz & . & = 0,
\end{array}
$$

où l'on donne des valeurs quelconques aux signes $\pm$. Pour comparer ces plans aux plans de M. Kummer j'écris le tableau

p, q, r, s	$.\ \ +ny-mz+fw$	$-nx\ \ .\ \ +lz+gw$	$mx-ly\ \ .\ \ +hw$	$-fx-gy-lz\ \ .$
p_1, q_1, r_1, s_1	$nx\ \ .\ \ +lz+gw$	$mx+ly\ \ .\ \ +hw$	$-fx-gy+hz\ \ .$	$.\ \ ny-mz-fw$
p_2, q_2, r_2, s_2	$-mx-ly\ \ .\ \ +hw$	$-fx+gy-hz\ \ .$	$.\ \ ny+mz+fw$	$-nx\ \ .\ \ +lz-gw$
p_3, q_3, r_3, s_3	$fx-gy-hz\ \ .$	$.\ \ -ny-mz+fw$	$-nx\ \ .\ \ -lz+gw$	$mx-ly\ \ .\ \ -hw$

et j'obtiens les valeurs suivantes:

$$
\begin{aligned}
p &= \quad . \quad ny - mz + fw,\\
q &= -nx \quad . \quad + lz + gw,\\
r &= \quad mx - ly \quad . \quad + hw,\\
s &= -fx - gy - hz \quad . \quad .
\end{aligned}
$$

En résolvant ces équations par rapport à x, y, z, w et en posant pour abréger $\theta = lf + mg + nh$, on trouve

$$
\begin{aligned}
\theta x &= \quad . \quad -hq + gr - ls,\\
\theta y &= \quad hp \quad . \quad -fr - ms,\\
\theta z &= -gp + fq \quad . \quad -ns,\\
\theta w &= \quad lp + mq + nr \quad . \ ,
\end{aligned}
$$

valeurs qu'il s'agit de substituer dans l'équation

$$U = (A,\ B,\ C,\ D,\ F,\ G,\ H,\ L,\ M,\ N \between x^2,\ y^2,\ z^2,\ w^2)^2 = 0$$

de la surface dont il est question.

De l'expression de U en p, q, r, s je ne considère d'abord que le terme multiplié par p^2q^2. Désignons par $\mathfrak{E}$ le coefficient de p^2q^2 dans $\theta^4 U$, nous aurons

$$\mathfrak{E} = \left.\begin{array}{lll} & 6f^2g^2 & \times 2l^2m^2h^2 \\ + & 6l^2m^2 & \times 2f^2g^2h^2 \\ + & h^2f^2 & \times 2l^2\,(\;\;l^2f^2 - m^2g^2 - n^2h^2) \\ + & g^2h^2 & \times 2m^2\,(-l^2f^2 + m^2g^2 - n^2h^2) \\ + & h^4 & \times 2n^2\,(-l^2f^2 - m^2g^2 + n^2h^2) \\ + & h^2l^2 & \times 2f^2\,(\;\;l^2f^2 - m^2g^2 - n^2h^2) \\ + & h^2m^2 & \times 2g^2\,(-l^2f^2 + m^2g^2 - n^2h^2) \\ + & (l^2f^2 + m^2g^2 - 4lmfg) & \times 2h^2\,(-l^2f^2 - m^2g^2 + n^2h^2) \end{array}\right\} = 2h^2 \left\{\begin{array}{ll} & 6i^2j^2 \\ + & 6i^2j^2 \\ + & i^2\,(\;\;i^2 - j^2 - k^2) \\ + & j^2\,(-i^2 + j^2 - k^2) \\ + & k^2\,(-i^2 - j^2 + k^2) \\ + & i^2\,(\;\;i^2 - j^2 - k^2) \\ + & j^2\,(-i^2 + j^2 - k^2) \\ + & (i^2 + j^2 - 4ij)\,(-i^2 - j^2 + k^2) \end{array}\right\},$$

les lettres i, j, k étant introduites pour désigner les produits

$$lf = i, \quad mg = j, \quad nh = k.$$

Après toutes les réductions on obtient

$$\mathfrak{E} = 2h^2\left((i+j)^2 - k^2\right)^2, \;= 2h^2(i+j+k)^2(-i-j+k)^2, \;= 2h^2\theta^2(-i-j+k)^2,$$

pour le coefficient de p^2q^2 dans $\theta^4 U$, ou, ce qui est la même chose,

$$h^2(-i-j+k)^2$$

pour le coefficient de p^2q^2 dans $\frac{1}{2}\theta^2 U$.

En calculant de même les autres coefficients de $\frac{1}{2}\theta^2 U$ et en écrivant pour abréger

$$\begin{aligned} i - j - k &= \;\;\, lf - mg - nh = a, \\ -i + j - k &= -lf + mg - nh = b, \\ -i - j + k &= -lf - mg + nh = c, \end{aligned}$$

l'équation transformée sera

$$\begin{aligned} & f^2a^2q^2r^2 + g^2b^2r^2p^2 + h^2c^2p^2q^2 + l^2a^2p^2s^2 + m^2b^2q^2s^2 + n^2c^2r^2s^2 \\ & + 2ghbcp^2qr + 2hmbcpq^2s - 2gnbcpr^2s - 2mnbcqrs^2 \\ & + 2hfcapq^2r + 2fncaqr^2s - 2hlcaqp^2s - 2nlcarps^2 \\ & + 2fgabpqr^2 + 2glabrp^2s - 2fmabrq^2s - 2lmabpqs^2 \\ & - (b-c)(c-a)(a-b)\,pqrs = 0. \end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned} a' &= fa, & d' &= la, & -4g' &= (b-c)(c-a)(a-b), \\ b' &= gb, & e' &= mb, & & \\ c' &= hc, & f' &= nc, & & \end{aligned}$$

les quantités a', b', c', d', e', f', g' sont liées par une relation. Pour en prouver l'existence on n'a qu'à faire

$$a'd' = \alpha', \quad b'e' = \beta', \quad c'f' = \gamma'$$

et à se servir des expressions de a, b, c en f, g, h, l, m, n, alors on obtient

$$\begin{aligned} -2\alpha' &= a^2(b+c), \\ -2\beta' &= b^2(c+a), \\ -2\gamma' &= c^2(a+b), \\ -4g' &= (b-c)(c-a)(a-b), \end{aligned}$$

équations qui impliquent une relation entre α', β', γ', g'; mais en supposant que a', b', c', d', e', f', g' soient des quantités qui satisfont à cette relation, il existe toujours des valeurs correspondantes de f, g, h, l, m, n, c'est-à-dire que l'équation du tétraédroïde est identique avec celle de M. Kummer toutes les fois que les coefficients a, b, c, d, e, f, g de cette dernière sont liés par une certaine relation. Ecrivons comme auparavant $ad = \alpha$, $be = \beta$, $cf = \gamma$, cette relation se trouve en éliminant a, b, c entre les équations

$$\begin{aligned} -2\alpha &= a^2(b+c), \\ -2\beta &= b^2(c+a), \\ -2\gamma &= c^2(a+b), \\ -4g &= (b-c)(c-a)(a-b), \end{aligned}$$

et il ne s'agit que de prouver l'identité de cette relation avec celle que nous avons trouvée ci-dessus par d'autres considérations.

J'introduis les nouvelles notations

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= -\tfrac{1}{2}P, & a+b+c &= \mathfrak{p}, \\ \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta &= -\tfrac{1}{4}Q, & bc+ca+ab &= \mathfrak{q}, \\ \alpha\beta\gamma &= -\tfrac{1}{8}R, & abc &= \mathfrak{r}, \end{aligned}$$

je forme l'expression

$$2(\beta-\gamma) = -(bc+ca+ab)(b-c), \; = -\mathfrak{q}\,(b-c),$$

et les deux expressions analogues pour $2(\gamma-\alpha)$, $2(\alpha-\beta)$; j'en déduis le résultat

$$8(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta) = -\mathfrak{q}^3(b-c)(c-a)(a-b);$$

enfin je note les équations

$$\begin{aligned} (b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2 &= -4\mathfrak{q}^3 + \mathfrak{p}^2\mathfrak{q}^2 + 18\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r} - 27\mathfrak{r}^2 - 4\mathfrak{p}^3\mathfrak{r}, \\ P &= \mathfrak{p}\mathfrak{q} - 3\mathfrak{r}, \\ Q &= \mathfrak{q}^3 - 2\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r} + 3\mathfrak{r}^2, \\ R &= \mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{r}^3, \end{aligned}$$

qui donnent la transformation de leurs premiers membres en fonction de $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$; cela posé, et à l'aide de ces valeurs, on forme les égalités

$$512(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)g^3 = (-\ 4\mathfrak{q}^3+\mathfrak{p}^2\mathfrak{q}^2+18\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}-27\mathfrak{r}^2-4\mathfrak{p}^3\mathfrak{r})\mathfrak{q}^3(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2,$$

$$256(-\Sigma\alpha^3\beta+4\Sigma\alpha^2\beta^2-2\Sigma\alpha^2\beta\gamma)g^2 = (\ 6\mathfrak{q}^3-\mathfrak{p}^2\mathfrak{q}^2-18\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}+27\mathfrak{r}^2+2\mathfrak{p}^3\mathfrak{r})\mathfrak{q}^3(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2,$$

$$128(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)(\Sigma\alpha^2-10\Sigma\alpha\beta)g = (-12\mathfrak{q}^3+\mathfrak{p}^2\mathfrak{q}^2+18\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}-27\mathfrak{r}^2\qquad)\mathfrak{q}^3(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2,$$

$$64(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2(\alpha-\beta)^2 = (\qquad \mathfrak{q}^3 \qquad)\mathfrak{q}^3(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2,$$

lesquelles, multipliées par 1, 2, 1, 4, ajoutées ensemble et divisées par 128, conduisent à l'équation finale

$$\begin{aligned} & g^3 . 4(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta) \\ & + g^2 . 4(-\Sigma\alpha^3\beta+4\Sigma\alpha^2\beta^2-2\Sigma\alpha^2\beta\gamma) \\ & + g\ .\ \ (\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)(\Sigma\alpha^2-10\Sigma\alpha\beta) \\ & +\qquad 2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2(\alpha-\beta)^2 = 0, \end{aligned}$$

identique avec celle que l'on a trouvée ci-dessus, ce qui achève la démonstration que l'on avait en vue.

Cambridge, 18 *Mai*, 1865.