

55/1980

Maciej Sowiński

**ROZPRASZANIE NA OBIEKTACH
ŻYROTROPOWYCH I ANIZOTROPOWYCH
UMIESZCZONYCH W FAŁOWODZIE**

P. 269



WARSZAWA 1980

Prace Zakładu Teorii Fal Elektromagnetycznych
Praca nr 183

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 8 grudnia 1980 r.

Zarejestrowana pod nr 55/1980



57106



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 170 egz. Ark. wyd. 1. Ark. druk. 1,75

Oddano do drukarni w styczniu 1981 r.

Nr zamówienia 14/o/81

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Maciej Sowiński
Zakład Teorii Fal
Elektromagnetycznych
IPPT PAN

ROZPRASZANIE NA OBIEKTACH ŻYROTROPOWYCH
I ANIZOTROPOWYCH UMIESZCZONYCH W FALOWODZIE

Streszczenie

W pracy rozważany jest problem rozpraszania fal elektromagnetycznych na żyrotropowym rdzeniu umieszczonym poprzecznie do kierunku propagacji w falowodzie prostokątnym. W punkcie 1 rozważane są dwa przypadki. Pierwszy dotyczy rozpraszania fal $H_{m,0}$ na rdzeniu posiadającym żyrotropię elektryczną i magnetyczną. Drugi dotyczy rozpraszania fal dowolnego typu na rdzeniu jednoosiowo anizotropowym, co jest szczególnym przypadkiem żyrotropii. W obu przypadkach zagadnienia zostały sprowadzone do równań Helmholtza lub układu tych równań oraz została pokazana równoważność takiego sformułowania z wyjściowym układem równań Maxwella.

W punkcie 2 rozważany jest przypadek rozpraszania fal $H_{m,0}$ na rdzeniu żyrotropowym. Sformułowane zostało w tym punkcie zagadnienie znajdowania pola z uwzględnieniem warunków brzegowych i warunków zszycia pól w rdzeniu i na zewnątrz rdzenia. Na uwagę zasługuje warunek zszycia dla stycznych składowych pola magnetycznego, w którym zamiast pochodnej normalnej pola w rdzeniu występuje pochodna w kierunku pewnego, zespolonego wektora o stałym kierunku względem wektora normalnego do brzegu rdzenia.

W punkcie 3 przeprowadzona została konstrukcja sprowadzająca to zagadnienie do równania całkowego pierwszego rodzaju, którego jądro okazało się być klasy L^2 . Wynik ten daje się zastosować do zagadnień z rdzeniami dielektrycznymi lub jed-

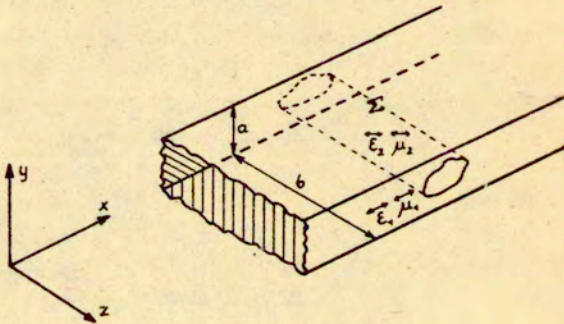
noosiowo anizotropowymi, dla których autorzy otrzymują zwykle układ dwóch równań osobliwych nie będących układami ani pierwszego ani drugiego rodzaju.

W punkcie 4 pokazany został sposób numerycznego rozwiązywania równania całkowego uwzględniający efektywną iterację jądra singularnego z jądrem o osobliwości logarytmicznej.

1. Równania różniczkowe pola w falowodzie z rdzeniem żyotropowym

1.1. Postawienie problemu

Rozpatrywać będziemy harmoniczne pola elektromagnetyczne w następującej strukturze: w falowodzie o przekroju prostokąta i idealnie przewodzących ściankach umieszczony został rdzeń cylindryczny z materiału żyotropowego. Oś rdzenia jest prostopadła do jednej z par ścianek falowodu, rys.1.



Rys.1

Oba ośrodki wypełniające falowód są jednorodne, przy czym o ośrodku wewnątrz rdzenia założymy początkowo, że posiada żyotropię zarówno elektryczną jak i magnetyczną. Stałe $\vec{\epsilon}_2$ i $\vec{\mu}_2$ są tensorami o postaci [por. [1], str.164] następujących macierzy

$$/1.1/ \quad \vec{\epsilon}_2 = \begin{bmatrix} \epsilon_2, i\epsilon_a, 0 \\ -i\epsilon_a, \epsilon_2, 0 \\ 0, 0, \epsilon_{11} \end{bmatrix}, \quad \vec{\mu}_2 = \begin{bmatrix} \mu_2, i\mu_a, 0 \\ -i\mu_a, \mu_2, 0 \\ 0, 0, \mu_{11} \end{bmatrix}$$

zbudowanych z liczb rzeczywistych $\epsilon_2, \epsilon_a, \epsilon_{11}, \mu_2, \mu_a, \mu_{11}$. Tensory te posiadają symetrię hermitowską. Jeżeli zażądać dodatkowo, aby ich formy Hermite'a były dodatnio określone otrzymamy

$$/1.2/ \quad \epsilon_2 > 0, \epsilon_{11} > 0, |\epsilon_a| < \epsilon_2$$

$$/1.3/ \quad \mu_2 > 0, \mu_{11} > 0, |\mu_a| < \mu_2$$

Ośrodek o stałych $\vec{\epsilon}_1, \vec{\mu}_1$ jest izotropowy. Zależność pól od czasu przyjmijemy zgodnie z czynnikiem $e^{i\omega t}$.

1.2. Separacja równań Maxwella dla falowodu z rdzeniem żyrotropowym

Przy braku wymuszonych prądów zewnętrznych równania Maxwella redukują się w rozpatrywanym przypadku do postaci:

$$/1.4/ \quad \nabla \times \vec{E} + i\omega \vec{\mu} \vec{H} = 0$$

$$/1.5/ \quad \nabla \times \vec{H} - i\omega \vec{\epsilon} \vec{E} = 0$$

$$/1.6/ \quad \nabla \cdot (\vec{\mu} \vec{H}) = 0$$

$$/1.7/ \quad \nabla \cdot (\vec{\epsilon} \vec{E}) = 0$$

Interesującym przypadkiem jest separacja tych równań dla ośrodka żyrotropowego, tzn. $\vec{\mu} = \vec{\mu}_2$. Rozpisując /1.4/ na poszczególne składowe zróżniczkujemy składową x-ową względem y, składową y-ową względem x oraz równanie /1.7/ względem z. Otrzymamy korzystając z pozostałych równań

$$/1.8/ \quad \frac{\partial^2 E_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_2}{\partial y^2} + \frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial z^2} + \omega \mu_{11} \left(\frac{\epsilon_a}{\epsilon_2} + \frac{\mu_a}{\mu_2} \right) \frac{\partial H_2}{\partial z} + \omega^2 \epsilon_{11} \left(\mu_2 - \frac{\mu_a^2}{\mu_2} \right) E_2 = 0$$

Podobnie, wychodząc z równania /1.5/ otrzymamy dualne do równania /1.8/ równanie

$$/1.9/ \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\mu_{11}}{\mu_2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} - \omega \epsilon_{11} \left(\frac{\epsilon_a}{\epsilon_2} + \frac{\mu_a}{\mu_2} \right) \frac{\partial E_z}{\partial z} + \\ + \omega^2 \mu_{11} \left(\epsilon_2 - \frac{\epsilon_a^2}{\epsilon_2} \right) H_z = 0$$

Na ściankach metalicznych musi być spełniony następujący warunek brzegowy dla wektora indukcji magnetycznej

$$/1.10/ \quad \vec{n} \cdot \dot{\vec{B}}|_{\Sigma} = 0 ; \quad \vec{n} \text{ wektor normalny do powierzchni } \Sigma .$$

Stąd dla pól harmonicznych B_z musi się zerować dla $z = 0$, $z = b$. W ośrodku pierwszym $B_z = \mu_1 H_z$ zaś w ośrodku żyotropowym, gdzie oś żyotropii skierowana jest wzdłuż osi z , $B_z = \mu_{11} H_z$. Stąd dla obu ośrodków zachodzi jednakowy warunek dla składowej H_z

$$/1.11/ \quad H_z(x, y, 0) = H_z(x, y, b) = 0$$

Z ciągłości składowych stycznych pola H na granicy ośrodka żyotropowego i izotropowego, otrzymujemy ciągłość składowej H_z . Stąd zależność H_z od zmiennej z musi być jednakowa w obu ośrodkach.

W dalszym ciągu pracy będziemy rozpatrywać poszczególne mody falowodu prostokątnego. Składowa H_z dla dowolnego z tych modów musi więc w obu ośrodkach mieć postać

$$/1.12/ \quad H_z(x, y, z) = h_z(x, y) \sin \frac{n\pi}{b} z ; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

gdzie: b - poprzeczny wymiar falowodu.

Podstawiając /1.12/ do równania /1.9/ dochodzimy do wniosku, że składowa E_z dla dowolnego modu musi mieć postać

$$/1.13/ \quad E_z(x, y, z) = e_z(x, y) \cos \frac{n\pi}{b} z ; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

zarówno w ośrodku izotropowym, jak i żyotropowym. Wykorzystując /1.12/ i /1.13/ otrzymujemy dla funkcji $e_z(x, y)$ i $h_z(x, y)$ następujące równania

$$/1.14/ \quad (\nabla_1^2 + a_e) e_z + b_e h_z = 0$$

$$/1.15/ \quad (\nabla_1^2 + a_m) h_z + b_m e_z = 0$$

Podobnie jak w [1] wprowadzone zostały następujące oznaczenia

$$/1.16/ \quad a_e = \omega^2 \varepsilon_{11} \mu_1 - \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2}, \quad b_e = \omega \mu_{11} \frac{n \pi}{b} \left(\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_2} + \frac{\mu_a}{\mu_2} \right)$$

$$/1.17/ \quad a_m = \omega^2 \mu_{11} \varepsilon_1 - \frac{\mu_{11}}{\mu_2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2}, \quad b_m = \omega \varepsilon_{11} \frac{n \pi}{b} \left(\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_2} + \frac{\mu_a}{\mu_2} \right)$$

$$\text{gdzie: } \mu_1 = \mu_2 - \frac{\mu_a^2}{\mu_2} \quad \text{oraz} \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_a^2}{\varepsilon_2}$$

Przez ∇_{\perp} rozumieć należy operator ∇ działający w płaszczyźnie ortogonalnej do osi żyrotropii rdzenia czyli

$$/1.18/ \quad \nabla_{\perp} = \vec{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{y}_0 \frac{\partial}{\partial y}$$

Równania /1.14/ i /1.15/ możnaby otrzymać z równań wyprowadzonych w [1], /str.169/ podstawiając do tych równań zależności /1.12/ i /1.13/, ale zaprezentowany tutaj sposób jest znacznie prostszy.

Ze wstępnej analizy tych równań widzimy, że w ogólnym przypadku /współczynniki równań różne od zera/ pola PPE i PPM [por. [3], str.260] nie mogą w ośrodku żyrotropowym istnieć oddzielnie. Zjawisko to nazywane jest sprzężaniem się modów w ośrodku żyrotropowym. W następnych punktach zajmiemy się dwoma przypadkami szczególnymi, kiedy takie sprzężenie nie występuje.

1.3. Rodzaje $H_{m,0}$ w falowodzie z rdzeniem żyrotropowym

Rozprężenie się rodzajów PPE i PPM, jak wynika z równań /1.14/ i /1.15/, następuje wtedy, gdy $b_e = b_m = 0$. Jednym z przypadków kiedy to może nastąpić jest niezależność składowych E_z i H_z od zmiennej z , co odpowiada $n = 0$ we wzorach /1.16/ i /1.17/. Ponieważ pola PPM_{m,0} tożsame z modami $E_{m,0}$ nie mogą się w falowodzie prostokątnym propagować będzie to opisywało przypadek pobudzania falowodu z rys.1 rodzajami PPE_{m,0} lub inaczej modami $H_{m,0}$. W tym przypadku pole $E = (0, 0, e_z(x, y))$ zaś składowa $e_z(x, y)$ spełnia w ośrodku żyrotropowym równanie

$$/1.19/ \quad (\nabla_{\perp}^2 + \omega^2 \varepsilon_{11} \mu_1) e_z = 0$$

Rozpiszmy na składowe równanie /1.4/ będące prawem Faradaya dla ośrodka żyrotropowego

$$\begin{aligned} /1.14'/ \quad & \frac{\partial E_z}{\partial y} + i\omega\mu_2 H_x - \omega\mu_a H_y = 0 \\ & - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\mu_a H_x + i\omega\mu_2 H_y = 0 \end{aligned}$$

Otrzymany układ równań w przypadku modów $H_{m,0}$ możemy znów zwinąć do postaci wektorowej, ale prostszej niż /1.4/

$$/1.20/ \quad \omega \begin{bmatrix} \mu_a & i\mu_2 \\ -i\mu_2 & \mu_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} = \nabla_{\perp} E_z$$

Ponieważ w olbrzymiej większości przypadków $\mu_2 \neq \pm \mu_a$ /por. [1], cz. I /dla macierzy występującej w /1.20/ istnieje macierz odwrotna i z równania /1.20/ możemy wyliczyć pole H

$$/1.21/ \quad \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix} (x,y) = \frac{1}{\omega(\mu_a^2 - \mu_2^2)} \begin{bmatrix} \mu_a & -i\mu_2 \\ i\mu_2 & \mu_a \end{bmatrix} \nabla e_z(x,y)$$

W zależności /1.21/ użyte zostały oznaczenia h_x, h_y dla składowych pola magnetycznego zgodnie z zależnością /1.12/ dla $n = 0$, gdyż w tym przypadku wszystkie składowe obu pól E i H nie zależą od z, co widoczne jest również z /1.21/.

Tak więc otrzymaliśmy falę typu H w postaci trójki składowych h_x, h_y, e_z w rdzeniu żyrotropowym, przy czym składowa e_z spełnia równanie Helmholtza /1.19/ zaś składowe h_x i h_y generowane są z rozwiązania e_z wzorem /1.21/. Ciekawym faktem jest tu całkowity brak wpływu żyrotropii elektrycznej przy tak ustawionej osi żyrotropii na fale $H_{m,0}$ oraz brak wpływu czynnika $\mu_{||}$ charakteryzującego anizotropię magnetyczną w kierunku osi żyrotropii.

1.4. Przypadek ośrodka jednoosiowo anizotropowego

Drugim z możliwych przypadków, kiedy współczynniki $b_e = b_m = 0$ to ośrodek jednoosiowo anizotropowy, w którym $\epsilon_a = \mu_a = 0$. Równania /1.14/ i /1.15/ przybierają wtedy postać

$$/1.22/ \quad (\nabla_{\perp}^2 + a_e) e_z = 0; \quad a_e = \omega^2 \epsilon_{||} \mu_2 - \frac{\epsilon_{||}}{\epsilon_2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2}$$

$$/1.23/ \quad (\nabla_{\perp}^2 + a_m) h_z = 0; \quad a_m = \omega^2 \mu_{||} \epsilon_2 - \frac{\mu_{||}}{\mu_2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2}$$

Z równań /1.22/ i /1.23/ wynika, że jeśli strukturę z rys.1 będziemy pobudzali np. falą typu PPM to i odpowiedzią struktury będą fale typu PPM. Ta sama uwaga dotyczy pobudzania falą PPE.

Równanie /1.4/ rozpisane na składowe ma postać układu

$$\begin{aligned} /1.4"/ \quad \frac{\partial e_z}{\partial y} - \frac{n\pi}{b} e_y + i\omega\mu_2 h_x &= 0 \\ \frac{n\pi}{b} e_x - \frac{\partial e_z}{\partial x} + i\omega\mu_2 h_y &= 0 \end{aligned}$$

któremu możemy nadać inną niż /1.4/, wektorową postać

$$/1.24/ \quad \nabla_{\perp} e_z = \frac{n\pi}{b} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \end{bmatrix} + \omega\mu_2 \begin{bmatrix} h_y \\ -h_x \end{bmatrix}$$

Podobnie możemy postąpić z równaniem /1.5/ otrzymując

$$/1.25/ \quad \nabla_{\perp} h_z = -\frac{n\pi}{b} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix} - i\omega\varepsilon_2 \begin{bmatrix} e_y \\ -e_x \end{bmatrix}$$

Wprowadzimy następujące oznaczenia

$$/1.26/ \quad e_t = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \end{bmatrix}, \quad h_t = \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{bmatrix} = -T^{-1}$$

Przy wprowadzonych powyżej oznaczeniach równaniom /1.24/ i /1.25/ nadajemy postać

$$/1.27/ \quad \nabla_{\perp} e_z = \frac{n\pi}{b} e_t + i\omega\mu_2 T \cdot h_t$$

$$/1.28/ \quad \nabla_{\perp} h_z = -\frac{n\pi}{b} h_t - i\omega\varepsilon_2 T \cdot e_t$$

Traktując równania /1.27/ i /1.28/ jako układ dwóch równań z dwoma niewiadomymi wektorami e_t i h_t możemy ten układ rozwiązać traktując funkcje e_z i h_z jako znane. Otrzymamy

$$/1.29/ \quad e_t = \frac{-1}{k_t^2 - \frac{n^2\pi^2}{b^2}} \left(\frac{n\pi}{b} \nabla_{\perp} e_z + i\omega\mu_2 T \cdot \nabla_{\perp} h_z \right)$$

$$/1.30/ \quad h_t = \frac{1}{k_t^2 - \frac{n^2\pi^2}{b^2}} \left(\frac{n\pi}{b} \nabla_{\perp} h_z + i\omega\varepsilon_2 T \cdot \nabla_{\perp} e_z \right)$$

gdzie: $k_t^2 \triangleq \omega^2 \varepsilon_2 \mu_2$

Przez bezpośrednie rachunki można się przekonać, że jeżeli funkcje e_z i h_z spełniają równania /1.22/ i /1.23/ to pole generowane wzorami /1.29/ i /1.30/ spełnia układ równań Maxwella /1.4/ - /1.7/. Z zupełności układu modów PPE_{m,n} i PPM_{m,n} w falowodzie prostokątnym prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne, tzn. jest możliwe przedstawienie dowolnego pola w danej strukturze, które spełnia układ /1.4/ - /1.7/ w postaci /1.29/ i /1.30/, gdzie funkcje e_z i h_z muszą spełniać równania /1.22/ i /1.23/ i odpowiednie, nie zdefiniowane dotąd warunki brzegowe.

Ponadto ze wzorów /1.29/ i /1.30/ możemy generować rozwiązania poszczególnych typów przyjmując jedno z rozwiązań równań /1.22/ i /1.23/ jako równe zero. Jest to możliwe ze względu na zerowe warunki brzegowe spełniane przez e_z i $\frac{\partial h_z}{\partial n}$ na ściankach falowodu. Przyjmując np. $h_z = 0$ otrzymamy zależności generujące rodzaje PPM_{m,n} w falowodzie prostokątnym ze rdzeniem jednoosiowo anizotropowym /por. [3], str.260/

$$/1.31/ \quad e_t = \frac{-n\pi}{k_t^2 - \frac{n^2\pi^2}{b^2}} \nabla_{\perp} e_z ; \quad h_t = \frac{i\omega\epsilon_2 T \cdot \nabla_{\perp} e_z}{k_t^2 - \frac{n^2\pi^2}{b^2}}$$

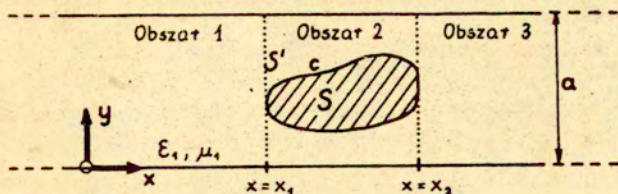
2. Rozpraszanie na rdzeniu żyotropowym w falowodzie pobudzonym rodzajami H_{m,0}

2.1. Sformułowanie problemu

W podpunkcie 1.3 pokazane zostało, że pole elektromagnetyczne wewnątrz żyotropowego rdzenia opisane jest w przypadku pobudzeń H_{m,0} wzorem /1.21/ gdzie funkcja e_z jest rozwiązaniem równania Helmholtza /1.19/ oraz odpowiednich warunków brzegowych.

Sformułujemy teraz problem rozpraszania na opisanym rdzeniu w rozważanym falowodzie. Ponieważ, jak wynika z poprzednich rozważań, problem jest dwuwymiarowy będziemy poszukiwali pola $E_z(x,y)$ w obszarze pokazanym na rys.2. Pole to będzie spełniało równanie

$$/2.1/ \quad \nabla^2 E_z + k^2(x,y) E_z = 0 \quad \text{w } S \cup S'$$



Rys. 2

gdzie:

$$k^2(x, y) = \begin{cases} \omega^2 \epsilon_1 \mu_1 = k_1^2 & \text{dla } (x, y) \in S' \\ \omega^2 \epsilon \mu = k^2 & \text{dla } (x, y) \in S \end{cases}$$

W obszarach 1 i 3 pole E_z można wyrazić w postaci szeregu funkcji odpowiadających poszczególnym modom $H_{m,0}$

$$/2.2/ \quad \varphi_m^+(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi}{a} y\right) u_m(x), \quad \varphi_m^-(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi}{a} y\right) u_m^{-1}(x)$$

gdzie:

$$u_m(x) = e^{-i T_m \cdot x}, \quad u_m^{-1}(x) = e^{i T_m \cdot x}$$

$$/2.3/ \quad T_m = \sqrt{k_1^2 - \frac{m^2 \pi^2}{a^2}}, \quad \text{Re } T_m \geq 0, \quad \text{Im } T_m \leq 0.$$

Jako pole pobudzające weźmy falę $H_{1,0}$ z amplitudą równą jedności $E_z^p = \varphi_1^+$. Pole rozproszone na rdzeniu zdefiniujemy wewnątrz falowodu jako różnicę pól

$$/2.4/ \quad E_z^r = E_z - E_z^p$$

W obszarze 1 pole rozproszone możemy zapisać w postaci szeregu modów odbitych od rdzenia

$$/2.5/ \quad E_z^r = \sum_{m=1}^{\infty} R_m \varphi_m^-$$

gdzie przez R_m oznaczyliśmy współczynniki odbicia. Dodając do pola E_z^r danego przez /2.5/ pole padające, otrzymamy pole całkowite w obszarze 1.

$$/2.6/ \quad E_z = \varphi_1^+ + \sum_{m=1}^{\infty} R_m \varphi_m^- \quad ; \quad x < x_1$$

W obszarze 3 pole całkowite jest postaci

$$/2.7/ \quad E_z = \sum_{m=1}^{\infty} T_m \Psi_m^+ ; \quad x > x_2$$

gdzie przez T_m oznaczyliśmy współczynniki transmisji.

W zaprezentowanym tu podejściu problem rozpraszania na żyrotropowym rdzeniu sprowadza się do znalezienia współczynników R_m i T_m w rozwinięciach /2.6/ i /2.7/.

2.2. Warunki brzegowe

Rozbijemy teraz pole całkowite E_z na pole wewnątrz i na zewnątrz rdzenia

$$/2.8/ \quad E_z(x,y) = \begin{cases} E_z^{(1)}(x,y) & \text{dla } (x,y) \in S' \\ E_z^{(2)}(x,y) & \text{dla } (x,y) \in S \end{cases}$$

Pole $E_z^{(1)}(x,y)$ spełnia na ściankach falowodu warunek:

$$/2.9/ \quad E_z^{(1)}(x,0) = E_z^{(1)}(x,a) = 0$$

Na brzegu C obszaru S, rys.2, składowe styczne pola elektrycznego i magnetycznego powinny się zachowywać w sposób ciągły co prowadzi do zależności

$$/2.10/ \quad \vec{n} \times \vec{E}^{(1)} = \vec{n} \times \vec{E}^{(2)} ; \quad (x,y) \in C$$

$$/2.11/ \quad \vec{n} \times \vec{H}^{(1)} = \vec{n} \times \vec{H}^{(2)} ; \quad (x,y) \in C$$

gdzie przez $\vec{E}^{(1)}$, $\vec{H}^{(1)}$ oznaczono pola całkowite w S' , a przez $\vec{E}^{(2)}$, $\vec{H}^{(2)}$ całkowite pola w rdzeniu S. Ponieważ dla pól $H_{m,0}$ jedyną składową pól $\vec{E}^{(1)}$ i $\vec{E}^{(2)}$ jest składowa w kierunku osi z równanie /2.10/ prowadzi do warunku brzegowego

$$/2.12/ \quad E_z^{(1)}(x,y) = E_z^{(2)}(x,y) ; \quad (x,y) \in C$$

Rozpatrzmy teraz zależność /2.11/. W ośrodku izotropowym, a więc w S' otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \vec{n} \times \vec{H}^{(1)} &= \vec{n} \times \left(-\frac{i}{\omega \mu_1} \left[-\frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial y}, \frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial x}, 0 \right] \right) = -\frac{i}{\omega \mu_1} \cdot \vec{n} \times (\vec{i}_z \times \nabla E_z^{(1)}) = \\ &= -\frac{i}{\omega \mu_1} (\vec{n} \cdot \nabla E_z^{(1)}) \cdot \vec{i}_z \end{aligned}$$

Używając pochodnych kierunkowych otrzymujemy dla $(x, y) \in S'$

$$/2.13/ \quad \vec{n} \times \vec{H}^{(1)} = - \frac{i}{\omega \mu_1} \frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial \vec{n}} \cdot \vec{i}_z$$

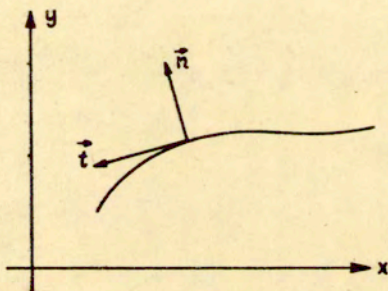
Przez \vec{i}_z oznaczony został wersor osi z.

W ośrodku żyotropowym, a więc w S analogiczna zależność komplikuje się. Zauważmy na początek, że

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A, -B \\ B, A \end{bmatrix} \cdot \nabla_{\perp} E &= \left[A \frac{\partial E}{\partial x} - B \frac{\partial E}{\partial y}, B \frac{\partial E}{\partial x} + A \frac{\partial E}{\partial y} \right] = \\ &= A \cdot \nabla_{\perp} E + B \left[- \frac{\partial E}{\partial y}, \frac{\partial E}{\partial x} \right] = A \cdot \nabla E + B \cdot \vec{i}_z \times \nabla E \end{aligned}$$

Policzmy teraz następujący iloczyn:

$$\begin{aligned} \vec{n} \times \left\{ \begin{bmatrix} A, -B \\ B, A \end{bmatrix} \cdot \nabla_{\perp} E \right\} &= A \cdot \vec{n} \times \nabla E + B \cdot \vec{n} \times (\vec{i}_z \times \nabla E) = \\ &= A \cdot \vec{n} \times \nabla E + B \cdot (\vec{n} \cdot \nabla E) \vec{i}_z \end{aligned}$$



Rys. 3

Przekształcimy teraz iloczyn $\vec{n} \times \nabla E$.

$$\begin{aligned} \vec{n} \times \nabla E &= \left[0, 0, n_x \frac{\partial E}{\partial y} - n_y \frac{\partial E}{\partial x} \right] = -\vec{i}_z (\vec{n} \cdot \vec{i}_z \times \nabla E) = \\ &= \vec{i}_z (\vec{n} \times \vec{i}_z \cdot \nabla E) = \vec{i}_z (\vec{t} \cdot \nabla E) \end{aligned}$$

Przez \vec{t} oznaczyliśmy wersor styczny do krzywej C, $\vec{t} = \vec{i}_z \times \vec{n}$, rys. 3,

tak że wersory $\vec{t}, \vec{n}, \vec{i}_z$ tworzą trójkę prawoskrętną. Używając pochodnych kierunkowych otrzymujemy ostatecznie tożsamość

$$/2.14/ \quad \vec{n} \times \left\{ \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \nabla_{\perp} E \right\} = \left(A \frac{\partial E}{\partial t} + B \frac{\partial E}{\partial n} \right) \cdot \vec{i}_z$$

gdzie wektor w nawiasie klamrowym należy rozumieć jako rozszerzenie do wektora trójwymiarowego przez dopisanie zera w miejscu współrzędnej z.

Porównując tożsamość /2.14/ ze wzorem dla pola H /2.21/ otrzymujemy dla $(x, y) \in S$ wyrażenie dla iloczynu $\vec{n} \times \vec{H}^{(2)}$

$$/2.15/ \quad \vec{n} \times \vec{H}^{(2)} = \frac{1}{\omega(\mu_2^2 - \mu_1^2)} \left(\mu_0 \frac{\partial E_z^{(2)}}{\partial t} + i\mu_2 \frac{\partial E_z^{(2)}}{\partial n} \right) \cdot \vec{i}_z$$

Korzystając z zależności /2.11/, /2.13/ i /2.15/ otrzymujemy poszukiwany warunek brzegowy zapewniający ciągłość składowych stycznych pola magnetycznego, na brzegu C żyotropowego rdzenia

$$/2.16/ \quad \frac{\mu_2^2 - \mu_1^2}{\mu_1} \frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial E_z^{(2)}}{\partial n} - i\mu_0 \frac{\partial E_z^{(2)}}{\partial t} ; (x, y) \in C$$

Kładąc we wzorze /2.16/ $\mu_0 = 0$ otrzymujemy klasyczny warunek

$\frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial n} = \frac{\partial E_z^{(2)}}{\partial n}$ obowiązujący dla nieciągłości parametrów ośrodka izotropowego. Warunek /2.16/ stanowi więc o istotnej różnicy pomiędzy zagadnieniem rdzenia dielektrycznego a zagadnieniem dla rdzenia żyotropowego. Należy zauważyć, że pozostałe warunki w przypadku pobudzeń $H_{m,0}$ a więc /2.12/, /2.9/ oraz samo równanie Helmholtza /2.1/, które musi spełniać składowa $E_z(x, y)$ są identyczne z dokładnością do współczynników z równaniem i warunkami brzegowymi dla rdzenia dielektrycznego. Występowanie pochodnej stycznej w warunku /2.16/ powoduje niemożność sprowadzenia zagadnienia do dwóch równań całkowych klasycznymi metodami, jak np. w pracy [2] lub [4].

Na zakończenie przekształćmy warunek /2.16/ do postaci, która będzie bardziej użyteczna w dalszym ciągu pracy. Oznaczmy przez \mathbb{C}^2 przestrzeń dwuwymiarowych wektorów zespolonych. Wprowadzimy różniczkowanie danej funkcji zespolonej $E(x, y)$ zmiennych rzeczywistych $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ w kierunku zespolonego wersora $\vec{A} \in \mathbb{C}^2$ jak następuje:

$$/2.17/ \quad \frac{\partial E(x, y)}{\partial \vec{A}} \triangleq \vec{A} \cdot \nabla E(x, y)$$

Jako wynik otrzymujemy z powrotem funkcję zespoloną zmiennych rzeczywistych $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Warunek /2.16/ przekształcimy teraz następująco

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial \vec{n}} &= \mathcal{L} \frac{\partial E_z^{(2)}}{\partial \vec{n}} - i\mathcal{L}\gamma \frac{\partial E_z^{(2)}}{\partial \vec{t}} = (\mathcal{L} \cdot \vec{n} - i\mathcal{L}\gamma \cdot \vec{t}) \cdot \nabla E_z^{(2)} = \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{L} n_x - i\mathcal{L}\gamma t_x \\ \mathcal{L} n_y - i\mathcal{L}\gamma t_y \end{pmatrix} \cdot \nabla E_z^{(2)} = \mathcal{N} \begin{bmatrix} \mathcal{L} \\ -i\mathcal{L}\gamma \end{bmatrix} \cdot \nabla E_z^{(2)} \end{aligned}$$

gdzie

$$/2.18/ \quad \mathcal{L} = \frac{\mu_1 \cdot \mu_2}{\mu_2^2 - \mu_a^2} ; \quad \gamma = \frac{\mu_a}{\mu_2} ; \quad \mathcal{N} = \begin{bmatrix} n_x, -n_y \\ n_y, n_x \end{bmatrix}$$

Macierz \mathcal{N} jest macierzą obrótu układu współrzędnych prostokątnych związanych z parą \vec{n}, \vec{t} , rys.3 do układu współrzędnych prostokątnych x, y . Tak więc z warunku /2.16/ otrzymaliśmy warunek

$$/2.19/ \quad \frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial \vec{n}} = \mathcal{N} \circ \vec{W} \cdot \nabla E_z^{(2)} ; \quad \vec{W} = [\mathcal{L}, -i\mathcal{L}\gamma].$$

Normując wektor \vec{W}

$$\vec{W} = \mathcal{L} \sqrt{1 + \gamma^2} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2}}, -i\gamma / \sqrt{1 + \gamma^2} \right] = \beta \vec{W}$$

warunek /2.19/ możemy, korzystając z definicji /2.17/, zapisać

$$/2.20/ \quad \frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial \vec{n}} = \beta \frac{\partial E_z^{(2)}}{\partial \vec{V}} ; \quad (x, y) \in \mathbb{C}$$

$$\text{gdzie: } \beta = \mathcal{L} \sqrt{1 + \gamma^2} = \mu_1 \frac{\sqrt{\mu_2^2 + \mu_a^2}}{\mu_2^2 - \mu_a^2} ; \quad \vec{V} = \mathcal{N} \circ \vec{w}$$

Oprócz postaci /2.20/, która będzie użyta w dalszej części pracy warunek /2.16/ możemy przepisać w innej, mogącej być podstawą różnych ciekawych interpretacji. Okazało się bowiem, że istnieje taki zespolony kierunek \vec{a} w przestrzeni \mathbb{C}^2 , że

$$/2.21/ \quad \frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial \vec{a}} = \mathcal{L} \frac{\partial E_z^{(2)}}{\partial \vec{a}} ; \quad (x, y) \in \mathbb{C}$$

gdzie \mathcal{L} jest liczbą rzeczywistą zdefiniowaną przez /2.18/ zaś wektor \vec{a} jest równy

$$/2.22/ \quad \vec{a} = \frac{1}{|\vec{A}|} \mathcal{N} \circ \vec{A} ; \quad \vec{A} = \left[\frac{\mathcal{L}-1}{\mathcal{L}}, -i\gamma \right]$$

Warunek /2.21/ jest uogólnieniem analogicznego warunku dla rdzeni dielektrycznych z tą różnicą, że różniczkujemy w kierunku

ku wektora \vec{a} odchylonego w urojonym kierunku od wektora normalnego \vec{n} .

3. Układ równań całkowych dla żyotropowego rdzenia w falowodzie pobudzonym rodzajami $H_{m,0}$

3.1. Wzory określające pole

Głównym narzędziem jakim się tutaj posłużymy, będzie dwuwymiarowa, symetryczna tożsamość Greena, potencjały dla dwuwymiarowego równania Helmholtza oraz twierdzenia o skokach przy przejściu przez krzywą dla tych potencjałów.

Niech

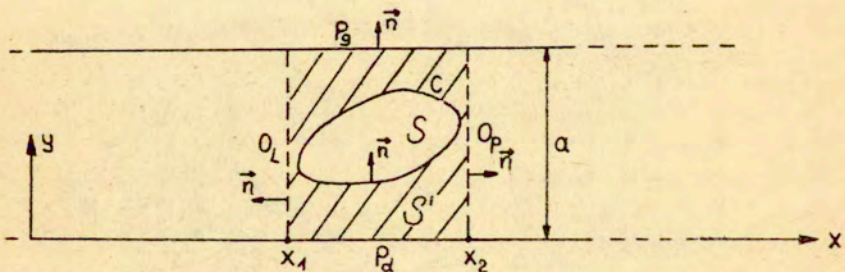
$$/3.1/ \quad \Phi(\tau, \tau') = \sum_{m=1}^{\infty} (a_i T_m)^{-1} \sin\left(\frac{m\pi}{a} y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a} y'\right) e^{-i T_m |x-x'|}$$

Funkcja $\Phi(\tau, \tau')$ jest rozwiązaniem równania

$$/3.2/ \quad \nabla_{\tau}^2 \Phi(\tau, \tau') + k_1^2 \Phi(\tau, \tau') = -\delta(\tau - \tau')$$

zaś współczynniki T_m określamy jak następuje

$$/3.3/ \quad T_m = \sqrt{k_1^2 - \frac{m^2 \pi^2}{a^2}} \quad ; \quad \text{Re } T_m \gg 0 \quad ; \quad \text{Im } T_m \leq 0$$



Rys. 4

Funkcja ta zeruje się na ściankach falowodu $y, y' = 0$, oraz $y, y' = a$ stąd funkcja ta jest funkcją Greena dla modów $H_{m,0}$ w falowodzie prostokątnym.

Stosując symetryczny wzór Greena oraz wykorzystując zerowanie się na ściankach P_g i P_d zarówno $E_z^{(1)}(r)$ jak i $\Phi(r, r')$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} E_z^{(1)}(r) = & \oint_C \left[\Phi(r, r') \frac{\partial E_z^{(1)}(r')}{\partial \vec{n}_{r'}} - \frac{\partial \Phi(r, r')}{\partial \vec{n}_{r'}} E_z^{(1)}(r') \right] dl_{r'} \\ /3.4/ & + \int_{O_L \cup O_P} \left[\Phi(r, r') \frac{\partial E_z^{(1)}(r')}{\partial \vec{n}_{r'}} - \frac{\partial \Phi(r, r')}{\partial \vec{n}_{r'}} E_z^{(1)}(r') \right] dl_{r'} \quad (*) \end{aligned}$$

Podobnie jak w podpunkcie 2.1 jako pole pobudzające weźmiemy falę $H_{1,0}$ tym razem z amplitudą równą \mathcal{A} , $E_z^p = \mathcal{A} \cdot \varphi_1^+$, propagującą się w kierunku dodatnich wartości na osi x . Korzystając z postaci pola E_z dla $r \in O_L$ i $r \in O_P$, wzory /2.6/ i /2.7/, można pokazać /por. [5], dodatek 1/ następujące równości

$$\begin{aligned} \int_{O_L} \left[\Phi(r, r') \frac{\partial E_z^{(1)}(r')}{\partial \vec{n}_{r'}} - \frac{\partial \Phi(r, r')}{\partial \vec{n}_{r'}} E_z^{(1)}(r') \right] dl_{r'} &= \mathcal{A} \cdot \varphi_1^+(r) = E_z^p(r) \\ \int_{O_P} \left[\Phi(r, r') \frac{\partial E_z^{(1)}(r')}{\partial \vec{n}_{r'}} - \frac{\partial \Phi(r, r')}{\partial \vec{n}_{r'}} E_z^{(1)}(r') \right] dl_{r'} &= 0 \end{aligned}$$

Korzystając z tych równości otrzymujemy z /3.4/ wzór Kirchoffa dla $r \in S'$ czyli dla pola $E_z^{(1)}(r)$:

$$/3.5/ \quad E_z^{(1)}(r) = E_z^p(r) + \oint_C \left[\Phi(r, r') \frac{\partial E_z^{(1)}(r')}{\partial \vec{n}_{r'}} - \frac{\partial \Phi(r, r')}{\partial \vec{n}_{r'}} E_z^{(1)}(r') \right] dl_{r'}$$

dla $r \in S'$, $r' \in C$

Jak pokazaliśmy w podpunkcie 2.1, problem rozpraszania na rżeniu sprowadza się do poszukiwania współczynników R_m i T_m rozwinięć /2.6/ i /2.7/. Porównując wzory /2.6/, /2.5/ i /3.5/ widzimy, że całka występująca we wzorze /3.5/ jest właśnie nieznanym polem rozproszenia w obszarze Π , rys.2, dla $r \in S'$. Wymnożmy zależność /2.5/ przez $\sin \frac{l\pi}{a} y$ i scałkujemy dla $x = x_1$ w przedziale $[0, a]$. To samo zrobimy z całką we wzorze /3.5/. Z otrzymanych zależności możemy wyliczyć współczynniki odbicia R_l , $l = 1, 2, \dots$;

$$/3.6/ \quad R_l = \frac{1}{a \cdot i \cdot \pi_l} \oint_C \left\{ \sin \left(\frac{l\pi}{a} y \right) e^{-i\pi_l x'} \frac{\partial E_z^{(1)}(r')}{\partial \vec{n}_{r'}} - \frac{\partial}{\partial \vec{n}_{r'}} \left[\sin \left(\frac{l\pi}{a} y \right) e^{-i\pi_l x'} \right] E_z^{(1)}(r') \right\} dl_{r'}$$

(*) \oint - całka w sensie wartości głównej Cauchy'ego

Postępując podobnie z zależnością /2.7/ i całą prawą stroną wzoru /3.5/ możemy wyliczyć współczynniki transmisji \mathbb{T}_l , $l = 1, 2, 3, \dots$

$$/3.7/ \quad \mathbb{T}_l = A \cdot \delta_{l,1} + \frac{1}{a \cdot i \cdot \tau_l} \oint_C \left\{ \sin\left(\frac{l\pi}{a} y\right) e^{i\tau_l x'} \cdot \frac{\partial E_2^{(1)}}{\partial \bar{n}_r} - \frac{\partial}{\partial \bar{n}_r} \left[\sin\left(\frac{l\pi}{a} y\right) e^{i\tau_l x'} \right] \cdot E_2^{(1)}(r') \right\} dl_r$$

gdzie przez $\delta_{l,1}$ oznaczona została delta Kroneckera.

Wzory /3.6/ i /3.7/ pozwalają obliczać współczynniki odbicia i transmisji bez znajomości całego pola w obszarze 1 i 3 a tylko w oparciu o dwie funkcje $E_2^{(1)}|_C(r)$ i $\frac{\partial E_2^{(1)}}{\partial \bar{n}_r}|_C(r)$ określone na krzywej C. Zauważmy, że gdyby celem obliczeń było znalezienie jednego tylko z wymienionych współczynników, na przykład R_1 , wtedy wystarczyłaby znajomość jednej funkcji na brzegu C

$$/3.8/ \quad p_1(r) \triangleq f_1(r) \frac{\partial E_2^{(1)}}{\partial \bar{n}_r}(r) - \frac{\partial f_1(r)}{\partial \bar{n}_r} E_2^{(1)}(r) \quad ; \quad r \in C$$

$$\text{oraz} \quad f_1(r) = \sin\left(\frac{l\pi}{a} y\right) e^{-i\tau_l x}$$

Wtedy

$$/3.9/ \quad R_1 = \frac{1}{a \cdot i \cdot \tau_1} \oint_C p_1(r) dl_r$$

Zagadnieniem poszukiwania funkcji $E_2^{(1)}|_C(r)$ i $\frac{\partial E_2^{(1)}}{\partial \bar{n}_r}|_C(r)$ zajmemy się w następnym podpunkcie.

3.2. Układ równań całkowych

Aby wyprowadzić równania wiążące ze sobą funkcje $E_2^{(1)}$ i $\frac{\partial E_2^{(1)}}{\partial \bar{n}}$ musimy wpierrw określić pole $E_2^{(2)}(r)$, dla $r \in S$ a następnie, przy użyciu warunków brzegowych powiązać ze sobą oba pola w układ równań.

Niech

$$/3.10/ \quad \Psi(r, r') = -\frac{1}{4} N_0(k_2 |r - r'|) \quad ; \quad r, r' \in R^2 \quad ; \quad N_0 - \text{f. Neumanna}$$

Funkcja $\Psi(r, r')$ jest rozwiązaniem następującego równania

$$/3.11/ \quad \nabla_r^2 \Psi(r, r') + k_2^2 \Psi(r, r') = -\delta(r - r')$$

Pole $E_2^{(2)}(r)$ w obszarze S możemy wyrazić przy pomocy potencjału warstwy pojedynczej / [6], str. 155 / z pewną niewiadomą gęstością ρ :

$$/3.12/ \quad E_2^{(2)}(r) = \oint_C \Psi(r, r') \rho(r') dl_r$$

Przechodząc z punktem r do krzywej C oraz wykorzystując warunek brzegowy /2.12/ otrzymujemy równanie

$$/3.13/ \quad E_2^{(1)}(r) - \oint_C \Psi(r, r') \rho(r') dl_{r'} = 0 \quad ; \quad r \in C$$

Jeżeli w równaniu /3.13/ potraktować funkcję $E_2^{(1)}(r)$ jako daną to równanie to staje się wtedy równaniem Fredholma pierwszego rodzaju z symetrycznym jądrem.

Ponieważ wiemy, że pole $E_2^{(2)}$ można wyrazić wzorem /3.12/, dla funkcji $E_2^{(1)}$ będącej wartością brzegową rozwiązania równania Helmholtza $E_2^{(1)}(r)$ dla $r \in S'$, równanie /3.13/ musi posiadać co najmniej jedno rozwiązanie dla ρ . Rozwiązanie to będzie jednoznaczne jeśli układ funkcji własnych operatora Ψ będzie układem zupełnym /por. [7], str.68/.

Zrózniczkujemy teraz zależność /3.12/ w myśl definicji /2.17/ w kierunku zespolonego wektora $\bar{\nabla}_r$ i pomnożmy otrzymaną zależność przez β .

$$/3.14/ \quad \beta \cdot \frac{\partial E_2^{(2)}}{\partial \bar{\nabla}_r}(r) = \oint_C \beta \frac{\partial \Psi(r, r')}{\partial \bar{\nabla}_r} \rho(r') dl_{r'}$$

Jeżeli wektorem $\bar{\nabla}_r$ będzie wersor z warunku brzegowego /2.20/ to będzie on związany z wersorem \bar{n}_r normalnym do krzywej C w punkcie r , za pośrednictwem macierzy obrotu T :

$$/3.15/ \quad \bar{\nabla}_r = T \cdot \bar{n}_r \quad ; \quad T = \begin{bmatrix} t_1 & it_2 \\ -it_2 & t_1 \end{bmatrix}$$

gdzie:

$$t_1 = (1 + \gamma^2)^{-\frac{1}{2}} \quad ; \quad t_2 = \gamma \cdot (1 + \gamma^2)^{-\frac{1}{2}} \quad ; \quad \gamma = \frac{\mu_0}{\mu_2}$$

zaś we współrzędnych związanych z parą \bar{n}_r, \bar{t}_r wyrazi się wzorem

$$/3.16/ \quad \bar{\nabla}_r = t_1 \bar{n}_r - it_2 \bar{t}_r$$

Korzystając z ciągłości pochodnej w kierunku stycznym \bar{t}_r potencjału /3.12/ i skoku jego pochodnej w kierunku normalnej \bar{n}_r możemy przejść we wzorze /3.14/ z punktem r do krzywej C . Wykorzystując warunek brzegowy /2.20/ otrzymamy kolejne równanie całkowe

$$/3.17/ \quad \frac{\partial E_2^{(1)}}{\partial \bar{n}_r}(r) - \frac{\beta \cdot t_1}{2} \rho(r) - \beta \oint_C \frac{\partial \Psi(r, r')}{\partial \bar{\nabla}_r} \rho(r') dl_{r'} = 0$$

Równanie /3.17/ jest równaniem osobliwym. Jeżeli potraktować w równaniu /3.17/ funkcję $\frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial \vec{n}}$ jako daną to otrzymamy niejednorodne równanie drugiego rodzaju dla funkcji gęstości ρ . Ponieważ wektor $\vec{\nabla}_r$ nigdzie nie jest styczny do C dla równania tego, pomimo osobliwości, słuszna jest alternatywa Fredholma /por. [6], str.155/.

Ostatnie, trzecie równanie otrzymamy przechodząc z punktem r do C we wzorze /3.5/ określającym pole w S^* ,

$$/3.18/ \quad \frac{1}{2} E_z^{(1)}(r) + \oint_C \frac{\partial \Phi(r, r')}{\partial \vec{n}_{r'}} E_z^{(1)}(r') dl_{r'} - \oint_C \Phi(r, r') \frac{\partial E_z^{(1)}(r')}{\partial \vec{n}_{r'}} dl_{r'} = E_z^p(r)$$

uwzględniając skok pierwszej z całek w /3.18/ /por. [4]/. Otrzymane równanie jest osobliwe. Jeśli potraktować w tym równaniu $\frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial \vec{n}_r}(r)$ jako funkcję daną, to otrzymamy osobliwe równanie drugiego rodzaju dla funkcji $E_z^{(1)}$. Równanie to posiada jednoznaczne rozwiązanie /por. [8]/.

Równania /3.13/, /3.17/ i /3.18/ możemy teraz zapisać w postaci układu równań całkowych

$$/3.19/ \quad \begin{cases} e - L(\rho) = 0 \\ e_n - \alpha \cdot \rho - M(\rho) = 0 \\ e + K_1(e) + K_2(e_n) = f \end{cases}$$

gdzie wprowadzone zostały następujące oznaczenia:

$$/3.20/ \quad e \triangleq E_z^{(1)}|_C, \quad e_n \triangleq \frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial \vec{n}_r}|_C, \quad \rho \triangleq \rho|_C, \quad \alpha = \frac{\beta \cdot t_1}{2}$$

$$/3.21/ \quad L(\rho) \triangleq \oint_C \Psi(r, r')|_{r \in C} \rho(r') dl_{r'}$$

$$/3.22/ \quad M(\rho) \triangleq \beta \oint_C \frac{\partial \Psi(r, r')}{\partial \vec{\nabla}_r}|_{r \in C} \rho(r') dl_{r'}$$

$$/3.23/ \quad K_1(\rho) \triangleq 2 \oint_C \frac{\partial \Phi(r, r')}{\partial \vec{n}_{r'}}|_{r \in C} \rho(r') dl_{r'}$$

$$/3.24/ \quad K_2(\rho) \triangleq -2 \oint_C \Phi(r, r')|_{r \in C} \rho(r') dl_{r'}$$

$$/3.25/ \quad f \triangleq 2 E_2^p(\tau)$$

gdzie: $\int \equiv$ całka w sensie wartości głównej Cauchy'ego

Założmy, że operator L jest zupełny zaś \mathcal{K} nie jest wartością własną operatora M . Można pokazać, że jeśli istnieją dwie trójki rozwiązań spełniające układ /3.19/ to musi zachodzić $\vartheta - \vartheta' \neq 0$, $e - e' \neq 0$ i $e_n - e'_n \neq 0$ jednocześnie. Jeżeli wziąć pod uwagę, że operator K_2 jest zupełny, co bez dowodu podaje autor [8], to otrzymany układ posiada jednoznaczne rozwiązanie.

3.3. Równanie całkowe Fredholma pierwszego rodzaju

Wyliczmy z pierwszego równania układu /3.19/ e , z drugiego e_n i podstawmy do trzeciego. Układ równań /3.19/ redukuje się do jednego równania całkowego, pierwszego rodzaju dla funkcji gęstości ϑ :

$$/3.26/ \quad [L + K_1 \circ L + \mathcal{K} K_2 + K_2 \circ M](\vartheta) = f$$

Rozwiązując równanie /3.26/ możemy wygenerować funkcje e oraz e_n wzorami otrzymanymi z dwóch pierwszych równań układu /3.19/.

$$/3.27/ \quad e = L(\vartheta) \quad , \quad e_n = \mathcal{K} \cdot \vartheta + M(\vartheta)$$

Te z kolei podstawiając do /3.5/ oraz wzorów na współczynniki /3.6/ i /3.7/ dają nam wzory na pole $E_2^{(n)}(\tau)$ dla $\tau \in S'$ oraz \mathbb{T}_L i R_L .

Tak więc okazuje się, że całe pole elektromagnetyczne zarówno w obszarze S jak i S' można otrzymać w rozpatrywanym przypadku przy użyciu jednej funkcji jednej zmiennej określonej na brzegu rdzenia C , spełniającej równanie całkowe pierwszego rodzaju. Ten sam wynik można otrzymać dla rdzeni dielektrycznych i dowolnych pobudzeń w oparciu o funkcje potencjalne rozkładu na mody podłużne PPE i PPM.

Zajmijmy się teraz zbadaniem całkowalności jądra operatora, występującego w równaniu /3.26/ w postaci sumy jąder poszczególnych operatorów i ich iteracji.

Jądro operatora L posiada osobliwość logarytmiczną na dowolnej krzywej, stąd $L \in \mathcal{L}^2[C \times C]$. Taką samą osobliwość posiada ją-

dro operatora K_2 co wynika z faktu, że funkcja Greena rodzaju $H_{m,0}$ spełnia niejednorodne równanie Helmholtza z δ Diraca.

Jeśli od funkcji Φ odjąć inną, spełniającą to równanie, np: Ψ to różnica $\chi \triangleq \Phi - \Psi$ będzie spełniała w całym rozpatrywanym obszarze równanie jednorodne, a stąd nie będzie już posiadała osobliwości w żadnym punkcie. Tak więc Φ i Ψ posiadają osobliwość tego samego typu i stąd

$$K_2 \in \mathcal{L}^2 [C \times C]$$

Jeśli rozpatrywać operator M to posiada on istotnie osobliwą część w postaci czynnika $\partial \Psi(r, r') / \partial \bar{t}$ gdzie \bar{t} wektor styczny do krzywej. Osobliwość tą można przedstawić w pobliżu $\bar{r} = \bar{r}'$ jako

$$/3.28/ \quad \left(\frac{\partial \Psi(r, r')}{\partial \bar{t}} + \frac{\bar{t} \cdot (\bar{r} - \bar{r}')}{2\pi |\bar{r} - \bar{r}'|^2} \right) \in \mathcal{O}(z^\alpha) \quad 0 < \alpha < 1$$

Tak więc dla funkcji ciągłych \oint operator M możemy liczyć w sensie wartości głównej Cauchy /por. [9], str. 315/.

Nie przeprowadzając analizy osobliwości operatora K_1 , autor pracy [8] podaje, że operator ten należy traktować tak samo jak rozważany powyżej operator M . Ponieważ jądra operatorów K_1 i M iterowane są z jądrami L i $K_2 \in \mathcal{L}^2 [C \times C]$ otrzymujemy, że operator dany równaniem /3.26/ posiada jądro należące do $\mathcal{L}^2 [C \times C]$, a więc otrzymane równanie jest równaniem Fredholma pierwszego rodzaju.

4. Numeryczne rozwiązywanie równania całkowego

Równanie całkowe /3.26/ może być rozwiązywane przy użyciu metody momentów [10], zapisując to równanie w postaci

$$/4.1/ \quad \int_0^B F(s, s') g(s') ds' = f(s) \quad s \in [0, B]$$

gdzie $r(s), r'(s) \in C$ - parametryzacja krzywej C
 Nieznana funkcja $g(s)$ jest aproksymowana przez liniową kombinację N ortogonalnych funkcji

$$/4.2/ \quad g(s) = \sum_{i=1}^N A_i U_i(s)$$

Dziedzina całkowania podzielona jest na N części l_i ($i = 1, 2, \dots, N$) zaś funkcje U_i można przyjąć jako funkcje prostokątne:

$$/4.3/ \quad U_i(s) = \begin{cases} 1; & s \in l_i \\ 0; & s \notin l_i \end{cases}$$

Podstawiając to do równania /4.1/ otrzymujemy

$$/4.4/ \quad \sum_{i=1}^N F_{j,i} A_i = f_j \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, N.$$

gdzie: $f_j = f(s_j)$

Punkt s_j jest środkiem odcinka l_j .

Dla operatora F danego równaniem /3.26/ otrzymamy

$$/4.5/ \quad F_{j,i} = L_{j,i} + \sum_{p=1}^N K_{1;j,p} \cdot L_{p,i} + \mathcal{L} \cdot K_{2;j,i} + \sum_{p=1}^N K_{2;j,p} \cdot M_{p,i}$$

gdzie:

$$L_{j,i} = \int_{l_i} \Psi(r(s_j), r'(s)) ds' \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

$$K_{1;j,i} = \int_{l_i} 2 \frac{\partial \Phi(r(s_j), r'(s'))}{\partial \bar{n}_{r'}} ds' \quad \text{dla } j \neq i$$

$$K_{1;j,j} = \int_{l_j} 2 \frac{\partial \Phi(r(s_j), r'(s))}{\partial \bar{n}_{r'}} ds'$$

Podobnie określimy macierze nieosobliwego operatora K_2 i osobliwego M . Całki zwykle możemy liczyć klasycznymi metodami, np. procedurą Simpsona. Całki osobliwe, których musimy policzyć $2N$, N całek $K_{1;j,j}$ i N całek $M_{j,j}$ ($j = 1, 2, \dots, N$) należy liczyć używając specjalnych technik. W pracy [8] podana jest technika obliczania całek $K_{1;j,j}$. Wykorzystuje ona

asympotyczne wyrażenie dla reszty szeregu, którym określona jest funkcja rodzajów $H_{m,0}, \Phi(r,r')$
 Całki $M_{j,j}$ możemy rozpisać korzystając z definicji zespolonego wektora \vec{V}_r , /3.16/ oraz przybliżenia /3.28/

$$/4.6/ \quad M_{j,j} \approx \beta \cdot t_1 \int_{l_j} \frac{\partial \Psi(r(s), r'(s))}{\partial \vec{n}_r} ds + \frac{i \beta t_2}{2 \pi} \int_{l_j} \frac{\vec{t}(s)(\vec{r}(s) - \vec{r}'(s))}{|\vec{r}(s) - \vec{r}'(s)|^2} ds$$

Ostatnią całkę liczymy w sensie wartości głównej Cauchy /por. [9], str. 315/. Wektor $\vec{t}(s_j)$ jest wektorem stycznym do krzywej w punkcie s_j , $\vec{t}(s_j) = (x'(s_j), y'(s_j))$ gdzie $(x(s), y(s)) = \vec{r}(s)$ parametryzacja krzywej.

W opisanej metodzie zastosowanie funkcji prostokątnych $\check{U}_i(s)$ danych /4.3/ pozwoliło sprowadzić obliczanie macierzy $F_{j,i}$ jądra równania całkowego /3.26/ do dodawania i mnożenia macierzy operatorów L, K_1, K_2 i M . Zastosowanie innej wersji metody momentów skomplikuje tę procedurę.

W efekcie takiego postępowania otrzymujemy układ N równań algebraicznych, liniowych z N niewiadomymi współczynnikami zespolonymi A_j rozwinięcia /4.2/. Fakt ten ma o tyle duże znaczenie, że znacznie mniej czasu jak i pamięci maszynowej komputera zajmuje mnożenie i dodawanie macierzy danych wzorem /4.5/ niż gdyby nam przyszło rozwiązywać układ dwóch równań całkowych jaki np. dla rdzenia dielektrycznego otrzymują autorzy pracy [4]. W tym bowiem wypadku należy rozwiązywać układ $2N \times 2N$ równań algebraicznych co jest czterokrotnie dłuższe w czasie niż rozwiązywanie układu $N \times N$ równań.

5. Posłowie

Zarysowuje się w tym miejscu hipoteza, że minimalną liczbą równań całkowych Fredholma do jakich daje się sprowadzić dane zagadnienie brzegowe jest minimalna liczba skalarnych funkcji potencjalnych opisujących pole elektromagnetyczne w tym zagadnieniu.

W tym przypadku otrzymaliśmy równanie 1-go rodzaju. Można pójść dalej i postawić pytanie, czy zawsze jest możliwe otrzy-

manie wyżej wymienionej liczby równań całkowych Fredholma drugiego rodzaju.

Literatura

- [1] A. GUREWICZ - Ferryty w zakresie mikrofal. PWN, Warszawa 1964.
- [2] M. SOWIŃSKI - Analiza zakończeń falowodów prostokątnych przy pomocy równań całkowych, Prace IPPT PAN, 20/1978
- [3] R. COLLIN - Prowadzenie fal elektromagnetycznych. WNT, Warszawa 1966
- [4] G. MUR, D. QUAK, G. VAN DIJK - Computational aspects of electromagnetic waves by a dielectric obstacle in a waveguide of rectangular cross - section, Santa Margherita Ligure /Italy/, June 1976
- [5] M. SOWIŃSKI, M. SZALEK - O pewnym zagadnieniu brzegowym dla równania Helmholtza. Prace IPPT PAN, 40/1977
- [6] P.B.M. - Równania liniowe fizyki matematycznej, PWN, Warszawa 1970
- [7] P.B.M. - Równania całkowe, PWN, Warszawa 1972
- [8] G. JONG - Scattering by a perfectly conducting cylindrical obstacle in a rectangular waveguide. Int.J.Electronics, 1972, vol.32, No 2, 153-167
- [9] P.B.M. - Analiza funkcjonalna, PWN, Warszawa 1967
- [10] R. HARRINGTON - Field computation by moment methods, New York: The Macmillan Company 1960

Spis treści

	str.
Streszczenie	3
1. Równania różniczkowe pola w falowodzie z rdzeniem żyotropowym.	4
1.1. Postawienie problemu	4
1.2. Separacja równań Maxwella dla falowodu z rdzeniem żyotropowym.	5
1.3. Rodzaje $H_{m,0}$ w falowodzie z rdzeniem żyotropowym.	7
1.4. Przypadek ośrodka jednoosiowo anizotropowego	8
2. Rozpraszanie na rdzeniu żyotropowym w falowodzie pobudzonym rodzajami $H_{m,0}$	10
2.1. Sformułowanie problemu	10
2.2. Warunki brzegowe	12
3. Układ równań całkowych dla żyotropowego rdzenia w falowodzie pobudzonym rodzajami $H_{m,0}$	16
3.1. Wzory określające pole	16
3.2. Układ równań całkowych	18
3.3. Równanie całkowe Fredholma pierwszego rodzaju	21
4. Numeryczne rozwiązywanie równania całkowego	22
5. Posłowie.	24
Literatura	25