36/1980

Zbigniew Spólnicki

ALGORYTM SUMOWANIA TENSOROWEGO WIELU STANÓW NAPRĘŻEŃ

P. 269

WARSZAWA 1980

http://rcin.org.pl

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 6 czerwca 1980 r.

Zarejestrowana pod nr 36/1980

57124

Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 150 egz. Ark.wyd. 1,3. Ark.druk. 1,75
Oddano do drukarni we wrześniu 1980 r.
Nr zamówienia 626/e/80

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

http://rcin.org.pl

Zbigniew Spólnicki
Studia Doktoranckie
Politechniki Warszawskiej

ALGORYTM SUMOWANIA TENSOROWEGO WIELU STANÓW NAPRĘŻEŃ x/

1. Wstęp

We współczesnych konstrukcjach stalowych coraz rzadziej występują elementy, w których nie analizuje się możliwości zmniejszenia ich ciężaru przy równoczesnym zachowaniu żądanych własności wytrzymałościowych. Uważa się kształt konstrukcji za optymalny, jeżeli w stanie granicznym cała jego objętość spełnia założony warunek uplastycznienia. Spełnienie powyższych założeń jest możliwe z pewnym przybliżeniem przy zastosowaniu metody statycznie dopuszczalnych nieciągłych pól naprężeń opartej na twierdzeniu o dolnej ocenie nośności granicznej [1] . Dobierając te pola w odpowiedni sposób, tzn. budując siatki statycznie dopuszczalnych pól naprężeń, można przy danym schemacie obciążenia racjonalnie dobrać zarówno kształty, jak i wymiary projektowanego elementu.

Nowe możliwości projektowania elementów konstrukcji stalowych przy użyciu statycznie dopuszczalnych nieciągłych pól naprężeń daje metoda zaproponowana w pracy [2] , w której to przez nakładanie na siebie elementarnych układów linii nieciągłości, czy też elementarnych statycznie dopuszczalnych jednorodnych pól naprężeń [3] i po zsumowaniu odpowiednich tensorów naprężeń, można otrzymać nowe, bardzo różnorodne układy, przydatne w kształtowaniu elementów konstrukcji stalowych.

---

x/ Praca wykonana na zlecenie IPPT PAN w ramach problemu węzłowego 05.12.

http://rcin.org.pl

Aby określić wypadkowy stan naprężenia, należy dokonać sumowania odpowiednich stanów naprężeń z elementarnych pól naprężeń, przy zachowaniu procedury przedstawionej w pracy [2] . Można to uzyskać na drodze przekształceń matematycznych lub też wykorzystując metodę wykreślną. Metody te stają się jednak bardzo pracochłonne i czasochłonne, gdy liczba obszarów uzyskanych przez nakładanie podstawowych układów linii nieciągłości jest duża lub, gdy liczba sumowanych tensorów naprężeń w danym obszarze przekracza liczbę 2. Aby uniknąć tych niedogodności zbudowano algorytm i napisano program na EMC-ODRA 1305. Jego przydatność sprawdzono na kilku przykładach.

2. Rozważania teoretyczne

Wstępnie przyjmujemy, że w zagadnieniu dodawania tensorowego wielu stanów naprężeń wszelkie obliczenia wykonywane będą w płaskim stanie naprężenia dla dwóch warunków plastyczności:

a/ warunku Hubera-Misesa

/2.1/ $\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_{pl}^2$, gdzie $\sigma_{pl} = k_H\sqrt{3}$;

b/ warunku Treski

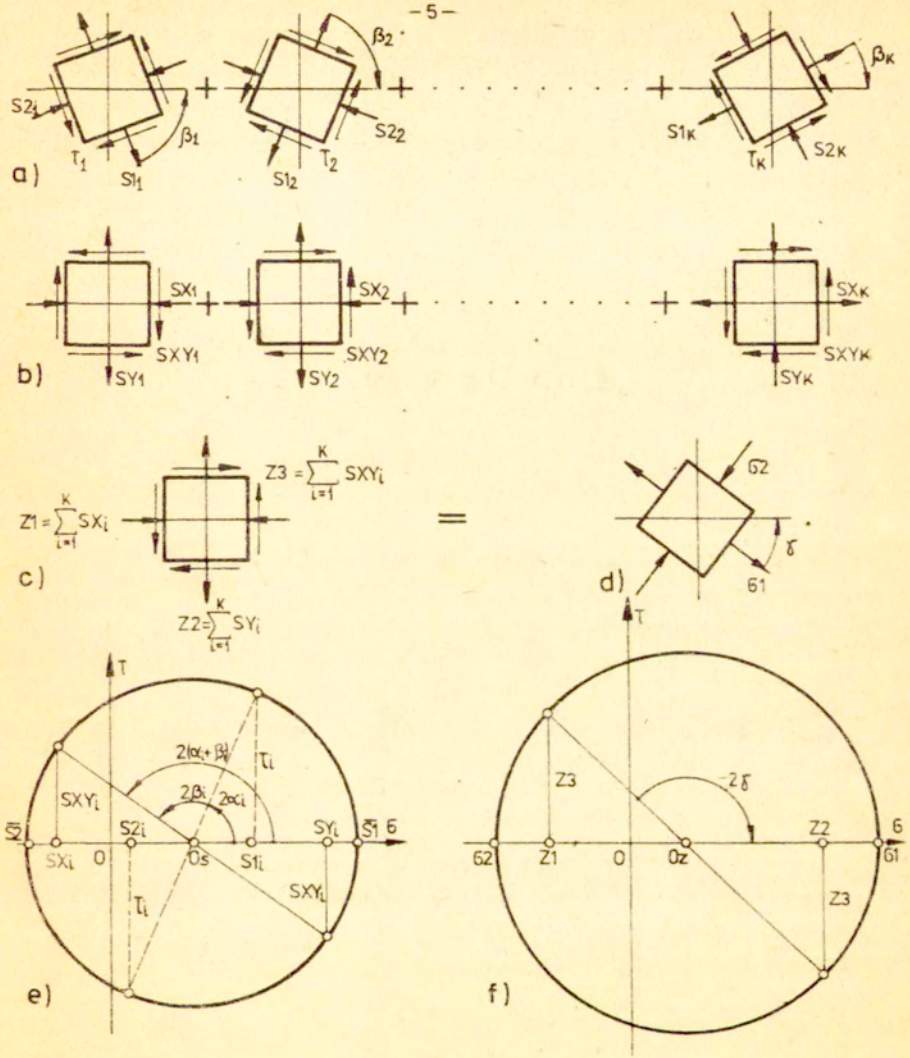
/2.2/ $|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_{pl}$, gdzie $\sigma_{pl} = 2\cdot k_T$.

Gdy w jednym z obszarów zachodzi warunek $\sigma_i, \sigma_j > 0$, wyniki są słuszne tylko dla płaskiego stanu odkształcenia, natomiast dla płaskiego stanu naprężenia muszą być spełnione dodatkowe warunki $|\sigma_i| \leqslant \sigma_{pl}$, $|\sigma_j| \leqslant \sigma_{pl}$

Chcąc dodawać tensory musimy z góry obrać układ współrzędnych. Do poniższych rozważań przyjmujemy inercjalny płaski układ odniesienia OXY we współrzędnych kartezjańskich. Nakładając w tym układzie współrzędnych na siebie elementarne układy linii nieciągłości, czy też elementarne statycznie dopuszczalne jednorodne pola naprężeń otrzymujemy nowe wynikowe pole. Natomiast, aby otrzymać wypadkowy stan naprężenia w każdym obszarze tego pola, musimy zsumować odpowiednie tensory naprężeń z pól podstawowych.

W pracy [2] nakładano na siebie tylko dwa elementarne układy linii nieciągłości lub elementarne statycznie dopuszczalne jednorodne pola naprężeń. W wyniku tego sumowano tylko dwa stany naprężeń reprezentowane przez naprężenia główne σ_1, σ_2

http://rcin.org.pl



Rys.1 Sumowanie K-tensorów naprężeń: a) ogólne stany naprężeń, b) osiowe stany naprężeń, c) osiowy wypadkowy stan naprężenia, d) wypadkowy stan naprężenia przedstawiony przez naprężenia główne, e) odwzorowanie i-tego stanu naprężenia na płaszczyźnie kół Mohra $T=f(\sigma)$, f) odwzorowanie j-tego wypadkowego stanu naprężenia na płaszczyźnie kół Mohra $T=f(\sigma)$

http://rcin.org.pl

oraz $S_1; S_2$ /K=2/.

W niniejszej pracy uogólniamy sumę nakładanych elementarnych układów linii nieciągłości do $K \geq 2$ /rys.1/. Ponadto uogólniamy elementarny stan naprężenia, reprezentując go przez naprężenia normalne S1i, S2i i styczne τ_i, gdzie i =1,2....K. Większe z naprężeń normalnych $\max\{S1i, S2i\}$ odchylone jest od dodatniego kierunku osi OX o kąt β_i. Przyjmujemy wartość kąta obrotu β_i za dodatnią, gdy obrót następuje przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Naprężenia styczne na danej płaszczyźnie uważamy za dodatnie, gdy obracają element zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara.

Chcąc określić wypadkowy stan naprężenia, musimy dokonać sumowania odpowiadających sobie składowych z wyjściowych stanów naprężenia. Jednak, ze względu na zróżnicowane kierunki tensorów naprężeń, sumowanie może nastąpić dopiero po znalezieniu naprężeń na stałych kierunkach podanych przez osie OX i OY przyjętego układu odniesienia.

Przejście z naprężeń ogólnych elementarnego i-tego tensora naprężeń /S1i, S2i, τ_i, β_i/ na naprężenia osiowe /SXi, SYi, SXYi/ określamy poprzez wzory wynikające bezpośrednio z odwzorowania zaistniałego stanu naprężenia rys.1e .

$$
\begin{aligned}
SXi &= \frac{1}{2}\left(S1i+S2i + \sqrt{(S1i-S2i)^2+4\cdot\tau_i^2}\cdot\cos 2(\alpha_i+\beta_i)\right)\\
SYi &= \frac{1}{2}\left(S1i+S2i - \sqrt{(S1i-S2i)^2+4\cdot\tau_i^2}\cdot\cos 2(\alpha_i+\beta_i)\right)\\
SXYi &= \frac{1}{2}\sqrt{(S1i-S2i)^2+4\cdot\tau_i^2}\cdot\sin 2(\alpha_i+\beta_i)
\end{aligned}
\qquad /2.3/
$$

gdzie

$$\alpha_i = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\cdot\tau_i}{S1i-S2i} \qquad /2.4/$$

jest kątem, o jaki musimy obrócić element o naprężeniach ogólnych S1i, S2i, τ_i, żeby uzyskać element określony tylko przez naprężenia główne.

Z odwzorowania stanu naprężenia na płaszczyźnie kół Mohra wynika, że $-\frac{\pi}{4} \leq \alpha_i \leq \frac{\pi}{4}$.

http://rcin.org.pl

Jeżeli $\tau = 0$,wtedy naprężenia osiowe wyrażają się przez niżej wymienione wzory

$$SXi = \frac{1}{2}\,/S1i+S2i/ + \frac{1}{2}\,/S1i-S2i/\cdot\cos 2\beta i$$

/2.5/ $$SYi = \frac{1}{2}\,/S1i+S2i/ - \frac{1}{2}\,/S1i-S2i/\cdot\cos 2\beta i$$

$$SXYi = \frac{1}{2}\,/S1i-S2i/\cdot\sin 2\beta i$$

Wzory te pokrywają się ze wzorami wyprowadzonymi w pracy [2] . Wypadkowy stan naprężenia /Z1j,Z2j,Z3j/ określamy przez zsumowanie odpowiadających sobie naprężeń osiowych

$$Z1j = \sum_{i=1}^{K} SXi$$

/2.6/ $$Z2j = \sum_{i=1}^{K} SYi$$

$$Z3j = \sum_{i=1}^{K} SXYi$$

Następnie wyznaczamy wartości naprężeń głównych $\sigma 1_j$ i $\sigma 2_j$ oraz określamy wartość kąta γj utworzonego przez większe z naprężeń głównych $\max\{\sigma 1j, \sigma 2j\}$ z dodatnim kierunkiem osi OX układu odniesienia.

$$\sigma 1j = \frac{1}{2}\cdot[\,/Z1j+Z2j/ + \sqrt{/Z1j-Z2j/^2 + 4\cdot Z3j^2}\,]$$

/2.7/ $$\sigma 2j = \frac{1}{2}\cdot[\,/Z1j+Z2j/ - \sqrt{/Z1j-Z2j/^2 + 4\cdot Z3j^2}\,]$$

oraz

/2.8/ $$\gamma j = \frac{1}{2}\cdot \operatorname{arc\,tg}\ \frac{2\cdot Z3j}{Z1j - Z2j}$$,

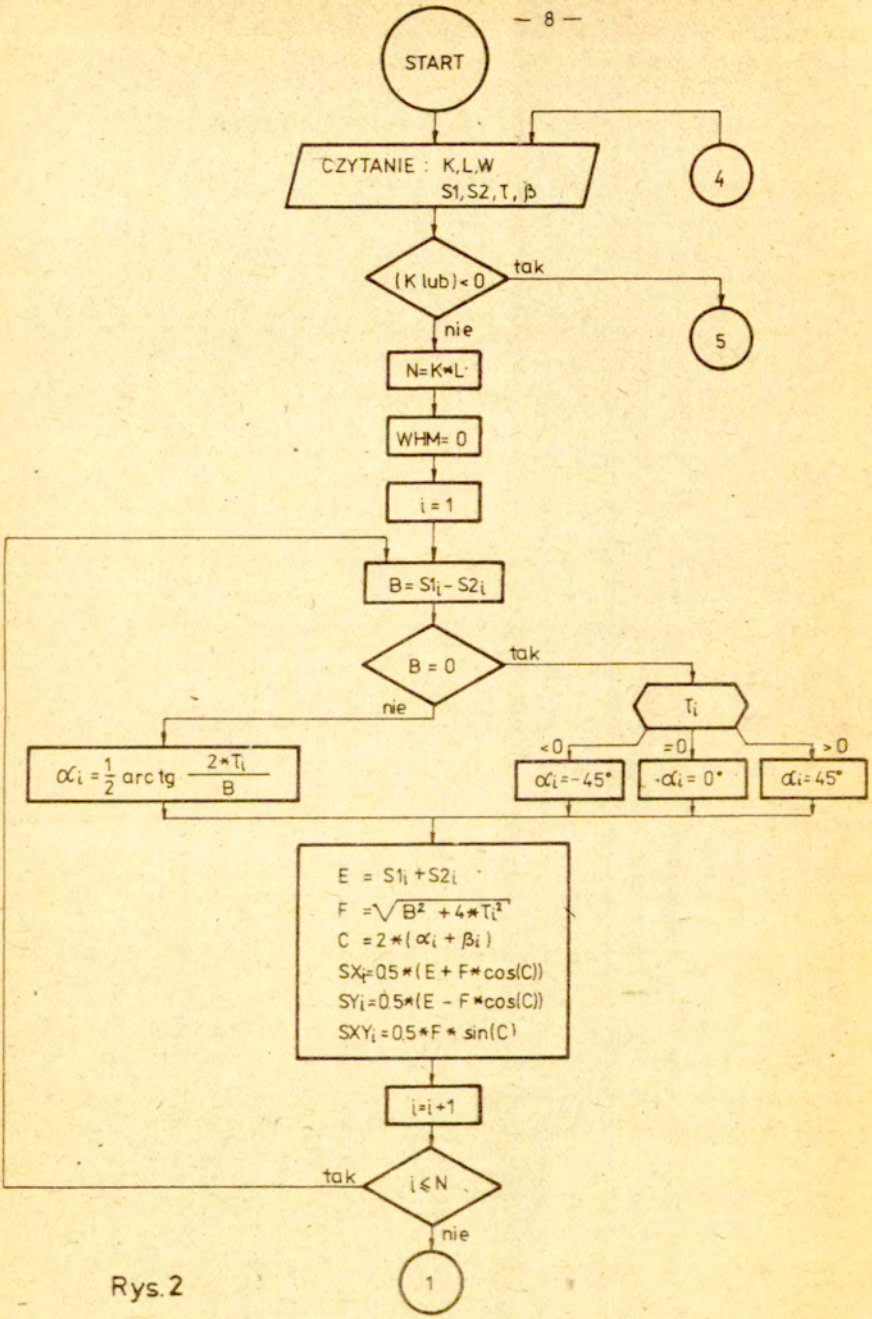
Obliczenia te wykonujemy dla L zadanych przypadków /j=1,2....L/, tj. dla każdego z nowo powstałych obszarów.

W ostatnim kroku sprawdzamy, czy nie został przekroczony zadany warunek plastyczności /2.1,2.2/. W przypadku przekroczenia ustalamy współczynnik zmniejszający, sprowadzający stan, który najbardziej przekroczył granicę plastyczności do stanu granicznego, a wszystkie pozostałe stany naprężenia obniżamy proporcjonalnie względem niego.

3. Algorytm rozwiązania problemu

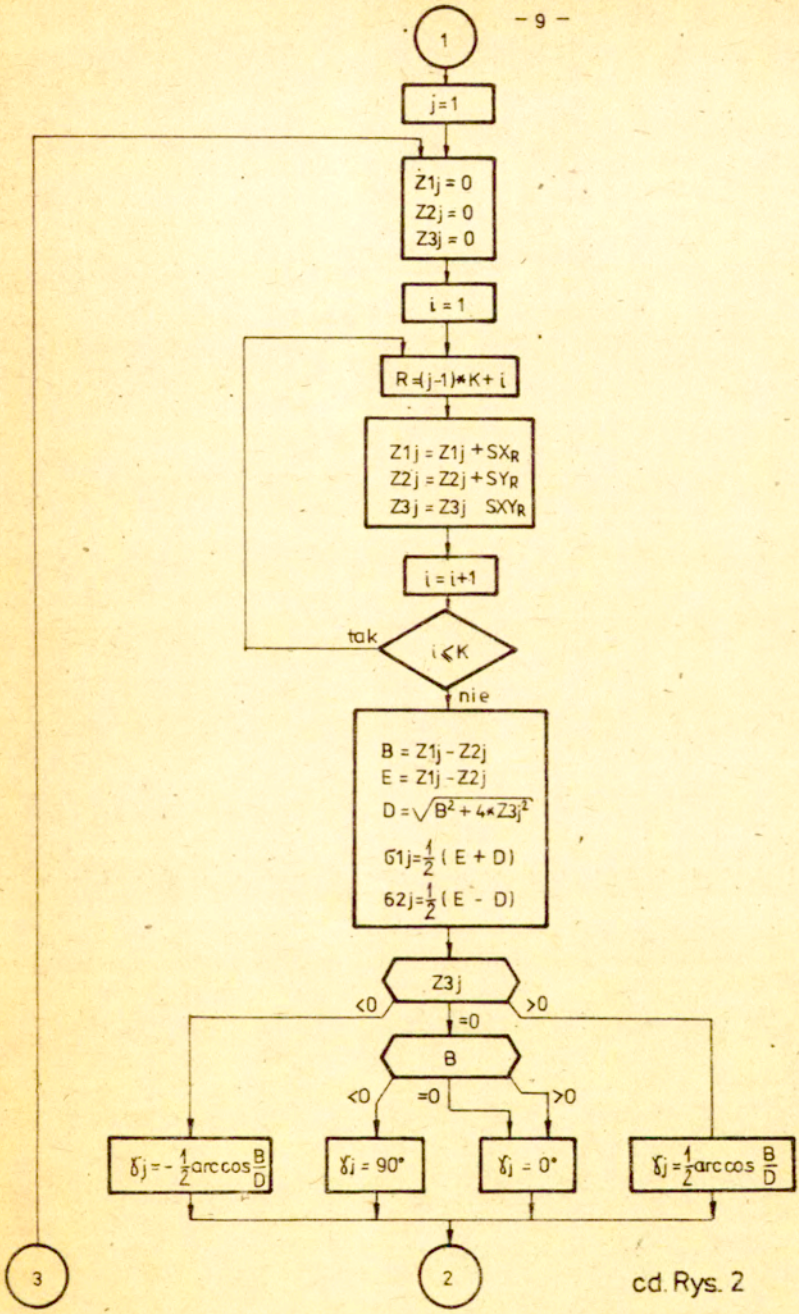
Wykorzystując definicję problemu, sformułowaną w pkt.2 ustalamy algorytm rozwiązania /rys.2/. Przy konkretnej realiza-

http://rcin.org.pl



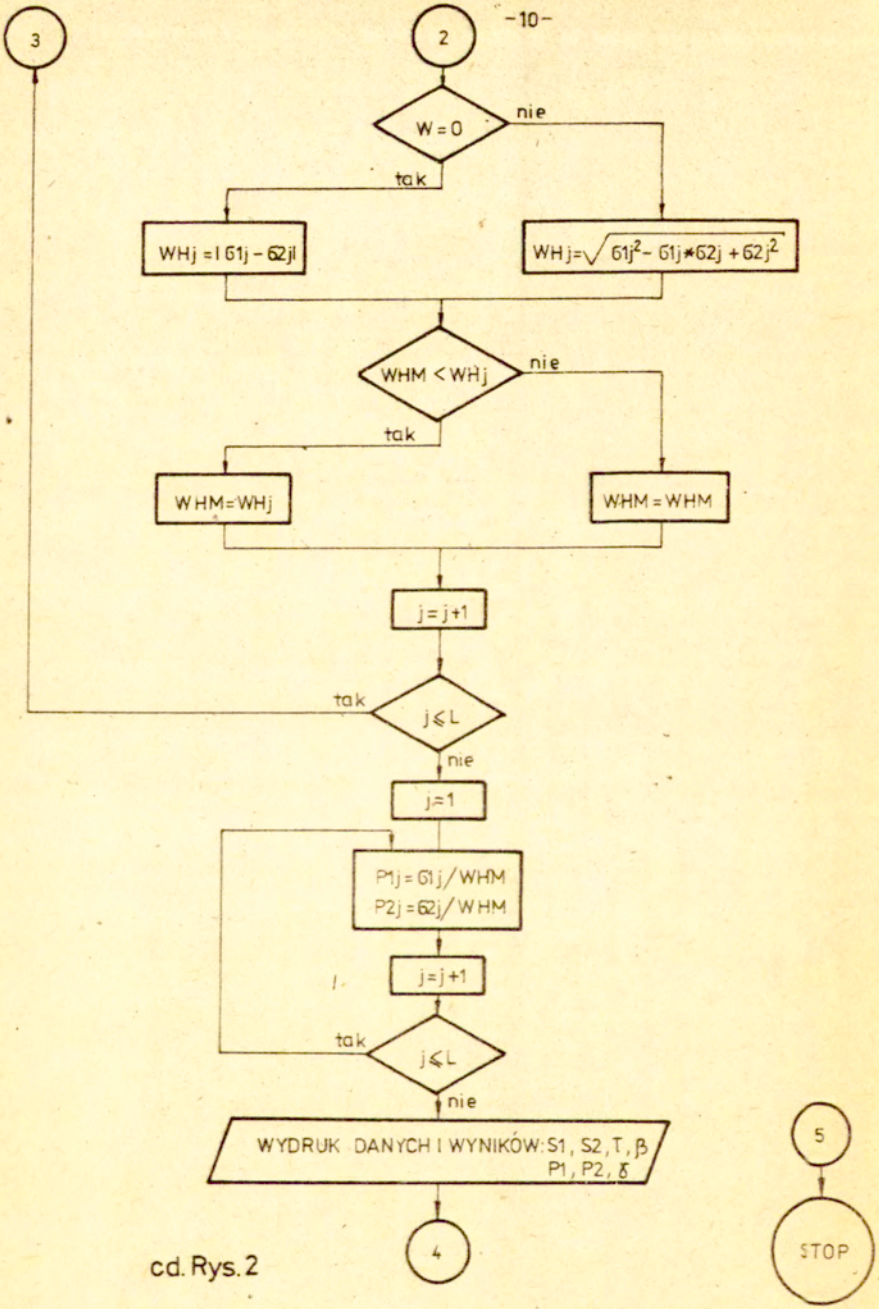
Rys. 2

http://rcin.org.pl



cd. Rys. 2

http://rcin.org.pl



cd. Rys. 2

http://rcin.org.pl

cji algorytm pewnym zmiennym nadajemy konkretne wartości liczbowe lub logiczne. W ten sposób wprowadzamy dane wejściowe procesu obliczeniowego ustalonego przez ten algorytm. W naszym przypadku wczytujemy następujące niezbędne parametry początkowe:

K - liczbę sumowanych tensorów naprężeń ,

L - liczbę obszarów nowo powstałego pola naprężeń uzyskanych przez nakładanie tensorowe ,

W - zmienną sterującą, określającą zadany warunek plastyczności,

S1i, S2i - tablice wartości naprężeń normalnych ogólnego tensora naprężeń

τ_i - tablicę wartości naprężeń stycznych ogólnego tensora naprężeń

β_i - tablicę wartości kątów jakie utworzone są między większym z naprężeń $\max\{S1i, S2i\}$, a dodatnim kierunkiem osi OX przyjętego układu odniesienia.

Po wprowadzeniu danych początkowych, dalsza realizacja algorytmu przebiega dla tych konkretnych danych.

Następnie ustalamy kąt α_i, o jaki należy obrócić element o naprężeniach ogólnych S1i, S2i, τ_i, żeby uzyskać element określony tylko przez naprężenia główne /2.4/. Ponieważ maszyna cyfrowa nie wykonuje dzielenia przez zero, a co następuje gdy S1i-S2i = 0, dlatego też przez tym działaniem zabezpieczamy się instrukcją warunkową i z góry ustalamy dla tego przypadku konkretne wartości liczbowe kąta α_i. Wartości kąta α_i uwarunkowana jest wartością naprężenia stycznego τ_i. Jeżeli:

/3.1/
$$\begin{array}{lll} 1^\circ & \tau_i < 0 \text{ , to } & \alpha_i = -45^\circ \\ 2^\circ & \tau_i = 0 \text{ , to } & \alpha_i = 0^\circ \\ 3^\circ & \tau_i > 0 \text{ , to } & \alpha_i = 45^\circ \end{array}$$

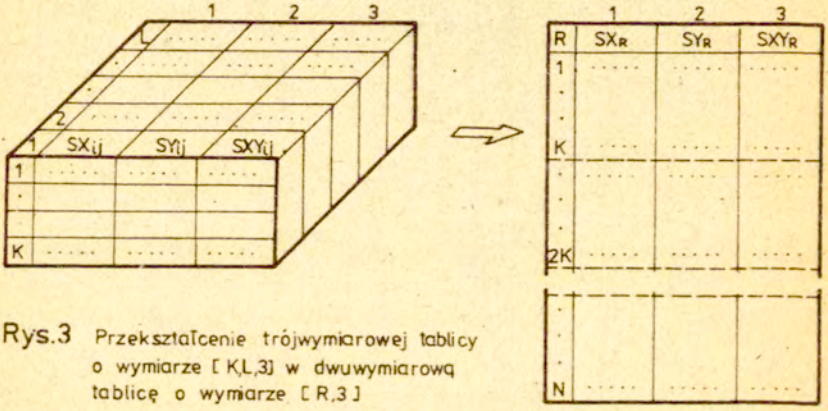
W przypadku, gdy różnica naprężeń głównych S1i-S2i $\neq$ 0 wartość kąta α_i wynika bezpośrednio ze wzoru /2.4/. Operację ustalania kąta α_i wykonujemy dla każdego zadanego tensora naprężeń i = 1,2....N, gdzie N = K·L.

Po wyznaczeniu kąta α_i określamy składowe naprężeń osiowych SXi, SYi, SXYi z ogólnego stanu naprężenia wg wzorów /2.3/. Operacje te wykonujemy tak, jak poprzednio dla każdego i-tego zadanego przypadku i = 1,2....N. Otrzymane przez nas składowe

http://rcin.org.pl

osiowe tensorów naprężeń tworzą trójwymiarową tablicę o wymiarze [K,L,3] . W celu optymalizacji czasu na EMC tablicę tę przekształcamy w dwuwymiarową [R,3] /rys.4/. Wartość wymiaru R tej tablicy określona jest przez aktualne parametry i,j oraz wartości K.

/3.2/ $$R = /j-1/ \cdot K + i$$



Rys.3 Przekształcenie trójwymiarowej tablicy o wymiarze [K,L,3] w dwuwymiarową tablicę o wymiarze [R,3]

Dla ustalonego aktualnego parametru j sumujemy odpowiednio składowe SX_R, SY_R, SXY_R wg wzorów /2.6/. Do każdego z tych działań bierzemy pod uwagę odpowiednio po K wyrazów. Operację tę wykonujemy niezależnie dla L przypadków /obszarów nowo utworzonego pola naprężeń/. W wyniku tego otrzymujemy dwuwymiarową tablicę o wymiarze [L,3] wynikowych stanów naprężeń, określonych przez wypadkowe osiowe naprężenia normalne Z1j, Z2j oraz osiowe naprężenia styczne Z3j /2.6/. Następnie, z wartości tych wyznaczamy naprężenia główne $\sigma 1j$, $\sigma 2j$ wg wzorów /2.7/ i ustalamy kąt γj, zawarty między $\max\{\sigma 1j, \sigma 2j\}$, a dodatnim kierunkiem osi OX, /2.8/. Wzór /2.8/ potrzebny do wyznaczania kąta γj jest poprawny tylko w metodzie analityczno-wykreślnej, natomiast przy zagadnieniach numerycznych staje się mało opłacalny ze względu na czas wykonywania operacji, jak i ze względ-

http://rcin.org.pl

du na dużą liczbę instrukcji warunkowych, których musielibyśmy użyć. Celowym więc stało się zastąpienie wzoru /2.8/ do obliczania kąta γ_j przy użyciu funkcji arc tg /x/ wzorami, w których główną rolę pełni funkcja arc cos /x/ /3.3, 3.4/. Wartość kąta γ_j uwarunkowana jest w tym przypadku tylko składową styczną wypadkowego tensora naprężeń $Z3j$. Jeżeli:

/3.3/ 1° $Z3j < 0$, wtedy

$$\gamma_j = -\frac{1}{2} \cdot \arccos \frac{Z1j - Z2j}{\sqrt{/Z1j-Z2j/^2 + 4 \cdot Z3j^2}}$$

/3.4/ 2° $Z3j > 0$, wtedy

$$\gamma_j = \frac{1}{2} \arccos \frac{Z1j - Z2j}{\sqrt{/Z1j-Z2j/^2 + 4 \cdot Z3j^2}}$$

/3.5/ 3° $Z3j = 0$ i $Z1j - Z2j < 0$, wtedy

$$\gamma_j = 90^\circ$$

/3.6/ 4° $Z3j = 0$ i $Z1j - Z2j \geqslant 0$, wtedy

$$\gamma_j = 0^\circ$$

Po określeniu wypadkowych naprężeń głównych $\sigma 1j$, $\sigma 2j$, w następnym kroku sprawdzamy, czy nie został przekroczony zadany warunek plastyczności /2.1 lub 2.2/ w każdym obszarze nowo powstałego pola j /j = 1,2...L/. W przypadku przekroczenia stan najbardziej przekraczający granicę plastyczności przyrównujemy do stanu granicznego, a wszystkie pozostałe naprężenia proporcjonalnie zmniejszamy. Zadany warunek plastyczności wybieramy, określając zmienną sterującą W. Jeżeli W = 0, wtedy przyjmujemy warunek plastyczności Treski /2.2/, natomiast gdy $W \neq 0$ /W=1/, wtedy działania wykonujemy dla warunku Hubera-Misesa /2.1/.

http://rcin.org.pl

Wartości zmniejszonych naprężeń głównych P1j,P2j drukujemy obok wartości kąta δj jako wartości wynikowe. Dla sprawdzenia, czy nie popełniliśmy błędów przy wprowadzaniu danych S1i,S2i, τi, βi, drukujemy ich wartości.

Chcąc maksymalnie wykorzystać proces obliczeń /inne przykłady tego typu w tym samym cyklu/, powracamy z programem do punktu wejścia. Jeżeli wstawimy nowe dane dla innego przykładu proces obliczania będzie przebiegać analogicznie jak poprzednio. Koniec procesu przetwarzania nastąpi wówczas, gdy stwierdzimy ujemną wartość K lub L /dane wejściowe/.

Dla zobrazowania algorytmu rozwiązania na sumowanie nieciągłych pól naprężeń ułożony został schemat blokowy /rys.2/. Jest on graficzną reprezentacją czynności wykonywanych w poszczególnych krokach z przejrzystym przedstawieniem ich wzajemnego powiązania.

Ostatnim etapem w zespole czynności związanych z przygotowaniem programu jest zapisanie algorytmu rozwiązania problemu w języku dostępnym dla konkretnej maszyny cyfrowej. W naszym przypadku wykorzystaliśmy EMC-ODRA 1305, a do zakodowania algorytmu użyliśmy język FORTRAN-IV. Efektem tych czynności jest tabulogram programu przedstawiony na końcu pracy.

W punkcie następnym pracy przedstawiony jest sposób korzystania z tego programu dla konkretnych obliczeń numerycznych.

4. Program na EMC

Programem o nazwie ZBY1 wyznaczamy naprężenia główne i kąt utworzony między kierunkiem większego z naprężeń głównych, a dodatnim zwrotem osi OX układu odniesienia po zsumowaniu K odpowiednich tensorów naprężeń w L obszarach nowo powstałego pola. Ponadto zmniejszamy wszystkie naprężenia, gdy v jednym z obszarów przekroczona zostanie granica plastyczności. Obliczenia możemy wykonywać dla zadanego warunku plastyczności /warunek Treski lub warunek Hubera-Misesa/ w płaskim stanie naprężenia i odkształcenia, gdy naprężenia główne σ_i, σ_j we wszystkich obszarach pola spełniają warunek $\sigma_i \cdot \sigma_j \leqslant 0$ lub

http://rcin.org.pl

$\sigma_i \cdot \sigma_j > 0$, $|\sigma_i| \leq \sigma_{pl}$, $|\sigma_j| \leq \sigma_{pl}$. Natomiast gdy w jednym z obszarów $\sigma_i \cdot \sigma_j > 0$ i $|\sigma_i| > \sigma_{pl}$, $|\sigma_j| > \sigma_{pl}$ wyniki są słuszne tylko dla płaskiego stanu odkształcenia.

Program ZBY1 napisany jest w języku FORTRAN IV z przeznaczeniem na maszynę cyfrową serii ODRA 1300. Granicą efektywności wykorzystania programu jest liczba sumowanych tensorów $K \leq 10$ w $L \leq 40$ obszarach jednorodnych pól naprężeń dla dowolnej liczby elementów konstrukcji stalowych wczytywanych jednorazowo. W skład programu wchodzi tylko segment MASTER. Z urządzeń peryferyjnych wykorzystujemy drukarkę wierszową na 120 znaków, dziurkarkę i czytnik kart.

4.1. Instrukcja przygotowania danych /rys.4/

1 rekord - wczytywane kolejno dane: K - liczba sumowanych tensorów naprężeń w jednym z obszarów jednorodnego pola naprężeń, L - liczba obszarów w jednorodnym polu naprężeń uzyskanym przez nakładanie tensorowe, W - zmienna sterująca ustalająca zadany warunek plastyczności /W = 0 w przypadku obliczeń dla warunku Treski, W =1 dla warunku Hubera-Misesa/ FORMAT /I2,2X,I2,2X,I1/

2 rekord i następne - kolejno wczytywane: większe z naprężeń normalnych mniejsze z naprężeń normalnych, naprężenia styczne, kąty utworzone między większym z naprężeń normalnych a dodatnim zwrotem osi OX układu odniesienia FORMAT /8/F8.4,1X//

Uwagi:

1° Przy przyjętych wartościach K i L liczba danych wczytywanych w drugim rekordzie /i w następnych/ powinna równać się $4 \cdot K \cdot L$.

2° Jeżeli w jednym z obszarów jednorodnego pola naprężeń liczba sumowanych tensorów jest mniejsza od przyjętej maksymalnej liczby K_{max}, to dane należy rozszerzyć przyjmując tyle zerowych stanów naprężeń, ażeby liczba dodawanych tensorów wynosiła $K = K_{max}$

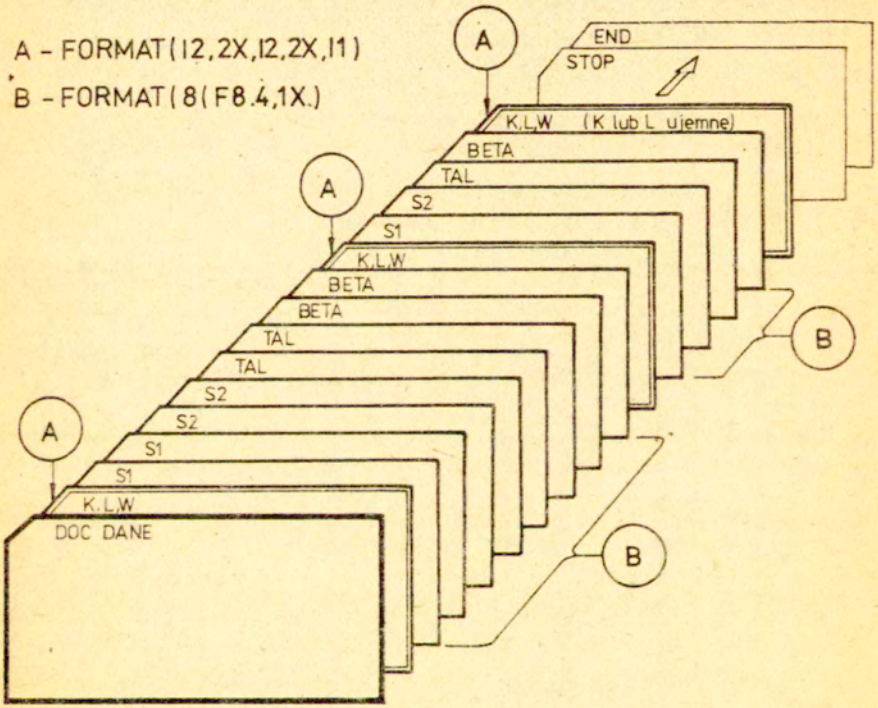
3° Chcąc zakończyć bieg EMC należy na końcu pakietu danych umieścić rekord z ujemnymi wartościami K i L wg formatu

http://rcin.org.pl

z pierwszego rekordu.

4° Naprężenia normalne i styczne należy podawać jako bezwymiarowe wartości naprężeń, obliczone dla granicy plastyczności materiału przyjętej za jednostkę $\sigma_{pl} = 1,0$.

5° Znaki naprężeń stycznych i znaki kątów należy przyjmować wg założeń z pkt.2



Rys. 4 Przygotowanie pakietu danych na EMC

http://rcin.org.pl

4.2. Analiza wyników z EMC

Po wykonaniu obliczeń na EMC drukowana jest tabela, w której oprócz wyników dodawania tensorowego /P1,P2 - wypadkowe naprężenia główne, GAMMA - kąt utworzony między P1 a dodatnim kierunkiem osi OX/ zawarte są dane wejściowe /S1,S2,TAL, BETA/ . Ponadto drukowany jest zadany warunek plastyczności dla którego wykonywane były obliczenia.

Uwagi:

1° Jeżeli wartości naprężeń głównych P1 lub P2 oznaczone są znakiem minus, to mamy do czynienia z naprężeniami ściskającymi, w innych przypadkach z rozciągającymi.

2° Kąt GAMMA utworzony między kierunkiem większego z naprężeń głównych /P1/ a dodatnim zwrotem osi OX układu odniesienia obracamy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, jeżeli znak wartości kąta jest dodatni, w innym przypadku przeciwnie.

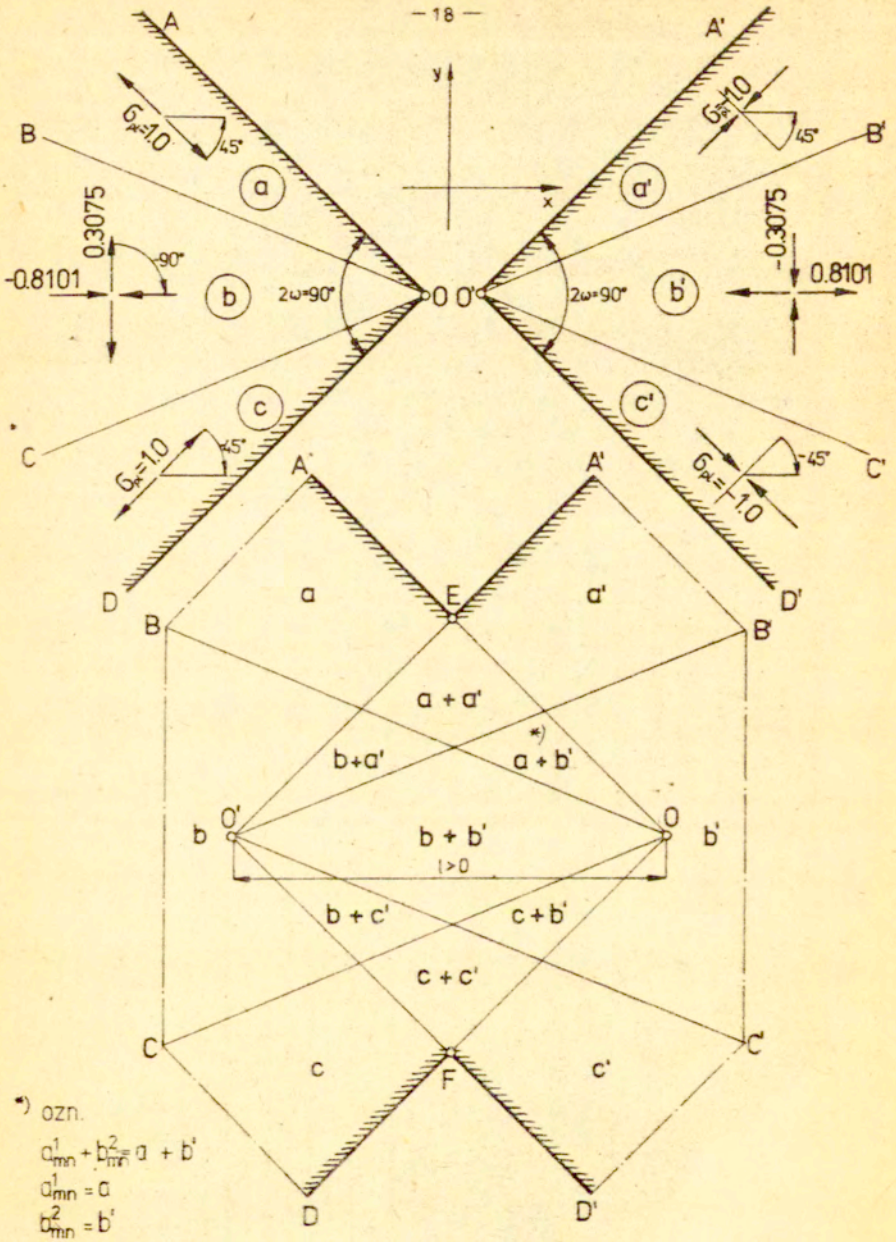
3° Naprężenia główne P1,P2 drukowane są jako bezwymiarowe wartości naprężeń obliczone dla granicy plastyczności materiału przyjętej za jednostkę $\sigma_{pl} = 1,0$. Chcąc uzyskać rzeczywiste wartości naprężeń panujących we wszystkich obszarach pola należy bezwymiarowe wyniki pomnożyć przez daną wartość naprężeń plastycznych materiału σ_{pl} [kG/mm^2].

W celu zobrazowania powyższych czynności poniżej przedstawiony jest przykład na sumowanie tensorowe nieciągłych pól naprężeń.

4.3. Przykład

Rozważmy nakładanie tensorowe dwóch elementarnych układów linii nieciągłości typu I dla $2\omega = 90^\circ$ i warunku plastyczności Hubera-Misesa [3] w płaskim kartezjańskim układzie odniesienia XY /rys.6/. Zakładamy, że geometryczne kontury obu podstawowych układów są symetryczne względem osi OY poprowadzonej przez punkt F i posiadają antysymetryczny obraz stanów naprężeń.

http://rcin.org.pl



*) ozn.

$a^1_{mn} + b^2_{mn} = a + b'$

$a^1_{mn} = a$

$b^2_{mn} = b'$

rys. 5

http://rcin.org.pl

Tabela 1

$2w=90^{\circ}$ warunek Hubera-Misesa

ukł. linii nieciągł.	Ozn. stanu naprężenia	Wartości naprężeń S1i	S2i	βi
1	a	1,0000	0,0000	+45,0000°
	b	0,3075	-0,8101	+90,0000°
	c	1,0000	0,0000	-45,0000°
2	a'	0,0000	-1,0000	+45,0000°
	b'	0,8101	-0,3075	0,0000°
	c'	0,0000	-1,0000	-45,0000°

W wyniku równoległego nasunięcia na siebie tych dwóch układów na odległość $l > 0$ otrzymamy nowy obszar objęty konturem ABCDED'C'B'A'F /rys.6 b/. W 13-tu /L=13/ nowo powstałych obszarach można wyróżnić 7, w których sumowane są po dwa tensory naprężeń /$K_{max} = K = 2$/ / a + a', b + b', c + c' b + a', b + c', a + b', c + b'/. W sześciu pozostałych obszarach stany naprężeń pozostają niezmienione /a,b,c,a',b',c' /.

Określenie wypadkowych stanów naprężeń w poszczególnych obszarach możemy uzyskać na drodze przekształceń matematycznych lub metodą wykreślną /por. [2] /. Jednakże, ze względu na dużą liczbę nowo utworzonych obszarów powyższe metody stają się uciążliwe w obliczeniach i zabierają zbyt dużo cennego czasu. Ponadto metoda wykreślna nie daje zadawalająco dokładnych wyników.

Dla uniknięcia tych niedogodności przykład ten rozwiążemy przy pomocy EMC /program ZBY1/. Jedynym "wysiłkiem" w tej metodzie jest przygotowanie danych i późniejsza analiza otrzymanych wyników.

Z powyższych rozważań i założeń dla tego przykładu wynika, że:

- maksymalna liczba dodawanych tensorów naprężeń wynosi K = 2
- liczba nowo powstałych obszarów równa jest L = 13
- przykład rozwiązujemy dla warunku Hubera-Misesa, wobec tego

http://rcin.org.pl

zmienna sterującą przyjmuje wartość W = 1.

Dane te /K,L,W/ wczytujemy w pierwszym rekordzie wg formatu /I2,2X,I2,2X,I1/. Natomiast w następnych wartości stanów naprężeń /po 8 danych w każdym rekordzie/. Ze względu na to, że w 6-ciu z 13 przypadków /a,b,c,a',b',c'/ liczba sumowanych tensorów jest mniejsza od przyjętej maksymalnej wartości $K_{max}=2$, ilość danych dla tych przypadków rozszerzamy przyjmując tyle zerowych stanów naprężeń "0", ażeby liczba dodawanych tensorów była równa K_{max}.

Tabela 2

K \ L	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
k=1	a	b	c	a'	b'	c'	-	-	-	-	-	-	-
k=2	-	-	-	-	-	-	a+a	b+b	c+c	a+b	b+a	b+c	c+b
$K_{max}=2$	a+0	b+0	c+0	a+0	b+0	c+0	a+a	b+b	c+c	a+b	b+a	b+c	c+b

Kolejno wczytujemy wartości większych z naprężeń normalnych S1i, mniejszych z naprężeń normalnych S2i, naprężenia styczne τ_i i kąty β_i jakie utworzone są między S1i, a dodatnim kierunkiem osi OX /FORMAT [8 [F8.4,1x]]/. Wartości danych oraz kolejność ich wczytywania przedstawione są w tabeli 3.

Ponieważ rozwiązywany jest tylko ten jeden przykład, pakiet danych kończymy rekordem z ujemną dowolną wartością K lub L zapisaną wg formatu z 1 rekordu.

W wyniku obliczeń na EMC otrzymujemy tabelę, w której oprócz wyników dodawanie tensorowego /P1j,P2j,GAMMA/ zawarte są dane wejściowe /Tabela 4/.

W celu zobrazowania otrzymanych wyników wartości stanów naprężeń naniesione zostały na płaszczyznę kół Mohra $\tau = f(\sigma)$, /rys.5/. Natomiast na rys. 7 przedstawiony jest obszar uzyskany przez nakładanie układów linii nieciągłości typu I z naniesionymi wypadkowymi stanami naprężeń. Jak widać z rys.6 w obszarze a+a' panuje graniczny warunek plastyczności Hubera-Misesa.

http://rcin.org.pl

Tabela 3

i	Ozn. stanu naprężenia	Wartości naprężeń S1i	S2i	τi	β_i
1	a + "0"	1.0000 0.0000 1 rekord	0.0000 0.0000 4 rekord	0.0000 0.0000 7 rekord	45.0000 0,0000
2	b + "0"	0.3075 0.0000	-0.8101 0.0000	0.0000 0.0000	90.0000 0.0000
3	c + "0"	1.0000 0.0000	0.0000 0.0000	0.0000 0.0000	-45.0000 0.0000 11 rekord
4	a' + "0"	0.0000 0.0000	-1.0000 0.0000	0.0000 0.0000	45.0000 0.0000
5	b' + "0"	0.8101 0.0000	-0.3075 0.0000	0.0000 0.0000 8 rekord	0.0000 0.0000
6	c' + "0"	0.0000 0.0000 2 rekord	-1.0000 0.0000 5 rekord	0.0000 0.0000	-45.0000 0.0000
7	a + a'	1.0000 0.0000	0.0000 -1.0000	0.0000 0.0000	45.0000 45.0000
8	b + b'	0.3075 0.8101	-0.8101 -0.3075	0.0000 0.0000	90.0000 0.0000 12 rekord
9	c + c'	1.0000 0.0000	0.0000 -1.0000	0.0000 0.0000 9 rekord	-45.0000 -45.0000
10	a + b'	1.0000 0.8101	0.0000 -0.3075 6 rekord	0.0000 0.0000	45.0000 0.0000
11	b + a'	0.3075 0.0000 3 rekord	-0.8101 -1.0000	0.0000 0.0000 10 rekord	90.0000 45.0000
12	b + c'	0.3075 0.0000	-0.8101 -1.0000	0.0000 0.0000	90.0000 -45.0000 13 rekord
13	c + b'	1.0000 0.8101	0.0000 -3.075 7 rekord	0.0000 0.0000	-45.0000 0.0000

Natomiast w pozostałych obszarach stany naprężeń są mniejsze od granicznego. Szczególnym przypadkiem jest obszar b+b', w którym wypadkowy stan naprężenia równy jest "0".

http://rcin.org.pl

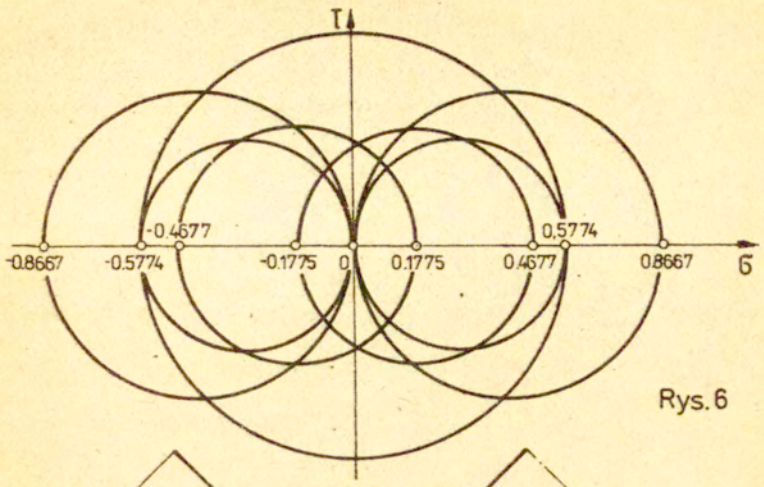
SUMOWANIE TENSOROWE NIECIAGŁYCH POL NAPREZEŃ

WARUNEK HUBERA

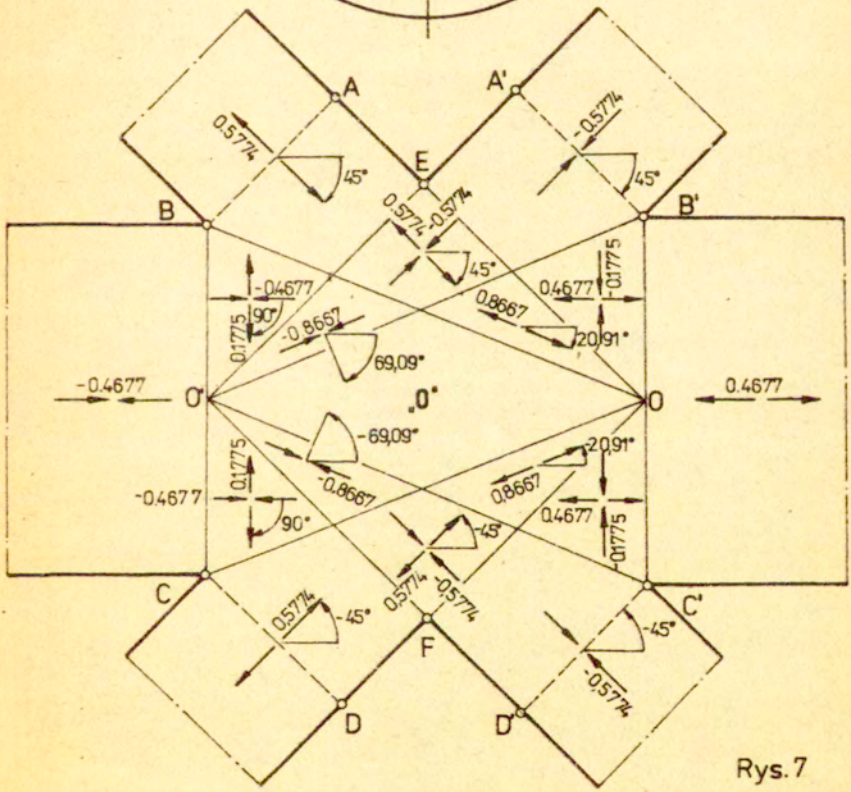
		DANE WEJSCIOWE				WYNIK DODAWANIA TENSOROWEGO		
Lp.	I	S1	S2	TAL	BETA	P1	P2	GAMMA
1	1	1.0000	0.0000	0.0000	45.0000			
	2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.5774	0.0000	45.0000
2	1	0.3075	-0.8101	0.0000	90.0000			
	2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1775	- 0.4677	90.0000
3	1	1.0000	0.0000	0.0000	-45.0000			
	2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.5774	0.0000	-45.0000
4	1	0.0000	-1.0000	0.0000	45.0000			
	2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.5774	45.0000
5	1	0.8101	-0.3075	0.0000	0.0000			
	2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.4677	-0.1775	0.0000
6	1	0.0000	-1.0000	0.0000	-45.0000			
	2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.5774	45.0000
7	1	1.0000	0.0000	0.0000	45.0000			
	2	0.0000	-1.0000	0.0000	45.0000	0.5774	-0.5774	45.0000
8	1	0.3075	-0.8101	0.0000	90.0000			
	2	0.8101	-0.3075	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	1	1.0000	0.0000	0.0000	-45.0000			
	2	0.0000	-1.0000	0.0000	-45.0000	0.5774	-0.5774	-45.0000
10	1	1.0000	0.0000	0.0000	45.0000			
	2	0.8101	- 0.3075	0.0000	0.0000	0.8667	0.0000	20.9107
11	1	0.3075	- 0.8101	0.0000	90.0000			
	2	0.0000	- 1.0000	0.0000	45.0000	0.0000	-0.8667	69.0893
12	1	0.3075	- 0.8101	0.0000	90.0000			
	2	0.0000	- 1.0000	0.0000	-45.0000	0.0000	-0.8667	-69.0893
13	1	1.0000	0.0000	0.0000	-45.0000			
	2	0.8101	-0.3075	0.0000	0.0000	0.8667	0.0000	-20.9107

TABELA 4.

http://rcin.org.pl



Rys. 6



Rys. 7

http://rcin.org.pl

TABULOGRAM PROGRAMU ZBY1

```
      MASTER ZBY1
C     PROGRAM SUMUJE TENSOROWO NIECIAGLE POLA NAPREZEN
      REAL S,S1,WH,WHM,ZXYZ,SIGMA,P1,B,C,D,E,F
      INTEGER K,L,I,J,N,P,M,L1,R,A,Z,W
      DIMENSION S(400,4),S1(400,4),WH(40),ZXYZ(40,3),SIGMA(40,2),P1(40,3
     X),P(400),M(400),L1(40)
    1 READ(2,5) K,L,W
    5 FORMAT(I2,2X,I2,2X,I1)
      IF(K.LT.0) GO TO 500
      IF(L.LT.0) GO TO 500
C     SPRAWDZENIE DODATNOSCI K  I  L
      N=K*L
      READ(2,10)((S I,J),I=1,N ,J=1,4)
   10 FORMAT(8(F8.4,1X))
C     DANE WCZYTANE
C     OBLICZANIE SKLADOWYCH NAPREZEN NA OSIE UKLADU WSPOLRZEDNYCH
      WHM=0
      DO 100 I=1,N
      B=S(I,1)-S(I,2)
      IF(B.EQ.0) GO TO 105
      C=2*S(I,3)/B
      S1(I,4)=0.5 ATAN(C)
      GO TO 106
  105 IF(S(I,3)  101,102,103
  101 S1(I,4)=-45.0000
      GO TO 106
  102 S1(I,4)=0.0000
      GO TO 106
  103 S1(I,4)=45.0000
  106 C=(S1(I,4)+S(I,4))*2
      D=0.01745329*C
      C=COS(D)
      E=SIN(D)
```

http://rcin.org.pl

```
      D=B*B+4*S(I,3)*S(I,3)
      F=SQRT(D)
      D=F*C
      B=S(I,1)+S(I,2)
      S1(I,1)=0.5*(B+D)
      S1(I,2)=0.5*(B-D)
      S1(I,3)=0.5*F*E
  100 CONTINUE
      DO 110 J=1,L
      DO 120 A=1,3
      ZXYZ(J,A)=0
  120 CONTINUE
      DO 130 I=1,K
      R=(J-1)*K+I
      DO 130 A=1,3
      ZXYZ(J,A)=ZXYZ(J,A)+S1(R,A)
  130 CONTINUE
      B=ZXYZ(J,1)-ZXYZ(J,2)
      F=B*B
      C=4*ZXYZ(J,3)*ZXYZ(J,3)+F
      D=SQRT(C)
      E=ZXYZ(J,1)+ZXYZ(J,2)
      SIGMA(J,1)=0.5*(E+D)
      SIGMA(J,2)=0.5*(E-D)
      IF(ZXYZ(J,3)) 131,133,132
  131 C=B/D
      P1(J,3)=-28.64789*ACOS(C)
      GO TO 136
  132 C=B/D
      P1(J,3)=28.64789*ACOS(C)
      GO TO 136
  133 IF(B) 135,134,134
  134 P1(J,3)=0.0000
      GO TO 136
  135 P1(J,3)=90.0000
```

http://rcin.org.pl

```
1     678  12  16  20  24  28  32  36  40  44  48  52  56  60  64  68  73
 136  IF(W.EQ.0) GO TO137
      C=SIGMA(J,1)*SIGMA(J,1)-SIGMA(J,1)*SIGMA(J,2)+SIGMA(J,2)*SIGMA(J,2
     X)
      WH(J)=SQRT(C)
      GO TO 138
 137  WH(J)=ABS(SIGMA(J,1)-SIGMA(J,2))
 138  IF(WHM.LT.WH(J))  WHM=WH(J)
 110  CONTINUE
      DO 140 J=1,L
      P1(J,1)=SIGMA(J,1)/WHM
      P1(J,2)=SIGMA(J,2)/WHM
C     KONIEC OBLICZEN DLA KOLEJNEGO KROKU
 140  CONTINUE
C     WYDRUK WYNIKOW
      WRITE(1,200)
 200  FORMAT(///42X,44HSUMOWANIE TENSOROWE NIECIAGLYCH POL NAPREZEN/42X,
     X44(1H=))
      IF(W.EQ.0) GO TO 201
      WRITE(1,202)
 202  FORMAT(55X,14HWARUNEK HUBERA//)
      GO TO 204
 201  WRITE(1,203)
 203  FORMAT(55X,14HWARUNEK TRESKI//)
 204  WRITE(1,205)
 205  FORMAT(11X,107(1H*))
      WRITE(1,206)
 206  FORMAT(11X,107H*                                DANE WEJSCIOWE
     X                  *     WYNIK DODAWANIA TENSOROWEGO        *)
      WRITE(1,207)
 207  FORMAT(11X,107(1H-))
      WRITE(1,208)
 208  FORMAT(11X,107H* LP * I * J *     S1     *     S2     *     TAL
     X   *    BETA    *     P1     *     P2     *    GAMMA    *)
      DO 230 I=1,L
      L1(I)=I
```

http://rcin.org.pl

```
      DO 230 J=1,K
      A=J+(I-1)*K
      M(A)=I
      P(A)=J
      IF(P(A).EQ.K)  GO TO 235
      WRITE(1,236)(P(A),M(A),(S(A,R),R=1,4))
236   FORMAT(11X,1H*,4X,1H*,2(1X,I2,1X,1H*),4(2X,F8.4,2X,1H*),3(12X,1H*)
     X/11X,1H*,4X,1H*,61(1H-),1H*,3(12X,1H*))
      GO TO 230
235   WRITE(1,238)(L1(I),P(A),M(A),(S(A,R),R=1,4),(P1(I,Z),Z=1,3))
238   FORMAT(11X,1H*,3(1X,I2,1X,1H*),7(2X,F8.4,2X,1H*)/11X,107(1H*))
230   CONTINUE
C     KONIEC TEGO WARIANTU OBLICZEN
      GO TO 1
500   WRITE(1,400)
400   FORMAT(1H1,36HROZPOZNANO K,L UJEMNE,KONIEC PRZEBIEGU//1HO,22HDZIEK
     XUJE ZA WSPOLPRACE)
      STOP
      END
```

http://rcin.org.pl

L i t e r a t u r a

1. W.SZCZEPIŃSKI, Statyczne dopuszczalne pola naprężeń dla węzłów konstrukcji stalowych, Prace IPPT nr 44/1977

2. J.SZLAGOWSKI, Kształtowanie węzłów konstrukcji stalowych metodą tensorowego nakładania dwóch stanów naprężeń, ROZPRAWY INŻYNIERSKIE nr 2/3/1981 /w druku/

3. W.SZCZEPIŃSKI, J.SZLAGOWSKI, Graniczne statycznie dopuszczalne nieciągłe pola naprężeń dla szacowania nośności granicznej, Prace IPPT nr 3,9,11,20,21/1976

4. Półtorak, J.Szlagowski, Nośność graniczna pewnego typu węzłów konstrukcji stalowych, Prace IPPT 3/1977

Spis treści

	str.
1. W s t ę p	3
2. Rozważania teoretyczne	4
3. Algorytm rozwiązania problemu	7
4. Program na EMC	14
5. Tabulogram programu ZBY1	24

http://rcin.org.pl