ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Contribution à la géométrie des courbes planes générales.* Note de M. SIGISMOND JANISZEWSKI.

THÉORÈME A. — *Soit* C *une courbe plane, qui a au plus un nombre limité de points ou de segments communs avec chaque segment de longueur finie d'une droite arbitraire; je dis que* C *a au moins une tangente en chaque point.*

Je nomme *courbe* un ensemble de points continu (au sens de G. Cantor) et *sans points intérieurs; arc*, une courbe faisant partie d'une autre courbe; *arc simple* AB, un arc comprenant les points A et B et tel qu'on ne peut lui enlever aucun point sans qu'il cesse d'être un arc ou de contenir A et B.

Je nomme *tangente* à une courbe au point A une droite t telle que pour chaque angle δ (aussi petit qu'on veut) on puisse trouver un cercle de centre A assez petit pour que la droite AM fasse avec t un angle plus petit que δ pour chaque point M, situé sur un arc de la courbe intérieur au cercle en question et contenant A, mais tel que l'arc simple réunissant deux de ces points ne contienne pas A.

Considérons une suite de cercles $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ de centre A et de rayons $\rho_1, \rho_2, \ldots$; soit $\lim_{n=\infty} \rho_n = 0$. Considérons encore sur C un point P et un arc simple Γ, joignant P à A. L'existence de Γ est garantie par le théorème suivant, facile à démontrer : *Sur une courbe quelconque il existe toujours au moins un arc simple joignant deux de ses points donnés.* Soit P_n un point de Γ entre γ_n et γ_{n+1}; et soit c_n un arc, composé de tous les points de C qui sont réunis avec P_n par des arcs intérieurs à γ_n et ne contenant pas A. La tangente sera définie au moyen de la suite des c_n et dépendra donc uniquement du choix de l'arc Γ. Soit enfin c'_n la partie de c_n située entre γ_n et γ_{n+1}. Menons le diamètre AP_n et déterminons le plus grand angle de sommet A, qui renferme le rayon opposé au rayon AP_n et ne renferme aucun point de c'_n. Cet angle peut être égal à zéro, mais il est toujours déterminé. Soient P'_n et P''_n les points de c'_n, situés respectivement sur l'un et l'autre côté de cet angle. Je dis que AP'_n et AP''_n tendent pour n infiniment grand vers une droite limite commune t, et que t est une tangente de C.

Supposons que la droite t n'existe pas. Alors, ou AP'_n et AP''_n tendent vers des limites différentes; ou bien l'une d'elles au moins, $AP^{(i)}_n$, ne tend vers aucune limite. Dans ce second cas, l'ensemble de demi-droites $AP^{(i)}_n$ a au moins deux demi-droites limites ([1]). Un des deux angles qu'elles forment est entièrement couvert une infinité de fois par des angles $P'_n A P''_n$ (par l'angle $P'_n AP''_n$ j'entends celui qui contient P_n à l'intérieur). Car deux angles consécutifs $P'_n AP''_n$ et $P'_{n+1} AP''_{n+1}$ doivent avoir une partie commune; sinon c'_n et c'_{n+1} n'auraient pas de points communs, ce qui est évidemment impossible. Il est donc clair que dans chaque cas il y aura une droite g passant par A et contenue dans l'angle $P'_n AP''_n$ pour une suite infinie de valeurs de $n : n_1, n_2, \ldots$.

Il existe par hypothèse un arc $\overline{c}_1$ réunissant P'_{n_1} et P''_{n_1}, mais ne contenant pas A. Soit δ_1 la plus courte distance de A à $\overline{c}_1$ et soit $\rho_{k_1} < \delta_1$; k_λ désignant des nombres contenus dans la suite $n_1, n_2, \ldots$. A ρ_{k_1} correspondent P'_{k_1} et P''_{k_1}, $\overline{c_{k_1}}$, δ_2, et à δ_2 correspond ρ_{k_2}. Continuant ainsi, nous obtiendrons une suite infinie d'arcs $\overline{c}_1, \overline{c}_{k_1}, \overline{c}_{k_2}, \ldots$ sans points communs et dont chacun est coupé par g. Alors, il y aurait sur un segment de longueur ρ_1 de g un nombre infini de points de C contre l'hypothèse. Donc, la droite t existe.

Pour chaque ε positif donné on peut trouver un entier N tel que l'angle de t avec AM soit plus petit que ε, lorsque M est un point de c_N. Il suffit de prendre N tel que tous les angles $P'_{N+k} At$ et $P''_{N+k} At$ soient plus petits que ε. Donc t est une tangente à C en A.

Théorème B. — *Une courbe* C, *n'ayant, dans un domaine fini quelconque, qu'un nombre fini* K *de points multiples et jamais plus de* N (*entier positif fixe*) *points communs avec une droite quelconque parallèle à l'une de deux directions fixes* α *et* β, *est rectifiable.*

Je nomme *multiple* un point A, si l'on peut trouver plus que deux arcs simples se terminant en A et n'ayant pas d'autres points communs.

Lemme 1. — *Une ligne polygonale* L *renfermée dans un losange de côtés de longueur* d *et n'ayant jamais plus de* N *points communs avec une droite parallèle à un des côtés du losange a une longueur plus petite que* $4Nd$.

Divisons les segments de L en deux classes : la première, composée de

---

([1]) Dans le sens de la théorie des ensembles (*Häufungsstelle*).

segments, qui font un angle plus petit avec l'un des côtés du losange (que j'appelle le premier) qu'avec l'autre; et la seconde classe, composée de tous les autres. Nous projetons les segments de la première classe sur le premier côté par des droites parallèles au second côté; et les segments de la deuxième classe d'une manière analogue sur le second côté. Soit a' la projection d'un segment a. Il est évident que

$$a < 2a' \quad \text{et} \quad \sum a' \leqq 2\,\mathrm{N}d$$

(parce que les a' d'une classe ne peuvent couvrir le côté correspondant du losange plus de N fois). D'où

$$\sum a < 4\,\mathrm{N}d.$$

Il est facile de démontrer le :

Lemme 2. — *Soient n le nombre de points d'intersection d'une droite avec une courbe quelconque et m le nombre correspondant pour la même droite et une ligne polygonale* inscrite, *c'est-à-dire formée de cordes de la courbe, de telle façon qu'à un point quelconque de la courbe corresponde une et une seule de ces cordes, sauf pour les points communs à la courbe et aux cordes. On a $m \leqq n$.*

Je reviens au théorème B. Considérons un losange de côtés parallèles aux directions α et β et qui renferme C. Soit d la longueur de son côté. Je divise ce losange en 2^{2n} losanges congruents. La longueur totale des lignes polygonales quelconques inscrites aux arcs intérieurs aux losanges partiels, contenant les points multiples, est plus petite que $\frac{1}{2^{n-2}}\mathrm{KN}d$; elle tend donc vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Il y a au plus 4 N arcs, restant à l'intérieur et ayant leurs extrémités sur la périphérie de chacun des autres losanges partiels. Chacun de ces arcs n'a que deux extrémités. En joignant les extrémités appartenant au même arc, j'obtiens une ligne polygonale inscrite, dont chaque segment est plus petit que $\frac{d}{2^{n-1}}$. Quand n croît, sa longueur totale L_n ne décroît jamais et reste toujours plus petite que $4\,\mathrm{N}d$. Donc $\lim\limits_{n=\infty} \mathrm{L}_n$ existe. Cette limite est la longueur de C.

Car, soit L'_n la longueur d'une ligne polygonale inscrite quelconque n'ayant qu'un nombre fini de segments tous infiniment petits avec $\frac{1}{n}$.

On peut trouver pour chaque ε, n, m les entiers n_1, m_1 tels qu'on ait

$$L'_n < L_{n_1} + \varepsilon, \quad L_m < L'_{m_1} + \varepsilon.$$

Ceci démontre que

$$\lim L'_n = \lim L_n.$$

(7 mars 1910.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADEMIE DES SCIENCES.
45049 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.