

- 3.31 — pobudzanie i propagacja fal
·elektromagnetycznych, falowody
3.32 — plazma

Anna Brahmer-Kacprzyńska

**ANALIZA ASYMPTOTYCZNA
PROPAGACJI SYGNAŁU
ELEKTROMAGNETYCZNEGO
W WARSTWIE OŚRODKA DYSPERSYJNEGO**

52/1985

P. 269



WARSZAWA 1985

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 4 grudnia 1985 r.

56897



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark.wyd. 0,42 Ark.druk. 0,75

Oddane do drukarni w lutym 1986 r.

Nr zamówienia 169/86

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Anna Brahmer-Kacprzyńska

Zakład Teorii Fal Elektromagnetycznych

ANALIZA ASYMPTOTYCZNA PROPAGACJI SYGNAŁU
ELEKTROMAGNETYCZNEGO W WARSTWIE OŚRODKA DISPERSYJNEGO .

Streszczenie.

Dla warstwy ośrodka dyspersyjnego ograniczonego dwoma doskonale przewodzącymi płaszczyznami skonstruowano funkcję Greena .Przeprowadzono analizę różnych asymptotycznych postaci tej funkcji.

1.Sformułowanie problemu.

Propagację fal elektromagnetycznych w zjonizowanym ośrodku dyspersyjnym (model zimnej plazmy) opisuje równanie Kleina-Gordona. Dla warstwy takiego ośrodka umieszczonej między dwoma doskonale przewodzącymi płaszczyznami zostanie skonstruowana funkcja Greena w postaci sumy odpowiednio dobranych funkcji Hankela.

Rozpatrzmy problem pól nieharmonicznych propagujących się w izotropowej, zimnej plazmie będącej najprostszym modelem warstwy jonosferycznej. Płaszczyzny ograniczające warstwę są wzajemnie równoległe, problem nie zależy od współrzędnej x . Dwuwymiarowa, skalarna funkcja Greena jest określona przez następujące równanie typu Kleina-Gordona:

$$(1) \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \right) g(\underline{s}, \underline{s}'; t, t') = \delta(\underline{s} - \underline{s}') \delta(t - t')$$

gdzie g - potencjał skalarny pola, $\underline{s} = (y, z)$

ω_p - częstość plazmowa będąca w ośrodku niejednorodnym funkcją położenia.

Pole może być pobudzone liniowym źródłem z prądem zorientowanym wzdłuż osi z (por. [1]).

Żądamy spełnienia zasady przyczynowości:

$$(2) \quad g \equiv 0 \quad \text{dla } t < t'$$

Funkcja Greena dana równaniem (1) może być użyta do syntezy pól z odpowiednio dobranym pasmem częstotści, bo uproszczony model plazmy uwzględniony przez wprowadzenie wyrazu nieróżniczkowanego do równania falowego, obowiązuje tylko dla zjawisk wysokoczęstotliwościowych.

Dla $t' = 0$ funkcję g można przedstawić w następującej postaci całkowej [1] :

$$(3) \quad g(\underline{\xi}, \underline{\xi}'; t) = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(1)}(kR) e^{-i\omega t} d\omega$$

gdzie $k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$

$$R = \sqrt{(y - y_0)^2 + z^2} \quad z_0 = 0$$

$H_0^{(1)}$ - funkcja Hankela pierwszego rodzaju.

Kontur całkowania na płaszczyźnie zmiennej zespolonej ω dobieramy tak, aby był spełniony warunek (2) tzn. droga całkowania przebiega powyżej wszystkich osobliwości wyrażenia podcałkowego, równoległe do osi rzeczywistej. Dla $t < \frac{R_0}{c}$ kontur zamykamy w górnej półpłaszczyźnie $\text{Im}(\omega) > 0$ gdzie wyrażenie podcałkowe zanika wykładniczo i otrzymujemy $g = 0$. Natomiast dla $t > \frac{R_0}{c}$ kontur zamykamy w dolnej półpłaszczyźnie i znów stosując twierdzenie Cauchy otrzymujemy wynik różny od zera Rys.3

Zależną od czasu funkcję Greena $g(\underline{\xi}, \underline{\xi}'; t)$ można przedstawić jako :

$$(4) \quad g(\underline{\xi}, \underline{\xi}'; t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty - i\Delta}^{\infty + i\Delta} g_\omega e^{-i\omega t} d\omega$$

Funkcja g_ω spełnia te same warunki brzegowe (niezależne od ω) co funkcja $g(t)$.

W rozwiązywanym problemie na funkcję Greena nakładamy warunki brzegowe typu Neumanna :

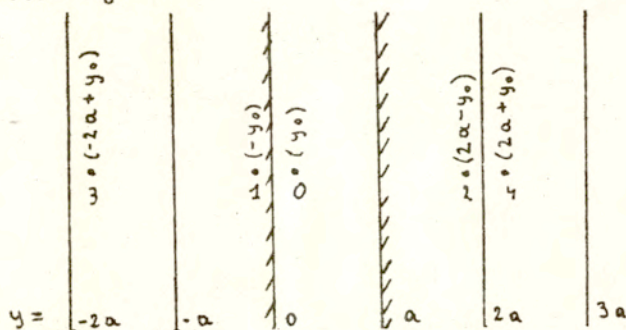
$$(5) \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad \text{dla } y = a \quad \text{ i } \quad y = 0$$

2. Przedstawienie rozwiązania w postaci sumy funkcji Hankela.

Poszukujemy spełniającej warunki brzegowe (5) funkcji g_ω . Stosując konwencjonalną metodę odbić, w której spełnienie

warunków brzegowych jest zapewnione przez wprowadzenie dodatkowych fikcyjnych źródeł. Rozkład źródeł przedstawia rys [1].

Przyjęto $z_0 = 0$.



Rys.1. Rozkład źródeł w metodzie odbić (do $n=2$).

Funkcję g zapisujemy w postaci sumy następującej :

$$(6) \quad g = A \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left\{ H_0^{(1)} \left[k \sqrt{(y-y_0-2an)^2 + z^2} \right] + H_0^{(1)} \left[k \sqrt{(y+y_0-2na)^2 + z^2} \right] \right\}$$

Metodą analogiczną otrzymano przedstawienie funkcji Greena zależnej od czasu i jednego wymiaru przestrzennego w pracy [3] jako sumę funkcji Bessla.

Sumę (6) można przekształcić do bardziej zwartej postaci stosując regułę sumacyjną Poissona [4] :

$$(7) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} F(\nu)$$

gdzie $F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{-i\nu z} dz$

Dokonując w (6) zamiany zmiennych $2n = \frac{\nu}{\pi}$ otrzymujemy do wyliczenia całki o postaciach:

$$(8) \quad F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\nu z} \left\{ H_0^{(1)} \left[k \sqrt{(y-y_0 - \frac{\nu}{\pi} a)^2 + z^2} \right] + H_0^{(1)} \left[k \sqrt{(y+y_0 - \frac{\nu}{\pi} a)^2 + z^2} \right] \right\} dz$$

Korzystając z przedstawienia Fouriera funkcji Hankela :

$$(9) H_0^{(1)}(k|R|) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{k}_y \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\tilde{k}_z R}}{k^2 - \tilde{k}^2} d\tilde{k}_z$$

$$\tilde{k}^2 = \tilde{k}_y^2 + \tilde{k}_z^2$$

w którym drogę całkowania wybieramy tak, aby otrzymać falę wychodzącą ze źródła, wyrażenie (8) można zapisać następująco

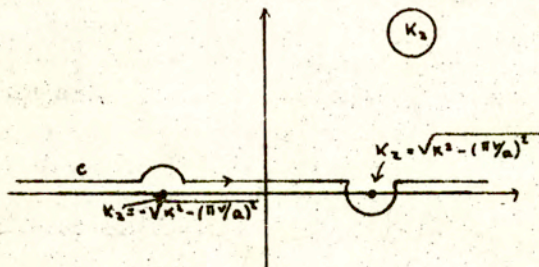
$$(10) F(v) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{k}_z \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{k}_y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i v \tau} \left\{ \frac{e^{i[\tilde{k}_y(y-y_0) - \frac{v\tau}{\pi}] + \tilde{k}_z z}}{k^2 - \tilde{k}^2} + \frac{e^{i[\tilde{k}_y(y+y_0) - \frac{v\tau}{\pi}] + \tilde{k}_z z}}{k^2 - \tilde{k}^2} \right\} d\tau = \frac{2i}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tilde{k}_z z} d\tilde{k}_z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\tilde{k}_y y}}{k^2 - \tilde{k}^2} \times$$

$$\times \cos \tilde{k}_y y_0 d\tilde{k}_y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i v \tau} e^{-i\tilde{k}_y \frac{v\tau}{\pi}} d\tau$$

Całką po $d\tau$ przedstawia funkcję $\delta(v + \frac{a\tilde{k}_y}{\pi})$ wobec czego można zapisać:

$$(11) F(v) = \frac{4i}{a} e^{-i\pi v y_0/a} \cos \frac{\pi v y_0}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\tilde{k}_z z} d\tilde{k}_z}{k^2 - \frac{v^2}{a^2} - \tilde{k}_z^2}$$

Całkę tą obliczamy korzystając z całkowego twierdzenia Cauchy, przy czym drogę całkowania wybieramy na płaszczyźnie zmiennej zespolonej \tilde{k}_z jak na rys. 2.



Rys. 2 Droga całkowania na płaszczyźnie \tilde{k}_z

Obliczając residuum w biegunie $\tilde{k}_z = k^2 - (\frac{\pi v}{a})^2$ (dla każdego wyrazu sumy we wzorze (7)) otrzymujemy ostatecznie :

$$(12) \quad \varepsilon_\omega = \frac{\pi}{a} \sum_{\nu=0}^{\infty} \cos \frac{\pi \nu y}{a} \cos \frac{\pi \nu y_0}{a} \frac{e^{i z \sqrt{k^2 - (\frac{\pi \nu}{a})^2}}}{\sqrt{k^2 - (\frac{\pi \nu}{a})^2}}$$

Dla dostatecznie dużych ν otrzymujemy $k^2 - (\frac{\pi \nu}{a})^2 < 0$, a więc rozwiązania tłumione eksponencjalnie.

Każdy z wyrazów sumy w wyrażeniu (12) interpretujemy jako mod falowodowy (rozchodzący się lub tłumiony).

Otrzymane metodą odbić przedstawienie funkcji Greena ma taką samą postać jak wynik uzyskany w pracy [5] , gdzie punktem wyjścia jest jednowymiarowa, charakterystyczna funkcja Greena. Pole każdego rozchodzącego się modu można zastąpić sumą pól wzdłuż dwu promieni optyki geometrycznej tzw. promieni "modalnych". Problem sumowania modów lub promieni znacznie upraszcza się przez stosowanie metody hybrydowej, promieniowo-modowej [5], [6]. Zagadnienie to zostanie omówione w ostatnim rozdziale tej pracy.

Powróćmy do głównego problemu (1), (2), (5) znalezienia funkcji g zależnej od czasu. Korzystając z przedstawienia (12) możemy zapisać:

$$(13) \quad g = - \sum_{\nu=0}^{\infty} \cos \frac{\pi \nu y}{a} \cos \frac{\pi \nu y_0}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i [z \sqrt{(\omega^2 - \omega_p^2)/c - (\frac{\pi \nu}{a})^2} - \omega t]} }{\sqrt{(\omega^2 - \omega_p^2)/c - (\frac{\pi \nu}{a})^2}} d\omega$$

Kontury całkowania dobieramy tak, aby była spełniona zasada przyczynowości (2), która przybiera teraz postać $g \equiv 0$ dla $z < ct$. Dla falowodowych modów rozchodzących się, czyli dla $\omega^2 > \omega_p^2 + (\frac{\pi \nu c}{a})^2$ całka po ω jest transformatą Fouriera funkcji Bessla J_0 i wynosi:

$$(14) \quad I = c \int_0^{\infty} [\chi c \sqrt{t^2 - (\frac{z}{c})^2}] U [t - \frac{z}{c}]$$

gdzie $\chi^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + (\frac{\pi \nu}{a})^2$

U funkcja Heaviside'a

Wobec tego poszukiwaną funkcję Greena można przedstawić jak następuje

$$(15) \quad g = \sum_{\nu=0}^{\infty} \text{Mody przestrzenno-czasowe}$$

$$(16) \quad g = A \sum_{\nu=0}^N \cos \frac{\pi \nu y}{\alpha} \cos \frac{\pi \nu y_0}{\alpha} J_0 \left[\sqrt{\frac{\omega_p^2}{c^2} + \left(\frac{\pi \nu}{\alpha c}\right)^2} \left(t^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2\right) \right] U\left(t - \frac{z}{c}\right) + \sum_{N}^{\infty} \text{Mody tłumione}$$

N- ostatni mod rozchodzący się.

Występująca w (16) funkcja $J_0(z, t) U\left(t - \frac{z}{c}\right)$ jest funkcją Greena dla równania Kleina-Gordona z jedną zmienną przestrzenną por. [1], [6]. Czyli dla każdego ν zależność rozwiązania od czasu jest opisana równaniem (17) o innym wyrazie nieróżniczkowanym χ^2 , odpowiedzialnym za dyspersję ośrodka i struktury:

$$(17) \quad \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} - \left(\frac{\pi \nu}{\alpha c}\right)^2 \right] g_\nu = \delta(z) \delta(t)$$

Jeśli zarówno ω_p jak i ν równe byłyby zeru, to równaniu (17) odpowiadałoby równanie falowe, dla którego funkcją Greena jest funkcja $U\left(t - \frac{z}{c}\right)$.

Wyrażenie (16) jest ścisłym rozwiązaniem postawionego zadania. Rozwiązania ściśle służą jako rozwiązania problemów kanonicznych dla bardziej złożonych zagadnień np. propagacji w ośrodkach niejednorodnych, problemów z nieregularnymi brzegami. W pracach [6], [7] omówiono zagadnienie konstruowania asymptotycznych rozwiązań (dla dużych t oraz z) równania (17) metodą promieni przestrzenno-czasowych i tworzenia z tych promieni hybrydowego promieniowo-modowego przedstawienia rozwiązania. Postać (16) sugeruje, iż dla ośrodka niejednorodnego w kierunku osi z , rozwiązanie problemu (1), (2), (5) można przedstawić jako sumę iloczynów rozwiązań typu fali stojącej $\cos \frac{\pi \nu y}{\alpha}$ oraz promieni przestrzenno-czasowych w zmiennych t, z .

3. Asymptotyczne przedstawienie rozwiązania dla $|kR| \gg 1$.

Dla dużych wartości $|kR|$ asymptotyczne rozwinięcie funkcji $H_0^{(1)}(kR)$ ma postać następującą:

$$(18) \quad H_0^{(1)}(kR) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} e^{i[kR - \frac{\pi}{4}]}$$

dla $|kR| \gg 1$

Wyrażenie (18) wykorzystamy do znalezienia asymptotycznej postaci zależnej od czasu funkcji Greena g dla dużych odległości punktu obserwacji od źródła.

Korzystając z przedstawienia $g(t)$ jako sumy funkcji Hankela można zapisać:

$$(19) \quad g(t) = A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ H_0^{(1)} \left[k \sqrt{(y-y_0-2na)^2 + z^2} \right] + H_0^{(1)} \left[k \sqrt{(y+y_0-2na)^2 + z^2} \right] \right\} e^{-i\omega t} d\omega$$

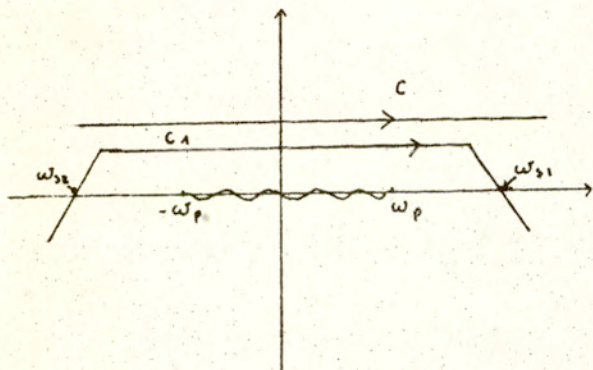
Podstawiamy rozwinięcie (18) do kolejnych wyrazów w sumie (19). Dla wyrazu n w pierwszym składniku otrzymamy :

$$(20) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(1)}(kR) e^{-i\omega t} d\omega \approx \int_C \sqrt{\frac{2}{\pi k R_n}} e^{i[kR_n - \frac{\pi}{4} - \omega t]} d\omega$$

gdzie $ck = \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$

$$R_n = \sqrt{(y-y_0-2na)^2 + z^2}$$

Warunkiem zastosowania tego przybliżenia jest duża odległość z . Na płaszczyźnie zmiennej zespolonej ω drogę całkowania wybieramy tak, aby była spełniona zasada przyczynowości oraz warunek $\text{Im } k > 0$. Rys 3



Rys.3 Droga całkowania na płaszczyźnie zmiennej zespolonej ω
 C pierwotna droga, C_1 droga przez punkty siodłowe $\omega_{s1,2}$

Całkę po prawej stronie (20) można obliczyć metodą punktu siodłowego, duży parametr wprowadzając przez przeskalowanie zmiennych R_n oraz t . Funkcja podcałkowa ma dwa punkty siodłowe gdzie zachodzi :

$$(21) \quad \omega_{s_{1,2}} = \mp \frac{\omega_p}{\sqrt{1 - \left(\frac{R_n}{ct}\right)^2}}$$

Zależność (21) ma taką samą postać jak wynikający z ogólnej teorii promieni przestrzenno-czasowych warunek określający parametr ω wzdłuż promienia [1], [6], [7].

Przyczynki od punktów siodłowych do całki (20) wyniosą :

$$(22) \quad I_{\omega_{s_{1,2}}} = e^{\pm i \omega_p \sqrt{t^2 - (R_n/c)^2}} \left(\sqrt{t^2 - \left(\frac{R_n}{c}\right)^2} \right)^{-1}$$

Dla jednej całki zsumowanie przyczynków od dwu punktów siodłowych da w wyniku wyrażenie

$$(23) \quad g = \frac{\omega_p \omega_p \sqrt{t^2 - \left(\frac{R_n}{c}\right)^2}}{2\pi \sqrt{t^2 - (R_n/c)^2}} \cdot U\left(t - \frac{R_n}{c}\right)$$

Funkcja ta jest ścisłym przedstawieniem wyrażenia (20) dla przypadku ośrodka jednorodnego. Można to pokazać korzystając z tablic transformat Fouriera. Każdą z całek $g(t)$ można zapisać jako sumę pól wzdłuż dwu promieni przestrzenno-czasowych. W przypadku ośrodka jednorodnego wyrażenie to pokrywa się z wyrażeniem ścisłym. Przy uwzględnieniu niejednorodności ośrodka (gdy $\omega_p(y, z)$) służy jako rozwiązanie odpowiednich problemów kanonicznych.

Wynik przeprowadzonych rozważań można symbolicznie zapisać:

$$(24) \quad g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ g_n(t; R_n(y-y_0)) \cdot U\left(t - \frac{R_n}{c}\right) + \right. \\ \left. + g_n(t; R_n(y+y_0)) \cdot U\left(t - \frac{R_n}{c}\right) \right\}$$

Rozwiązania problemu poszukuje się dla konkretnego czasu t i konkretnej odległości od źródła, dla danego punktu obserwacji w przestrzeni (\underline{q}, t) różne od zera w zapisie (24) będą tylko te wyrazy, dla których jest spełniony warunek

$$(25) \quad t > \frac{R_n}{c}$$

Dla ustalonego punktu w przestrzeni (\underline{q}) im czas obserwacji będzie większy, wyrażenie będzie zawierało więcej modów przestrzenno-czasowych.

Literatura

- [1] L.B.Felsen, N.Marcuvitz : Radiation and scattering of waves, Prentice Hall, N.J. 1973
- [2] L.B. Felsen: Transient Electromagnetic Fields. Edited by..., Springer-Verlang 1976
- [3] A.Brahmer-Kacprzyńska : Pole w pobliżu czoła sygnału
Prace IPPT 11/1984
- [4] P.Worse, H.Feshbach; Methods of Theoretical Physics,
McGraw Hill, 1953
- [5] L.B.Felsen, A.H.Kamel, IEEE Trans. A and P. Vol 29,
pp.637 /1981/
- [6] A.Brahmer-Kacprzyńska: Funkcja Greena dla płaskiego
falowodu wypełnionego plazmą elektronową, Prace IPPT
1982
- [7] A.Brahmer-Kacprzyńska : Metoda promieni przestrzenno-
czasowych w zastosowaniu do falowodów wypełnionych ós-
rodkiem dyspersyjnym, Prace IPPT 1984