SUR LA LOI DES GRANDS NOMBRES DE POISSON

PAR

PAUL MANSION

Professeur à l'Université de Gand (*)

---

1. *Bertrand, Bienaymé, Meyer* et *Czuber sur la* LOI DES GRANDS NOMBRES *de Poisson*. La *loi des grands nombres* exposée par Poisson dans ses *Recherches sur la probabilité des jugements en matière civile et criminelle* (Paris, Bachelier, 1837) (**) a été vivement critiquée par Bertrand et Bienaymé.

“ Lorsque la probabilité d'un événement est variable d'une épreuve à l'autre, dit Bertrand (*Calcul des probabilités*, Paris, Gauthier-Villars et fils, 1889, p. 94), le théorème de Bernoulli n'est plus applicable. La généralisation proposée par Poisson sous le nom de *loi des grands nombres* manque non seulement de rigueur, mais de précision. Les conditions supposées dans l'énoncé échappent par le vague à toute appréciation mathématique. „ Poisson, dit-il ailleurs (p. XXXII), “ a, à peu près seul, je crois, attaché une grande importance „ à sa découverte “ qui se distingue bien peu des lois connues du hasard „.

Bienaymé a lu à l'Académie des Sciences morales et politiques le 10 février 1855, et publié en 1870 (Paris, Anger) une note pédantesque de 12 pages in-8º, intitulée : *Sur un principe que M. Poisson avait cru découvrir et qu'il avait appelé* LOI DES GRANDS NOMBRES. Poisson, suivant Bienaymé, “ a simplement démontré le théorème de Jacques Bernoulli dans l'hypothèse où la probabilité constante est la valeur moyenne d'un ensemble de probabilités variables qui peuvent s'offrir toutes à toutes les épreuves : hypothèse si évidente qu'il n'est pas nécessaire de la démontrer „ (p. 9).

(*) Extrait des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES. t. XXVIII, première partie, p. 72-77.

(**) Voir surtout le *Préambule* de l'ouvrage, pp. 7 à 29, 29, ch. II, nºs 52 à 62, pp. 138-161 et le ch. IV tout entier, pp. 246-317. L'ouvrage de Poisson a été traduit en allemand par C. H. Schnuse sous le titre : *Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung und deren wichstigsten Anwendungen*, Braunschweig, Meyer, 1841. Le traducteur a ajouté à l'original la traduction d'un mémoire de Poisson sur la probabilité des résultats des observations, puis d'autres suppléments sur l'espérance morale, le calcul des rentes viagères et des assurances sur la vie.

“ L'identité d'une probabilité constante et de la probabilité moyenne d'un certain nombre de probabilités qui peuvent régir une épreuve quelconque, avait paru jusqu'à ces derniers temps d'une évidence complète. C'est même ainsi que Jacques Bernoulli a entendu sa probabilité unique. On peut s'en assurer en lisant ce qu'il en a dit dans le préambule de son théorème „ (p. 6-7).

Les deux géomètres qui, dans le dernier demi-siècle, ont étudié le plus minutieusement, dans toute son étendue, le calcul des probabilités, A. Meyer et Czuber, ne jugent pas aussi durement les recherches de Poisson.

A. Meyer (*Cours de calcul des probabilités publié par Folie*, Bruxelles, Hayez, 1874; ou 2e série, t. IV des *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége;* voir pp. 95-115) reproduit sans la critiquer la démonstration de Poisson.

Czuber analyse les recherches de Poisson dans son savant ouvrage : *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen* (Leipzig, Teubner, 1899, dans le 7e *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung;* voir §§ 34-36, pp. 78-87) et en reproduit la partie essentielle dans son traité didactique récent (*Wahrscheinligkeitsrechnung,* Leipzig, Teubner, 1903; voir §§ 82-88, pp. 120-138). Tout en reconnaissant avec Bienaymé et Bertrand que souvent la *loi des grands nombres* se confond avec le théorème de Bernoulli, il fait observer qu'elle ne conduit pas à la même valeur pour les écarts maxima qui peuvent se produire dans le cas d'un grand nombre d'épreuves (voir § 87, pp. 133-136).

2. *Objet de la présente note.* Dans les applications du calcul des probabilités aux sciences d'observation, on ne peut presque jamais appliquer directement le théorème de Bernoulli, même en y regardant la probabilité constante de l'événement simple considéré, comme une probabilité moyenne déduite d'épreuves antérieures. On sait, en effet, que cette probabilité moyenne est elle-même variable dans des limites plus ou moins étendues suivant le genre d'événements considéré et c'est à cause de cette circonstance que les limites des écarts sont parfois très différentes pour un même nombre d'épreuves et pour une même probabilité moyenne absolue de l'événement simple étudié.

Nous avons essayé de tenir compte de la variabilité de la probabilité moyenne et d'établir rigoureusement *la loi des grands nombres,* dans une note publiée dans les BULLETINS DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE (janvier 1893, 3e série, t. XXV, pp. 11-13); malheureusement, dans nos formules finales, entre un nombre k qui ne peut être déterminé avec précision et nous nous appuyons sur une formule relative au théorème de Bernoulli qui est insuffisamment démontrée.

Dans la présente note, nous évitons la considération de ce nombre k et nous nous appuyons sur une démonstration complète du théorème de Bernoulli que nous avons publiée dans les ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES (1902, t. XXVI, 2e partie, pp. 191-205).

3. LEMME. Posons

$$p + q = 1, \qquad p_1 + q_1 = 1, \qquad p_2 + q_2 = 1,$$

$$0 < p_1 \gtreqless p \leq p_2 < 1$$

$$\mathrm{T} = l\sqrt{\frac{\mu}{2pq}} = l_1\sqrt{\frac{\mu}{2p_1q_1}} = l_2\sqrt{\frac{\mu}{2p_2q_2}}$$

μ et T étant constants, l, l_1, l_2 des fractions inférieures respectivement à p et q, p_1 et q_1, p_2 et q_2.

L'expression $p - l$ croît ou décroît en même temps que p, comme on le voit, en écrivant

$$p - l = p - \frac{\mathrm{T}\sqrt{2pq}}{\sqrt{\mu}} = \sqrt{p}\left(\sqrt{p} - \frac{\mathrm{T}\sqrt{2}}{\sqrt{\mu}}\sqrt{1-p}\right).$$

L'expression $p + l$ croît aussi avec p. Car

$$p + l = 1 - (q - l).$$

Or, si p croît, $q = 1 - p$ et, par suite, $q - l$ décroît; donc $p + l$ croît.

Il résulte de là que l'on a

$$p_1 - l_1 \gtreqless p - l \leqq p_2 - l_2; \qquad p_1 + l_1 \gtreqless p + l \leqq p_2 + l_2$$

et aussi

$$\mu(p_1 - l_1) \gtreqless \mu(p - l) \leqq \mu(p_2 - l_2),$$
$$\mu(p_1 + l_1) \gtreqless \mu(p + l) \leqq \mu(p_2 + l_2).$$

Par suite, *lorsque p varie de p_1 à p_2, l'intervalle*

$$[\mu(p - l), \mu(p + l)]$$

est toujours compris dans l'intervalle I *plus grand*

$$[\mu(p_1 - l_1), \mu(p_2 + l_2)].$$

4. *Rappel du théorème de Bernoulli.* Nous avons démontré le théorème de Bernoulli sous la forme suivante : La probabilité que le nombre m de répétitions d'un événement A de probabilité constante p, sur μ épreuves, est compris dans l'intervalle $[\mu(p-l), \mu(p+l)]$ surpasse la quantité

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\mathrm{T}} e^{-t^2}dt - \frac{3}{\sqrt{2\mu pq}},$$

moyennant ces conditions : 1° $p \gtreqless q$; 2° $l \lesseqgtr \frac{1}{2}q$; 3° μ est au moins égal à 10 et à $\frac{1}{q^2}$; 4° $\mathrm{T}\sqrt{2pq} = l\sqrt{\mu}$.

La probabilité dont il est question surpassera *à fortiori*

$$\mathrm{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\mathrm{T}} e^{-t^2}dt - \frac{3}{\sqrt{2\mu p_3 q_3}},$$

si p_3q_3 est le plus petit des produits p_1q_1, p_2q_2 définis au n° 3, si l est inférieur à la plus petite des quantités $\frac{1}{2}p_1$, $\frac{1}{2}q_1$, $\frac{1}{2}p_2$, $\frac{1}{2}q_2$; enfin, si μ est au moins égal à 10 et à la plus grande des quantités $(1 : p_1^2)$, $(1 : q_1^2)$, $(1 : p_2^2)$, $(1 : q_2^2)$.

La probabilité que le nombre des répétitions m de l'événement A, sur μ épreuves, sera compris dans l'intervalle I, plus grand que $[\mu(p_1 - l_1), \mu(p_2 + l_2)]$ surpassera évidemment P, ou sera de la forme $\mathrm{P} + \alpha$, α étant une quantité positive.

5. *Loi des grands nombres.* Supposons qu'un certain événement A soit soumis ainsi que son contraire, à μ épreuves répétées, k fois dans des circonstances qui font prendre successivement à sa probabilité p, k valeurs différentes, dont chacune est au moins égale à p_1, au plus égale à p_2.

D'après ce qui précède, dans **chacune** de ces séries de μ épreuves, *la probabilité que le nombre m de répétitions de l'événement sera compris dans l'intervalle I* est de la forme $\mathrm{P} + \alpha$, α étant positif, et, par suite, *surpasse P.*

C'est, au fond, dans ce théorème que consiste la *loi des grands nombres.*

Il diffère du théorème de Bernoulli en ce que l'intervalle I est plus grand et l'expression P est plus petite que si p était constant, mais il est démontré avec la même rigueur et a la même valeur objective.

BRUXELLES. — IMPRIMERIE POLLEUNIS ET CEUTERICK.