LXII.

Ähnliche (deutliche) Abbildung und ähnliche Systeme.
1887. 7. 11.

Satz. Ist S ähnlich in sich selbst abgebildet, ist also das Bild $\varphi(S) = S' \mathrel{3} S$, ist ferner $S' \mathrel{3} T \mathrel{3} S$, so ist auch T dem S ähnlich.

Beweis. Klar im Falle $T = S$. Im entgegengesetzten Fall, sei U das System aller der Elemente von S, die *nicht* in T enthalten sind, und es sei U_0 die dieser Abbildung φ von S entsprechende *Bildkette* (§ 4) von U. Ist nun s irgend ein Element von S, so setze man

$$\psi(s) = \varphi(s) \text{ oder } = s,$$

je nachdem s in U_0 enthalten ist oder nicht. Dann ist ψ eine ähnliche Abbildung von S, und zwar ist $\psi(S) = T$. Hierzu ist zu zeigen

1. Ähnlichkeit der Abbildung ψ. — α) Wenn a und b verschieden und in U_0 enthalten sind, so sind $\psi(a) = \varphi(a)$ und $\psi(b) = \varphi(b)$ verschieden, weil φ eine ähnliche Abbildung ist. β) Wenn a in U_0, b *nicht* in U_0 enthalten, so sind $\psi(a) = \varphi(a)$ und $\psi(b) = b$ verschieden, weil U_0 Kette, $\varphi(U_0) \mathrel{3} U_0$, also $\psi(a)$ in U_0, $\psi(b)$ *nicht* in U_0 enthalten. γ) Wenn a und b *nicht* in U_0 enthalten und verschieden, so sind $\psi(a) = a$, $\psi(b) = b$ verschieden.

2. $\psi(S) \mathrel{3} T$. — Bezeichnet man mit V das System aller der Elemente von S, welche *nicht* in U_0 enthalten sind, so ist

$$S = \mathfrak{M}(U_0, V), \quad \psi(S) = \mathfrak{M}(\varphi(U_0), V).$$

Nun ist, weil $U_0 \mathrel{3} S$, auch $\varphi(U_0) \mathrel{3} \varphi(S)$, und da $\varphi(S) \mathrel{3} T$, so ist auch $\varphi(U_0) \mathrel{3} T$; da außerdem $V \mathrel{3} T$ {denn wäre ein Element v von V *nicht* in T enthalten, also in U, also (§ 4) auch in U_0, gegen die Defin. von V; *besser vorauszuschicken*}, so folgt (§ 1) $\psi(S) \mathrel{3} T$.

www.rcin.org.pl

3. $T \mathfrak{Z} \psi(S)$. t irgend ein Element von T. — Ist t in V enthalten, so ist t {zufolge $\psi(S) = \mathfrak{M}(\varphi(V_0), V)$} auch in $\psi(S)$ enthalten. Ist aber t nicht in V, also in U_0 enthalten, so muß, weil (§ 4) $U_0 = \mathfrak{M}(U, \varphi(U_0))$ ist, nach Definition von U, t in $\varphi(U_0)$, also auch in $\psi(S)$ enthalten sein. W. Z. B. W.

Oder gleich klar $T = \mathfrak{M}(\varphi(U_0), V) = \psi(S)$.

Satz: Ist A einem Teile von B, und ist B einem Teile von A ähnlich, so sind auch A, B ähnlich.

Beweis. Deutliche Abbildungen φ, ψ; und

$$\varphi(A) \mathfrak{Z} B, \quad \psi(B) \mathfrak{Z} A$$

also

$$\psi\varphi(A) \mathfrak{Z} \psi(B) \mathfrak{Z} A;$$

da nun die Abbildung $\psi\varphi$ ebenfalls ähnlich ist, so ist $\psi\varphi(A)$ ähnlich A, also (nach vorigem Satze) auch $\psi(B)$ ähnlich A, und da $\psi(B)$ ähnlich B, so (einfachster Satz über Ähnlichkeit) ist auch A ähnlich B. W. Z. B. W.

Erläuterungen zur vorstehenden Abhandlung.

Dieser nach der Datierung vom 11. Juli 1887 stammende Beweis des Cantor-Bernsteinschen Äquivalenzsatzes von 1897 ist genau derselbe, den Zermelo 1908 gegeben hat mit dem ausdrücklichen Hinweis, daß sein Beweis nur auf der Dedekindschen Kettentheorie beruhe (Grundlagen der Mengenlehre, Math. Ann. **65**, Nr. 25 und 27). In der Tat findet sich der wesentliche Hilfssatz, $T = \mathfrak{M}(\varphi(U_0), V)$, schon ohne Beweis in Satz 63, § 4, von „Was sind und was sollen die Zahlen?" (LI dieser Ausgabe; die obigen Paragraphenverweisungen beziehen sich auf diese Schrift).

In einem Brief vom 29. August 1899 schreibt Dedekind über den Satz an Cantor: „Als der junge Herr Felix Bernstein mich Pfingsten 1897 in Harzburg besuchte, sprach er von dem Satze B. auf S. 7 der Übersetzung von Marotte und stutzte ein wenig, als ich meine Überzeugung aussprach, daß derselbe mit meinen Mitteln (Was sind und was sollen die Zahlen?) leicht zu beweisen sei; doch kam es zu keiner weiteren Unterhaltung über seinen oder meinen Beweis. Nach seiner Abreise setzte ich mich daran und konstruierte den hier beiliegenden Beweis des offenbar mit B. gleichwertigen Satzes C."

Dieser Beweis stimmt mit dem vorliegenden sachlich überein; die Bezeichnung ist geändert, schließt sich nicht mehr so eng an „Was sind und was sollen die Zahlen?" an. Offenbar hatte Dedekind vergessen, daß es sich um Rekonstruktion eines alten Beweises handelte.

Den ursprünglichen Beweis fand J. Cavaillès-Paris im Nachlaß*).

---

*) Zusatz bei der Korrektur: Der Beweis von 1899 ist unterdes erschienen in den Gesammelten Abhandlungen von Georg Cantor, Berlin, Springer (1932), S. 449.

www.rcin.org.pl

F. Bernstein übermittelt noch die folgenden Bemerkungen:

„Der genannte Besuch war durch Cantor veranlaßt. Dieser hatte kurz zuvor die Paradoxie der Menge aller Ordnungszahlen gefunden, und zwar bei dem Versuche, zu beweisen, daß jede Menge wohlgeordnet werden könne — ein Beweis, den er etwa mit ähnlichen Überlegungen zu führen suchte, wie sie Zermelo dann später, nur unter Vermeidung der inkonsistenten Mengen, in seinem ersten Beweise der Wohlordnung verwandt hat. Cantor bemerkte sehr wohl, daß die gefundene Paradoxie auch auf die Menge aller Dinge Anwendung findet. Diese hatte Dedekind in seiner Schrift ‚Was sind und was sollen die Zahlen?‘ zum Beweise der Existenz unendlicher Mengen angewandt, und zwar so, daß nach dem Aufbau seiner Schrift die Definition der Zahlen von der widerspruchsfreien Existenz dieser Mengen abhängt. Cantor hatte ihn wohl schon brieflich um eine Stellungnahme gebeten und beauftragte mich nun, da eine solche, vermutlich infolge der schweren Erkrankung Dedekinds im Winter 1896/97, ausblieb, dieselbe in mündlicher Verhandlung herbeizuführen.

Dedekind war jedoch zu einer abschließenden Stellungnahme damals nicht gelangt und äußerte mir gegenüber, daß er in seinen Überlegungen fast zu Zweifeln daran gelangt sei, ob das menschliche Denken ein vollkommen rationales sei.

Von besonderem Interesse dürfte folgende Episode sein: Dedekind äußerte, hinsichtlich des Begriffes der Menge: er stelle sich eine Menge vor wie einen geschlossenen Sack, der ganz bestimmte Dinge enthalte, die man aber nicht sähe, und von denen man nichts wisse, außer daß sie vorhanden und bestimmt seien. Einige Zeit später gab Cantor seine Vorstellung einer Menge zu erkennen: Er richtete seine kolossale Figur hoch auf, beschrieb mit erhobenem Arm eine großartige Geste und sagte mit einem ins Unbestimmte gerichteten Blick: ‚Eine Menge stelle ich mir vor wie einen Abgrund.‘ “

Noether.

www.rcin.org.pl