LXVI.

Aus Briefen an H. Weber*).

1876.

... Zuvor aber lassen Sie mich Ihnen erklären, daß ich mit herzlichstem Danke Ihre freundschaftliche Einladung annehme, trotz des früher abgeschlossenen Vertrages nun doch neben Ihnen mit meinem Namen auf dem Titel des Werkes zu erscheinen. Sie hätten zwar wirklich nicht nöthig gehabt, sich Gewissensbisse zu machen, als alleiniger Herausgeber aufzutreten, denn Sie haben nicht blos die Hauptarbeit daran gethan, sondern auch das Ganze durch Ihre vollständige Beherrschung der Riemann'schen Schöpfungen so geleitet, daß die Welt sagen wird: es ist gut geworden. Mir wäre das ganz unmöglich gewesen; unzählige Male habe ich mir das in diesem Winter gesagt, und bei dem wirklichen Fortgange Ihrer Arbeit habe ich erst so recht eingesehen, was Alles dazu gehört, und wie wenig mein Wissen dazu ausgereicht haben würde. Mit dem größten Interesse bin ich Ihrer Arbeit gefolgt, bei der ich sehr viel gelernt habe, und die Freude darüber, mit Ihnen in einen so nahen Verkehr gekommen zu sein, würde allein mir reichliche Belohnung für meinen Arbeitsantheil. Nun habe ich mir aber Ihren erneuten Antrag überlegt, und ich finde es so verlockend und ehrenvoll, gerade in Ihrer Gesellschaft zu erscheinen, daß ich nicht widerstehen kann; nur muß es in einer Form geschehen, die dem Publicum keinen Zweifel darüber läßt, daß Sie der eigentliche Herausgeber sind; ich habe darüber nachgedacht und bin z. B. auf folgende Titel-Form gekommen: „Riemann's gesammelte mathematische Werke. In Verbindung mit R. Dedekind herausgegeben von H. Weber“ oder: „R. g. m. W. Herausgegeben von H. Weber unter Mitwirkung von R. Dedekind.“ Vielleicht wird es Ihnen gelingen, eine Form zu finden, die das wirkliche Verhältniß noch besser trifft. Es wird ferner in der Ordnung sein,

*) [Diese Briefe wurden durch Herrn P. Epstein freundlichst zur Verfügung gestellt. E. N.]

31*

daß Sie die Vorrede allein unterzeichnen. Finden Sie aber bei näherer Überlegung, daß mein Miterscheinen doch einige formelle Schwierigkeiten mit sich bringt (was wird z. B. Teubner dazu sagen?), so lassen Sie uns zu unserer alten Verabredung zurückkehren, und seien Sie überzeugt, daß die freundschaftliche Gesinnung, aus welcher Ihr Antrag hervorgegangen ist, mich herzlich erfreut und meine Ansprüche vollauf befriedigt hat.

Da ich die Vorrede erwähnt habe, so möchte ich Sie fragen, ob Sie beabsichtigen, mit einigen Worten auch die Geschichte dieser Herausgabe mitzutheilen? es würde dann namentlich Clebsch zu nennen sein, der die Sache wirklich mit großem Eifer ergriff, wiewohl ich glaube, daß er den Nachlaß nicht mit solcher großen Sorgfalt durchforscht haben würde, wie Sie es gethan haben.

Dies bringt mich zunächst auf Ihre Frage über den Titel der Biographie; ich bin der Meinung, daß er einfach so lauten möge: „Bernhard Riemann's Lebenslauf“ ohne irgend einen Zusatz, und ich würde wünschen, daß Sie in Ihrer Vorrede ganz kurz ungefähr Folgendes bemerkten: „Die biographische Skizze ist auf meinen Wunsch von R. Dedekind verfaßt, hauptsächlich nach Mittheilungen der Riemann'schen Familie.“ Hierzu bewegt mich Folgendes: ich habe mich einige Male in der dritten Person eingeführt, weil ich ein unbestimmtes Gefühl hatte und auch noch habe, daß das „ich“ oder „mir“ oder „in meiner Gesellschaft“ etwas den sonst ruhigen Ton Störendes für den Leser haben würde, was ich vermeiden wollte. Als Henle mein Manuscript in Göttingen gelesen hatte, fragte er sogleich: „Wollen Sie sich in der Überschrift als Verfasser nennen? das geht nicht, wenn Sie von sich in der dritten Person sprechen.“ Das war auch ganz meine Meinung, und ich fragte ihn nur noch, wofür er sich lieber entscheiden würde: dritte Person mit Nennung des Verfassers an einer ganz entfernten Stelle, nämlich in der Vorrede — oder erste Person mit Nennung des Verfassers in der Überschrift selbst — worauf er sich sofort für die erstere Art erklärte; und mir scheint es ebenfalls so besser zu sein. Mich ganz wegzulassen aus der Erzählung, wäre geradezu unnatürlich; sollte ich mich aber in erster Person einführen, so würde dem Leser wieder auffallen, daß ich z. B. gar nicht erwähne, wie ich Riemann kennen gelernt habe, und Anderes; und ich möchte gern alles Störende vermeiden. ...

Braunschweig, 8. November 1878.

... Dein Apostelthum für die Stetigkeit und Irrationalität freut mich; die Verbindung mit der Darstellung von Heine (oder vielmehr Cantor) habe ich am Schluß von §. 6 auch empfohlen; die Abkürzung, die man dadurch erreicht, ist aber nicht beträchtlich, und ich glaube jetzt sogar, daß für Schüler, die von Grenzwerthen veränderlicher Größen noch Nichts wissen, meine Definition der Summe, Differenz u. s. w. leichter zu begreifen ist und bei gehörigem Vortrage überhaupt gar keine Schwierigkeit darbietet. Ich bin in der That so optimistisch zu glauben, daß auch auf den Gymnasien die Arithmetik streng gelehrt werden kann; denn bisher giebt der betreffende Unterricht eigentlich nur ein ausgezeichnetes Beispiel davon, mit welcher Leichtigkeit man die Schüler betrügen kann, sobald man den Muth hat, auf den Gebrauch der Logik zu verzichten. Ein herrliches Bildungsmittel, um die geistigen Fähigkeiten der Jugend zu entwickeln, diese Arithmetik, wie sie gelehrt wird! Fick hat neulich eine Lanze für die Realschulen gebrochen, aber über den Werth des mathematischen Gymnasialunterrichts denke ich anders als er, und vielleicht schreibe ich nächstens mal darüber. ...

Braunschweig, 19. November 1878.

... Es freut mich sehr, daß das Thema des Arithmetik-Unterrichts auf Gymnasien Dich so sehr interessirt, und ich glaube, daß wir bei mündlicher Unterhaltung darüber uns einigen werden. Das Buch von Schröder kenne ich genau; es ist nicht für die Schüler, sondern für den Lehrer bestimmt; es soll kein Lehrbuch sein. Es enthält sehr viel Gutes, aber auch viel Überflüssiges. Ich will den Köpfen der Schüler gewiß nicht mehr zumuthen, sondern weniger. Von Stetigkeit braucht gar nicht die Rede zu sein; aber die Schüler müssen einen deutlichen Überblick über das Gebiet der Zahlen, zunächst der rationalen Zahlen gewinnen; die Unterscheidung nach Größer und Kleiner (durch Subtraction) muß ihnen in Fleisch und Blut übergehen. Dann sind sie vollkommen vorbereitet für das Irrationale. Und hier sind wir, wenn ich Deinen Brief richtig verstehe, vielleicht verschiedener Meinung. Du schreibst: „Ich kann dann auch nichts Falsches darin sehen, wenn man z. B. sagt $\sqrt{2}$ suchen heißt eine Zahl suchen, deren Quadrat sich von 2 so wenig unterscheidet als vorgeschrieben ist, und daß $\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{6}$ ist, ist dann auch bewiesen". Erstens gefällt mir hieran nicht recht, daß mehr die Operation, als das Resultat der Operation definirt wird; ich mag es lieber, wenn z. B. die Summe als eine durch die Summanden vollständig bestimmte Zahl definirt wird, als wenn das Addiren erklärt wird; dies schon bei den rationalen Zahlen. Nun aber denke Dir genau einen Schüler, der die rationale Arithmetik gut begriffen hat, und dem eben vom Lehrer in aller Strenge bewiesen ist: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ existiren nicht; wird er nicht verwirrt werden müssen, wenn nun doch von $\sqrt{2}$ die Rede ist, zwar nicht von $\sqrt{2}$ selbst, sondern nur von dem Suchen der $\sqrt{2}$? Er hat ferner in der rationalen Arithmetik gelernt, mit dem Worte Product eine ganz bestimmte Vorstellung zu verbinden; kann er nun das Zeichen $\sqrt{2}.\sqrt{3}$ verstehen? Mir scheint es, er wird viel leichter das Phänomen eines „Schnittes" begreifen, bei welchem die ihm wohlbekannten rationalen Zahlen sämmtlich in so entschiedener Weise darauf angesehen werden, ob sie in die eine oder die andere Klasse fallen; einige Beispiele werden das Wesen dieser Erscheinung ihm vollständig deutlich machen; die Schärfe dieses Begriffes ist wohlthätig für sein Denken, und er wird sich auch nicht sehr dagegen sträuben, wenn diese Erscheinung zur Einführung neuer Zahlen benutzt wird: soviel Schnitte, soviel Zahlen. Auch die Definitionen der Summen, Differenzen u. s. w. der neuen Zahlen sind sehr einfach herzustellen. Du willst doch auch, daß die Schüler mit $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ u. s. w. umgehen lernen; willst Du nun, daß sie darin immer nur Symbole für Näherungsrechnungen sehen? oder hältst Du es nicht auch für besser, daß sie darin Symbole für neue, mit den alten ganz gleichberechtigte Zahlen sehen? welche von beiden Vorstellungen wird das genauere, schärfere Denken befördern, den Geist besser üben? Doch es ist zu schwer, sich hierüber schriftlich zu einigen.

Du fragst auch nach meiner Untersuchung über den Uranfang der Arithmetik: „Was sind und was sollen die Zahlen?" Sie ruht und ich zweifle, ob ich sie je publiciren werde; sie ist auch nur in rohem Entwurfe aufgeschrieben, mit dem Motto: „Was beweisbar ist, soll in der Wissenschaft nicht ohne Beweis geglaubt werden." Die Hauptsache ist die Unterscheidung des Zählbaren vom Unzählbaren, und der Begriff der Anzahl, und die Begründung der sog. vollständigen Induction. ...

19. 1. 80.

... Aber die Theorie der ganzen Functionen ω, die Definition von $\Delta(\Omega)$ und vieles Andere macht große Weitläufigkeiten, wie ich glaube, und wenn dies auch nicht wäre, so würde eine solche schattenhafte Behandlung des Wesen-Körpers Ω*) jeden anderen, als mich (und Dich?), im höchsten Grade zurückschrecken, und er würde auch durch die nachträgliche Beseelung dieser Schattenwesen ω nicht mehr zu versöhnen sein; ich für mein Theil habe aber gegen diese Auffassung an sich gar nichts einzuwenden als die Weitläufigkeit, und ich muß Dir sogar gestehen, daß die furchtbare Abgeschlossenheit, in welcher der Körper Ω so erscheint, und die vollständige starre Bestimmtheit jedes einzelnen in ihm enthaltenen Wesen-Individuum ω mir sehr wohl gefällt; und schön ist es doch, wenn diese Welt durch einen Zauberschlag plötzlich zum Zahlen-Leben erweckt wird! Ich habe aber gar nichts dagegen, wenn Du mich ordentlich auslachst wegen meiner Begeisterung.

Will man nun also in diesen Hades nicht mit hinabsteigen, sondern stets in der Sonnenhelle des Zahlenlebens bleiben (— so sehr haben wir uns schon an die complexen Zahlen gewöhnt, daß wir als Sonnenhelle empfinden, was unseren Vorfahren als nächtliches Dunkel erschien —), so kann man, um auch die Conjugirten genießen zu dürfen, wohl so verfahren, daß man Anfangs nur ein beliebig kleines Stück der z-Ebene betrachtet, über welchem die Blätter der Riemann'schen Fläche sämmtlich von einander gesondert verlaufen, und lediglich für dieses Stück die Functionen ω untersucht; nimmt man für ϑ ein beliebiges, aber bestimmtes dieser n Blätter, so erhält man einen bestimmten zugehörigen Functionenkörper Ω, in welchem jede Function ω einwerthig ist; jede Beziehung zwischen den in ihm enthaltenen Functionen ω, die sich durch rationale Gleichungen

---

*) Wenn eine irreductibele Function $f(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$ mit Coefficienten a gegeben ist, die rationale Functionen von z sind, so kann man ein System Ω von Wesen (Functionen) ω erschaffen, deren jedes durch n rationale Functionen $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ völlig bestimmt ist. ... Man kann der Einfachheit halber festsetzen, daß unter ω die Function x_0 selbst verstanden werden soll, wenn alle folgenden $x_1, x_2 \ldots$ identisch verschwinden; versteht man dann unter ϑ das Wesen, welches dem $x_1 = 1$, $x_0 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0$ entspricht, dann ist schon in aller Strenge $\omega = x_0 + x_1\vartheta + x_2\vartheta^2 + \cdots x_{n-1}\vartheta^{n-1}$ zufolge dieser Definitionen.

ausdrücken läßt, kommt schon in diesem Stück zur Geltung, und später wird sich zeigen, daß alle Erscheinungen, die in der fernsten Ferne auftreten, schon durch die Erscheinungen innerhalb dieses kleinen Stückes vollständig „bestimmt und entschieden“ sind. ...

30. 10. 1880.

... Ich benutze die Gelegenheit, um Dir nochmals meinen innigsten Dank für die ganze, beinahe zweijährige Arbeit zu sagen, von der Du so unendlich viel Mühe gehabt hast, und an der Theil zu nehmen mir die größte Freude und eine bedeutende Bereicherung an Wissen gebracht hat; es ist ein ganz besonderes schönes Gefühl, sich so bei der Erforschung der Wahrheit zu begegnen, was Pascal in seinem ersten Brief an Fermat so trefflich ausdrückt: Car je voudrais désormais vous ouvrir mon cœur, s'il se pouvait, tant j'ai de joie de voir notre rencontre. Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris. Oft habe ich an diese Stelle denken müssen bei den Fortschritten unserer Arbeit, die nach mancherlei Oscillationen doch immer mehr den Charakter innerer Nothwendigkeit angenommen haben. Es soll mich nun auch herzlich freuen, wenn die Sache einigen Beifall finden wird, worauf ich aber vorläufig nicht allzu sehr baue, weil die langweiligen Moduln gewiß manchen zurückschrecken werden. ...

Braunschweig, 24. Januar 1888.

... Daß Du solches Interesse an meiner Zahlen-Schrift nimmst, erfreut mich sehr; es werden sehr Wenige sein, die das thun. Cantor hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß er den Unterschied zwischen dem Endlichen und Unendlichen schon 1877 (Crelle Bd. 84, S. 242) hervorgehoben habe, daß er aber keine Reclamation wegen Priorität beabsichtige. Darüber ließe sich Vieles sagen; in gewissem Sinne hat er ja Recht, und doch bezweifelte er 1882 die Möglichkeit einer einfachen Definition und war sehr überrascht, als ich ihm, durch seinen Zweifel veranlaßt, und auf seinen Wunsch die meinige mittheilte; man besitzt bisweilen Etwas, ohne dessen Werth und Bedeutung gehörig zu würdigen. Zu einem Prioritätsstreit habe ich aber auch nicht die geringste Lust. — Deine Bemerkungen und Vorschläge habe ich wiederholt durchgelesen und durchdacht; ob aber durch sie eine wesentliche Vereinfachung und Abkürzung erzielt würde, läßt sich schwer beurtheilen, ehe man nicht das Neue in vollständiger Ausführung vor sich sieht. Außerdem muß ich Dir gestehen, daß ich bis jetzt immer noch die Ordinalzahl, nicht die Cardinalzahl (Anzahl) als den ursprünglichen Zahlbegriff ansehe. Ich hätte vielleicht besser gethan, diese Namen (Ordinal, Cardinal) in meiner Schrift gar nicht zu erwähnen, da sie in der gewöhnlichen Grammatik in anderem Sinne gebraucht werden. Meine Ordinalzahlen, die abstracten Elemente des geordneten einfach unendlichen Systems, haben natürlich gar Nichts zu thun mit der adjectivischen Form der in der Grammatik *sogenannten* Ordinalzahlen, aus welcher Form etwa ein Grund für die begriffliche Priorität der Cardinalzahlen (Anzahlen) hergenommen werden könnte; diese adjectivische Form wird auch gebraucht, wo von einer Anordnung (also von *meinen* Ordinalzahlen) gar keine Rede ist, z. B. wenn man von dem *fünften* Theile einer Strecke spricht. Die Cardinalzahl (Anzahl) halte ich nur für eine *Anwendung* der Ordinalzahl, und auch in unserem ἀριϑμητίζειν gelangt man zum Begriff fünf nur durch den Begriff vier. Will man aber Deinen Weg einschlagen — und ich würde sehr empfehlen, ihn einmal ganz durchzuführen —, so möchte ich doch rathen, unter der Zahl (Anzahl, Cardinalzahl) lieber nicht die *Classe* (das System aller einander ähnlichen endlichen Systeme) selbst zu verstehen, sondern etwas *Neues* (dieser Classe Entsprechendes), was der Geist *erschafft*. Wir sind göttlichen Geschlechtes und besitzen ohne jeden Zweifel schöpferische Kraft nicht blos in materiellen Dingen (Eisenbahnen, Telegraphen), sondern ganz besonders in geistigen Dingen. Es ist dies ganz dieselbe Frage, von der Du am Schlusse Deines Briefes bezüglich meiner Irrational-Theorie sprichst, wo Du sagst, die Irrationalzahl sei überhaupt Nichts anderes als der Schnitt selbst, während ich es vorziehe, etwas *Neues* (vom Schnitte Verschiedenes) zu erschaffen, was dem Schnitte entspricht, und wovon ich sage, daß *es* den Schnitt hervorbringe, erzeuge. Wir haben das Recht, uns eine solche Schöpfungskraft zuzusprechen, und außerdem ist es der Gleichartigkeit aller Zahlen wegen viel zweckmäßiger, so zu verfahren. Die rationalen Zahlen erzeugen doch auch Schnitte, aber ich werde die rationale Zahl gewiß nicht für identisch ausgeben mit dem von ihr erzeugten Schnitte; und auch nach Einführung der irrationalen Zahlen wird man von Schnitt-Erscheinungen oft mit solchen Ausdrücken sprechen, ihnen solche Attribute zuerkennen, die auf die entsprechenden Zahlen selbst angewendet gar seltsam klingen würden. Etwas ganz Ähnliches gilt auch von der Definition der Cardinalzahl (Anzahl) als Classe; man wird Vieles von der Classe sagen (z. B. daß sie ein System von unendlich vielen Elementen, nämlich allen ähnlichen Systemen ist), was man der Zahl selbst doch gewiß höchst ungern (als Schwergewicht) anhängen würde; denkt irgend Jemand daran, oder wird er es nicht gern bald vergessen, daß die Zahl vier ein System von unendlich vielen Elementen ist? (Daß aber die Zahl 4 das Kind der Zahl 3 und die Mutter der Zahl 5 ist, wird Jedem stets gegenwärtig bleiben). Aus demselben Grunde habe ich auch Kummer's Schöpfung der Idealzahlen stets für durchaus berechtigt gehalten, wenn sie nur mit Strenge durchgeführt wird. Ob ferner die Zeichensprache ausreicht, um alle neu zu schaffenden Individuen einzeln zu bezeichnen, fällt nicht ins Gewicht; sie reicht immer dazu aus, um die in irgend einer (begrenzten) Untersuchung auftretenden Individuen zu bezeichnen. ...

[Dedekind ist auch im pädagogischen Sinn auf solche Grundlagenfragen zurückgekommen. So liegt z. B. ein Brief des Zweiundachtzigjährigen vor — Antwort an einen damaligen Studenten, Lachmann, jetzt im Besitz von G. Hamel —, wo er die „Erweiterung des Reiches N der natürlichen Zahlen zu dem Reiche G der ganzen rationalen Zahlen“ durch Einführung von Zahlenpaaren in allen Einzelheiten durchführt, unter Bestätigung aller Rechenregeln, und den Gang der übrigen Erweiterungen andeutet.

In pädagogischer Richtung liegt auch eine im Nachlaß vorhandene ausführliche Korrespondenz mit einem Hamburger Oberlehrer, Keferstein, wo Dedekind versucht, Mißverständnisse in der Auffassung von „Was sind und was sollen die Zahlen?“ zu zerstreuen. Er zeigt dabei, wie er durch Analyse der Eigenschaften der natürlichen Zahlenreihe zu seinem synthetischen Aufbau gekommen ist, wie insbesondere die Kettentheorie notwendig (und hinreichend) war, um das „System S von fremden, alle Ordnung störenden Eindringlingen zu reinigen und auf N zu beschränken“. „Dies war einer der schwierigsten Punkte meiner Analyse, und seine Überwindung hat ein langes Nachdenken erfordert.“ E. N.]