898.

SUR L'ÉQUATION MODULAIRE POUR LA TRANSFORMATION DE L'ORDRE 11.

[From the *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. CXI. (*Juillet—Décembre*, 1890), pp. 447—449.]

L'ÉQUATION en u, v, en y écrivant $u = x$, $v = y$, est

$$\left.\begin{array}{l} y^{12} \\ + y^{11} \quad (32x^{11} - 22x^3) \\ + y^{10} \,. \quad 44x^6 \\ + y^9 \quad (88x^9 + 22x) \\ + y^8 \,. \quad 165x^4 \\ + y^7 \,. \quad 132x^7 \\ + y^6 (- \quad 44x^{10} + 44x^2) \\ + y^5 \quad - 132x^5 \\ + y^4 \quad - 165x^8 \\ + y^3 (- \quad 22x^{11} - 88x^3) \\ + y^2 \quad - \quad 44x^6 \\ + y \quad (22x^9 - 22x) \\ + 1 \,. - \quad x^{12} \end{array}\right\} = 0.$$

Selon un résultat trouvé par H. J. S. Smith, pour la transformation de l'ordre p, la courbe est de l'ordre $2p$, et il y a à l'origine un point double, à l'infini deux points singuliers équivalents chacun à $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ points doubles, et de plus $(p-1)(p-3)$ points doubles. Au cas $p = 11$, le nombre de ces derniers points doubles est donc $= 80$. Cela s'accorde avec l'expression

$$D = x^{12}(1 - x^8)^{10}(16x^{16} - 31x^8 + 16)^2(x^{64} - 301960x^{56} + \ldots + 1)^2,$$

www.rcin.org.pl

trouvée par M. Hermite pour le discriminant de la fonction; et l'on voit ainsi que les valeurs de x, qui correspondent aux quatre-vingts points doubles, sont données par les équations

$$16x^{16} - 31x^8 + 16 = 0,$$
$$x^{64} - 301960x^{56} + \ldots + 1 = 0.$$

Je ne considère que les seize points doubles donnés par la première équation. Cette équation donne

$$x^8 = \tfrac{1}{32}(31 + 3i\sqrt{7}), \quad x^4 = \tfrac{1}{8}(i + 3\sqrt{7}), \quad x^2 = \frac{1+i}{4\sqrt{2}}(-3 + i\sqrt{7});$$

il y a ainsi quatre points doubles, pour lesquels les valeurs de x sont

$$x = \pm\sqrt{\frac{1+i}{4\sqrt{2}}(-3 + i\sqrt{7})}, \quad x = \pm\sqrt{\frac{1+i}{4\sqrt{2}}(-3 - i\sqrt{7})};$$

je trouve que les valeurs correspondantes de y sont $y = \frac{1+i}{\sqrt{2}}x$, savoir que les quatre points sont situés sur la droite $y = \frac{1+i}{\sqrt{2}}x$, et, en changeant successivement les signes de i et $\sqrt{2}$, on voit ainsi que les seize points sont situés, quatre à quatre, sur les droites

$$y = \frac{1+i}{\sqrt{2}}x, \quad y = \frac{1-i}{\sqrt{2}}x, \quad y = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}x, \quad y = -\frac{1-i}{\sqrt{2}}x.$$

J'écris, pour abréger,

$$m = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \text{ (donc } m^4 = -1),$$

$$p = \tfrac{1}{4}(-3 + i\sqrt{7}),$$

donc

$$2p^2 + 3p + 2 = 0.$$

En écrivant $y = mx$ dans l'équation et en rejetant le facteur x^2, puis en écrivant $x^2 = mp$, l'équation se présente sous la forme

$$\left.\begin{array}{lll}
m^{10}p^{10} & . & 32m^{11} \\
+\, m^8p^8 & . & 88m^9 \\
+\, m^7p^7 & . & 44m^{10} - 44m^6 \\
+\, m^6p^6 & . & -22m^{11} + 132m^7 - 22m^3 \\
+\, m^5p^5 & . & m^{12} + 165m^8 - 165m^4 - 1 \\
+\, m^4p^4 & . & 22m^9 - 132m^5 + 22m \\
+\, m^3p^3 & . & 44m^6 - 44m^2 \\
+\, m^2p^2 & . & -88m^3 \\
+\, 1 & . & -32m
\end{array}\right\} = 0,$$

où les coefficients ne contiennent que les puissances m^{21}, m^{17}, m^{13}, m^9, m^5, m^1 de m et se réduisent ainsi à des multiples de m; il y a aussi un facteur numérique 8, et, en divisant par $-8m$, l'équation devient

$$4p^{10}-11p^8-11p^7+22p^6+41p^5+22p^4-11p^3-11p^2+4=0\,;$$

cette équation est de la forme

$$(2p^2+3p+2)^2(p^6-3p^5+2p^4+p^3+2p^2-3p+1)=0.$$

La droite $y=mx$ a donc, avec la courbe, quatre intersections doubles

$$p=\tfrac{1}{4}(-3\pm i\sqrt{7}),$$

c'est-à-dire

$$x^2=\frac{1+i}{4\sqrt{2}}(-3\pm i\sqrt{7}):$$

on démontre sans peine que la droite n'est pas une tangente, et ces valeurs correspondent ainsi à des points doubles de la courbe, c'est-à-dire qu'il y a sur la droite $y=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}x$ quatre points doubles. Réciproquement, cette valeur de x^2 conduit au facteur $(16x^{16}-31x^8+16)^2$ du déterminant de l'équation modulaire.

www.rcin.org.pl