Nota II.

Ibidem (*), pp. 244–246.

3. Applicando i teoremi precedenti alle deformazioni infinitesime delle superficie flessibili e inestendibili, abbiamo:

La deformazione infinitesima di una superficie flessibile e inestendibile a curvatura positiva è definita nei seguenti casi: 1° *quando sono note le componenti degli spostamenti dei punti del contorno parallelamente ad una data direzione*; 2° *quando sono note le componenti della rotazione di ogni elemento del contorno rispetto ad una data direzione* (supponendo decomposta la rotazione totale secondo la data direzione ed una direzione del piano tangente alla superficie); 3° *quando sono note le componenti della rotazione degli elementi del contorno rispetto alla normale alla superficie.*

Gli elementi caratteristici della deformazione infinitesima di una superficie flessibile e inestendibile potranno ritenersi essere le componenti degli spostamenti dei punti del contorno parallelamente ad una data direzione, o le componenti delle rotazioni dei punti del contorno rispetto ad una data direzione o alla normale alla superficie; peraltro con una limitazione che risulta immediatamente dai teoremi sopra citati.

Veniamo all'equilibrio delle superficie flessibili e inestendibili. – Denotiamo con $X dx\,dy$, $Y dx\,dy$, $Z dx\,dy$ le componenti secondo gli assi della forza applicata all'elemento della superficie la cui proiezione sul piano xy è $dx\,dy$ e con $X_c\,dc$, $Y_c\,dc$, $Z_c\,dc$ le componenti della forza applicata sull'elemento del contorno la cui proiezione è dc. Applicando il principio delle velocità virtuali e adottando le notazioni di Jellett si ha

$$\int_\sigma [X(u-pw)+Y(v-qw)+Zw]\,dx\,dy$$

$$+\int_c [X_c(u_c-pw_c)+Y_c(v_c-qw_c)+Z_c w_c]\,dc=\Omega=0$$

per ogni sistema di valori di u, v, w corrispondenti ad uno spostamento virtuale della superficie. Poniamo

$$\Delta^2 A = X \quad , \quad \Delta^2 B = Y \quad , \quad P=\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial B}{\partial x} \quad , \quad Q=-\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y},$$

$$\mathfrak{L}_\gamma=\int_0^\gamma\left(X_c-\frac{\partial A}{\partial n}-\frac{\partial B}{\partial c}\right)dc \quad , \quad \mathfrak{M}_\gamma=\int_0^\gamma\left(Y_c+\frac{\partial A}{\partial c}-\frac{\partial B}{\partial n}\right)dc,$$

$$L=\int_c\left(X_c-\frac{\partial A}{\partial n}-\frac{\partial B}{\partial c}\right)dc\ ,\ M=\int_c\left(Y_c+\frac{\partial A}{\partial c}-\frac{\partial B}{\partial n}\right)dc\ ,\ N=\int_c\left(\mathfrak{L}_\gamma\frac{dy}{dc}-\mathfrak{M}_\gamma\frac{dx}{dc}\right)dc,$$

(*) Presentata dal Socio E. Betti.

www.rcin.org.pl

in cui con $\int_0^\gamma$ si intende l'integrale esteso da un punto fisso della proiezione del contorno lungo l'arco γ di questa proiezione; e per $\int_c$ si intende l'integrale esteso a tutta la proiezione c del contorno. Si otterrà:

$$\Omega = -\iint_\sigma w\,[2\,\mathrm{P}s - \mathrm{Q}(r-t) + \mathrm{X}p + \mathrm{Y}q - \mathrm{Z}]\,dx\,dy$$

$$-\int_c \left(\frac{\partial p}{\partial c}\mathfrak{L}_\gamma + \frac{\partial q}{\partial c}\mathfrak{M}_\gamma + \mathrm{X}_c\,p + \mathrm{Y}_c\,q - \mathrm{Z}_c\right) w_c\,dc - \int_c \left(\mathfrak{L}_\gamma \frac{\partial y}{\partial c} - \mathfrak{M}_\gamma \frac{\partial x}{\partial c}\right)\tilde{\omega}_c\,dc$$

$$+ \mathrm{L}a_1 + \mathrm{M}a_2 + \mathrm{N}a_3$$

in cui $a_1\, a_2\, a_3$ indicano tre costanti. Ora, osservando che gli spostamenti w non sono arbitrarî, ma debbono soddisfare la condizione $\underset{z}{\Delta^2} w = 0$, e, se la superficie è a curvatura positiva, la w è determinata quando si conoscono al contorno i valori della funzione coniugata $\tilde{\omega}$, avremo che l'equazione delle velocità virtuali diverrà

$$\Omega + \iint_\sigma \lambda \underset{z}{\Delta^2} w\,dx\,dy = 0$$

nella quale potremo ritenere w e $\tilde{\omega}$ come arbitrarie e λ come una funzione incognita di x e y. Questa equazione può scriversi:

$$\Omega + \iint_\sigma w \underset{z}{\Delta^2} \lambda\,dx\,dy + \int_c w\left[\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial c} - \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial c}\right]dc + \int_c \tilde{\omega}\frac{\partial\lambda}{\partial c} = 0,$$

onde avremo che le condizioni dell'equilibrio saranno date, dalla equazione

$$2\,\mathrm{P}s - \mathrm{Q}(r-t) + \mathrm{X}p + \mathrm{Y}q - \mathrm{Z} = \underset{z}{\Delta^2}\lambda$$

per i punti interni della superficie; dalle equazioni

$$\frac{\partial p}{\partial c}\mathfrak{L}_\gamma + \frac{\partial q}{\partial c}\mathfrak{M}_\gamma + p\mathrm{X}_c + \mathrm{Y}_c\,q - \mathrm{Z}_c = \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial c} - \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial c}\,,\quad \mathfrak{L}_\gamma\frac{\partial y}{\partial c} - \mathfrak{M}_\gamma\frac{\partial x}{\partial c} = \frac{\partial\lambda}{\partial c}$$

per i punti del contorno e dalle equazioni $\mathrm{L} = \mathrm{M} = \mathrm{N} = 0$. Queste equazioni non sono altro che tre delle condizioni affinché le forze si facciano equilibrio supposta la superficie rigida. Avremo dunque il teorema:

Una superficie a curvatura positiva può stare in equilibrio sotto l'azione di forze arbitrarie applicate nei punti interni. Per mantenerla in equilibrio bisogna però applicare delle forze al contorno. Delle tre componenti di queste forze due possono scegliersi arbitrariamente purché verifichino alle condizioni a cui dovrebbero soddisfare nell'ipotesi della superficie rigida (e colle limitazioni che è stato necessario introdurre per il rigore del principio sopra enunciato analogo a quello di RIEMANN–DIRICHLET); *l'altra componente risulta determinata in un modo unico.*

www.rcin.org.pl

Per riconoscere se date forze applicate negli elementi di una superficie si fanno equilibrio, quando questa ha una data forma, basterà determinare se è possibile costruire una funzione che soddisfi alle tre condizioni trovate e questa ricerca, come è stato indicato, si riduce alla determinazione di un integrale particolare della equazione $\Delta^2_z w = 0$. Abbiamo indicato precedentemente vari casi in cui è possibile integrare questa equazione differenziale, quindi in questi casi saranno da cercare le condizioni di equilibrio che si deducono applicando il metodo che abbiamo ora sommariamente accennato.

Gli integrali generali della equazione differenziale $\Delta^2_z w = 0$ ci forniranno le espressioni di tutti i sistemi di forze possibili, che applicate ai punti del contorno della superficie flessibile e inestendibile la mantengono in equilibrio.