XI.

SOPRA UN PROBLEMA DI ELETTROSTATICA

« Nuovo Cimento », ser. 3ª, vol. XVI, 1884; pp. 49–57 (*).

Ad una classe di problemi che si hanno frequentemente da risolvere appartiene il seguente: trovare una funzione $f(\alpha)$ atta alla integrazione, tale che sia:

$$\varphi(x) = \int_0^a f(\alpha)\, \mathrm{F}(\alpha, x)\, d\alpha \qquad 0 \leqq x \leqq a$$

in cui $\varphi(x)$ e $\mathrm{F}(\alpha, x)$ sono funzioni note (quest'ultima è una funzione di α atta alla integrazione).

Supponiamo la $\mathrm{F}(\alpha, x)$ simmetrica rispetto ad α e ad x e $\varphi(x)$ atta alla integrazione; allora il problema precedente si riduce all'altro: determinare la $f(x)$ in modo che la variazione prima di

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^a f(\alpha) f(x)\, \mathrm{F}(\alpha, x)\, d\alpha\, dx - \int_0^a \varphi(x) f(x)\, dx$$

sia nulla, e tale questione in molti casi rientrerà in quella della determinazione dei massimi e minimi di P. Infatti, applicando il calcolo delle variazioni, abbiamo:

$$\delta\mathrm{P} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^a \delta f(\alpha) \cdot f(x)\, \mathrm{F}(\alpha, x)\, d\alpha\, dx + \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^a \delta f(x) \cdot f(\alpha)\, \mathrm{F}(\alpha, x)\, d\alpha\, dx$$

$$- \int_0^a \varphi(x)\, \delta f(x)\, dx = \int_0^a \delta f(x) \left[\int_0^a f(\alpha)\, \mathrm{F}(\alpha, x)\, d\alpha - \varphi(x) \right] dx ,$$

e affinché sia $\delta\mathrm{P} = 0$, dovremo avere:

$$\int_0^a f(\alpha)\, \mathrm{F}(\alpha, x)\, d\alpha - \varphi(x) = 0 .$$

(*) Questo stesso lavoro, ad esclusione della Nota finale, era già stato pubblicato nei « Transunti dell'Acc. dei Lincei », ser. 3, vol. VIII, 1884, pp. 315–318.

Supponiamo di conoscere la funzione $\lambda(z, \alpha)$ atta alla integrazione, tale che si abbia:

$$\psi(x, z) = \int_0^z \lambda(z, \alpha)\, F(\alpha, x)\, d\alpha \qquad 0 \leqq x \leqq z \leqq a$$

e supponiamo che la funzione richiesta $f(\alpha)$ possa porsi sotto la forma:

$$(1) \qquad f(\alpha) = \int_\alpha^a \vartheta(z)\, \lambda(z, \alpha)\, dz + k\lambda(a, \alpha) = f_1(\alpha) + k\lambda(a, \alpha),$$

in cui $\vartheta(z)$ è una funzione da determinarsi e k una costante.

Poniamo:

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + k\psi(x, a),$$

si otterrà:

$$\varphi_1(x) = \int_0^a f_1(\alpha)\, F(\alpha, x)\, d\alpha.$$

Basterà quindi determinare $f_1(\alpha)$ in modo che si annulli la variazione prima di

$$P_1 = \frac{1}{2}\int_0^a\!\!\int_0^a f_1(\alpha) f_1(x)\, F(\alpha, x)\, d\alpha\, dx - \int_0^a \varphi_1(x) f_1(x)\, dx.$$

Ora si ha mediante il principio di DIRICHLET (supponendo verificate le condizioni affinché sia applicabile questo principio)

$$Q_1 = \frac{1}{2}\int_0^a\!\!\int_0^a f_1(\alpha) f_1(x)\, F(\alpha, x)\, d\alpha\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a \vartheta(z)\, dz \int_0^a \vartheta(z')\, dz' \int_0^z d\alpha \int_0^{z'} \lambda(z, \alpha)\, \lambda(z', x)\, F(\alpha, x)\, dx,$$

onde posto:

$$\int_0^z d\alpha \int_0^{z'} \lambda(z, \alpha)\, \lambda(z', x)\, F(\alpha, x)\, dx = \tilde{\omega}(z, z'),$$

avremo:

$$Q_1 = \int_0^a \vartheta(z)\, dz \int_0^z \vartheta(z')\, \tilde{\omega}(z, z')\, dz'.$$

Abbiamo inoltre:

$$R_1 = \int_0^a f_1(x)\, \varphi_1(x)\, dx$$

$$= \int_0^a \vartheta(z)\, dz \int_0^z \varphi(x)\, \lambda(z, x)\, dx - k\int_0^a \vartheta(z)\, dz \int_0^z \psi(x, a)\, \lambda(z, x)\, dx,$$

onde:

$$P_1 = Q_1 - R_1 = \int_0^a \vartheta(z)\, dz \int_0^z \vartheta(z')\, \tilde{\omega}(z, z')\, dz' - \int_0^a \vartheta(z)\, dz \int_0^z \varphi(x)\, \lambda(z, x)\, dx$$

$$+ k \int_0^a \vartheta(z)\, dz \int_0^z \psi(x, a)\, \lambda(z, x)\, dx.$$

Supponiamo $\psi(x, z)$ indipendente da z e sia $\psi(x, z) = \nu(x)$, funzione finita ed atta alla integrazione; ammesso che sia $z' < z$, avremo:

$$\tilde{\omega}(z, z') = \int_0^z \lambda(z', x)\, \psi(x, z)\, dx = \int_0^{z'} \lambda(z', x)\, \nu(x)\, dx = \theta(z').$$

Poniamo:

$$\int_0^z \varphi(x)\, \lambda(z, x)\, dx = \mu(z) \quad , \quad \int_0^z \vartheta(z')\, \theta(z')\, dz' = \rho(z),$$

si otterrà:

$$P_1 = \int_0^a \vartheta(z)\, dz \int_0^z \vartheta(z')\, \theta(z')\, dz' - \int_0^a \vartheta(z)\, \mu(z)\, dz + k \int_0^a \vartheta(z)\, \theta(z)\, dz$$

$$= \int_0^a \left[\frac{\rho'(z)\, \rho(z)}{\theta(z)} - \frac{\rho'(z)\, \mu(z)}{\theta(z)} + k\rho'(z)\right] dz,$$

e per conseguenza eseguendo la variazione:

$$\delta P_1 = \int_0^a \left[\frac{\rho'(z)}{\theta(z)}\, \delta\rho(z) + \frac{\rho(z)}{\theta(z)}\, \delta\rho'(z) - \frac{\mu(z)}{\theta(z)}\, \delta\rho'(z) + k\delta\rho'(z)\right] dz.$$

Mediante integrazioni per parti si trova:

$$\delta P_1 = \left[\left(\frac{\rho(z)}{\theta(z)} - \frac{\mu(z)}{\theta(z)} + k\right) \delta\rho(z)\right]_0^a + \int_0^a \delta\rho(z) \left[\frac{\rho'(z)}{\theta(z)} - \frac{d}{dz}\, \frac{\rho(z)}{\theta(z)} + \frac{d}{dz}\, \frac{\mu(z)}{\theta(z)}\right] dz.$$

Dobbiamo porre $\delta P_1 = 0$; ora siccome per $z = 0$, ρ è sempre zero e quindi anche $\delta\rho = 0$, avremo:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\rho(z)}{\theta(z)}\right)_a - \left(\dfrac{\mu(z)}{\theta(z)}\right)_a + k = 0 \\[2ex] \dfrac{\rho'(z)}{\theta(z)} - \dfrac{d}{dz}\, \dfrac{\rho(z)}{\theta(z)} + \dfrac{d}{dz}\, \dfrac{\mu(z)}{\theta(z)} = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda di queste eguaglianze si deduce:

$$\rho(z) = -\frac{\mu'(z)\,\theta(z)}{\theta'(z)} + \mu(z),$$

per conseguenza:

$$\begin{cases} k = \left(\dfrac{\mu'(z)}{\theta'(z)}\right)_a \\ \vartheta(z) = -\dfrac{d}{dz}\dfrac{\mu'(z)}{\theta'(z)} \end{cases}$$

e quindi a cagione della (1):

$$f(\alpha) = -\int_\alpha^a \frac{d}{dz}\frac{\mu'(z)}{\theta'(z)} \cdot \lambda(z, \alpha)\,dz + \left(\frac{\mu'(z)}{\theta'(z)}\right)_a \lambda(a, \alpha). \tag{2}$$

Questa formula potrà semplicizzarsi, mediante una integrazione per parti, quando $\frac{d}{dz}\lambda(z, \alpha)$ sarà atta alla integrazione.

Avremo dunque:

Il problema di determinare una funzione $f(z, \alpha)$ che soddisfi la condizione:

$$\varphi(x) = \int_0^z f(z, \alpha)\,F(x, \alpha)\,d\alpha \qquad 0 \leqq x \leqq z \leqq a$$

in cui $F(x, \alpha)$ è una funzione simmetrica di x e α potrà risolversi, qualunque sia $\varphi(x)$, quando si conosca una funzione $\lambda(z, \alpha)$ che soddisfi alla equazione precedente allorché si prende per la $\varphi(x)$ una funzione speciale $\nu(x)$, purché si possa porre:

$$f(z, \alpha) = \int_\alpha^{-z} \vartheta(z')\,\lambda(z', \alpha)\,dz' + k\lambda(z, \alpha).$$

La formula (2) ci risolve la questione.

Il problema dell'equilibrio della elettricità sopra le calotte di una superficie conduttrice di rivoluzione, soggette all'induzione di coibenti elettrizzati, disposti simmetricamente rispetto all'asse di rivoluzione, rientra nel problema generale ora considerato.

Supponiamo che le calotte abbiano una capacità finita e siano tali che un sistema qualunque di masse elettriche indotte, distribuite simmetricamente sulle calotte, possa considerarsi come la sovrapposizione di tanti strati di livello; in tal caso, *se sarà nota la distribuzione della elettricità in equilibrio sopra tutte le calotte non soggette ad alcuna induzione esterna, si potrà determinare la distribuzione dell'elettricità sopra le stesse calotte sotto l'azione di un sistema qualunque di coibenti elettrizzati, situati simmetricamente rispetto all'asse di rivoluzione.*

Risulta come conseguenza, che si potrà anche determinare la legge della distribuzione dell'elettricità sotto l'azione di masse induttrici simmetriche sulle calotte, che si ottengono mediante trasformazioni per raggi vettori reciproci, prendendo per centro di inversione un punto qualunque dell'asse di simmetria.

L'applicazione delle formule precedenti al caso del disco conduce immediatamente ai noti resultati riguardo alla induzione della elettricità sopra un disco o una calotta sferica.

Per mezzo di metodi analoghi a quelli ora adoperati, in vari altri casi si giunge alla risoluzione di questioni simili a quelle ora considerate.

NOTA

Dopo la presentazione della comunicazione precedente alla R. Accademia dei Lincei venni a sapere dal ch. prof. DINI che egli aveva trattato nel secondo volume (in corso di stampa) della sua opera: *Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale*, con un fine diverso dal mio e con un metodo pure alquanto diverso, un problema analogo a quello che io avevo considerato.

Per la gentilezza del prof. DINI potei prender cognizione del problema da lui risoluto e del metodo adoperato: avendone avuta l'autorizzazione, credo opportuno di far notare le relazioni che passano fra i due problemi.

Il prof. DINI considera la questione: determinare una funzione $f(x, \xi)$ in modo che sia

$$\int_c^\xi f(x, \xi)\, \lambda(x, \xi)\, dx = \rho(\xi) - \rho(c).$$

A tal fine basterà prendere

$$f(x, \xi) = \frac{\psi(x, \xi)}{\lambda(x, \xi)} \int_c^x \rho'(y)\, \theta(y, x)\, dy$$

ove $\psi(x, \xi)$ e $\theta(y, x)$ sono due funzioni che soddisfano la condizione

$$\int_y^\xi \psi(x, \xi)\, \theta(y, x)\, dx = 1$$

nella ipotesi che le funzioni considerate siano atte alla integrazione e si possa applicare il principio d'inversione di DIRICHLET.

Supponiamo ora che si debba determinare la funzione $f(\alpha)$ in modo che si abbia:

$$\varphi(x) = \int_0^a f(\alpha)\, F(x, \alpha)\, d\alpha \qquad 0 \leqq x \leqq a. \tag{1}$$

Ammettiamo nota una funzione $\lambda(z, \alpha)$, tale che sia

(2) $$\nu(x) = \int_0^z \lambda(z, \alpha) F(x, \alpha)\, d\alpha$$

e supponiamo $F(x, \alpha)$ simmetrica rispetto ad α e ad x. In tal caso non si potrà applicare direttamente il metodo ora accennato per la determinazione della funzione cercata. Onde applicare il metodo del prof. DINI al problema che si considera, nelle ipotesi sopra enunciate, è necessario prima trasformare convenientemente la (1) mediante la (2).

Supponiamo che sia possibile porre:

$$f(\alpha) = \int_\alpha^a \lambda(z', \alpha)\, \vartheta(z')\, dz' + k\lambda(a, \alpha)$$

in cui k è una costante: avremo

$$\varphi(x) = \int_0^a F(\alpha, x)\, d\alpha \int_\alpha^a \lambda(z', \alpha)\, \vartheta(z')\, dz' + k \int_0^a \lambda(a, \alpha) F(\alpha, x)\, d\alpha$$

e mediante il principio di inversione di DIRICHLET (supponendolo applicabile) si otterrà:

$$\varphi(x) = \int_0^a \vartheta(z')\, dz' \int_0^{z'} F(\alpha, x)\, \lambda(z', \alpha)\, d\alpha + k\nu(x).$$

Poniamo:

$$\int_0^{z'} \lambda(z', \alpha) F(\alpha, x)\, d\alpha = \chi(z', x),$$

avremo se $z' > x$

(3) $$\chi(z', x) = \nu(x),$$

quindi

$$\varphi(x) = \int_0^x \vartheta(z')\, \chi(z', x)\, dz' + \int_x^a \vartheta(z')\, \nu(x)\, dz' + k\nu(x)$$

e se

$$\int_x^a \vartheta(z')\, dz' = C(x),$$

sarà

$$\vartheta(z') = -C'(z')$$

onde

$$\varphi(x) = -\int_0^x C'(z')\, \chi(z', x)\, dz' + \nu(x)\, C(x) + k\nu(x).$$

Mediante una integrazione per parti abbiamo

$$\varphi(x)=\int_0^x C(z')\frac{d}{dz'}\chi(z',x)\,dz'+k\nu(x)$$

ovvero

$$\varphi(x)-k\nu(x)=\int_0^x C(z')\frac{d}{dz'}\chi(z',x)\,dz'. \tag{4}$$

A questo punto è possibile applicare il metodo del prof. DINI: l'arbitrarietà della costante k ci servirà per determinare la $C(x)$ in modo che per $x=a$ si annulli la $C(x)$.

Osserviamo infatti che si ha:

$$M=\int_{z'}^{z}\lambda(z,x)\frac{d}{dz'}\chi(z',x)\,dx=\int_0^z\lambda(z,x)\frac{d}{dz'}\chi(z',x)\,dx-\int_0^{z'}\lambda(z,x)\frac{d}{dz'}\chi(z',x)\,dx.$$

Ora nel secondo termine del 2° membro si ha $x<z'$, quindi a cagione della (3)

$$\chi(z',x)=\nu(x)$$

e

$$\frac{d\chi(z',x)}{dz'}=0;$$

perciò

$$M=\int_0^z\lambda(z,x)\frac{d}{dz'}\chi(z',x)\,dx=\frac{d}{dz'}\int_0^z\lambda(z,x)\,dx\int_0^{z'}\lambda(z',\alpha)\,F(\alpha,x)\,d\alpha$$

$$=\frac{d}{dz'}\int_0^{z'}\lambda(z',\alpha)\,d\alpha\int_0^z\lambda(z,x)\,F(\alpha,x)\,dx.$$

Poniamo

$$\int_0^{z'}\lambda(z,\alpha)\,\nu(\alpha)\,dz=\theta(z');$$

supponendo $z>z'$, a cagione della simmetria di $F(\alpha,x)$, avremo,

$$M=\frac{d}{dz'}\int_0^{z'}\lambda(z',\alpha)\,\nu(\alpha)\,d\alpha=\frac{d\theta(z')}{dz'}.$$

Moltiplicando ambo i membri della (4) per $\lambda(z,x)\,dx$ e integrando fra 0 e z si ottiene

$$\int_0^z\varphi(x)\lambda(z,x)\,dx-k\int_0^z\nu(x)\lambda(z,x)\,dx=\int_0^z\lambda(z,x)\,dx\int_0^x C(z')\frac{d}{dz'}\chi(z',x)\,dz'$$

e mediante il principio di DIRICHLET

$$\int_0^z \varphi(x)\,\lambda(z,x)\,dx - k\theta(z) = \int_0^z C(z')\,dz' \int_{z'}^z \lambda(z',x)\,\frac{d}{dz}\,\chi(z',x)\,dx = \int_0^z C(z')\,\frac{d\theta(z')}{dz'}\,dz'.$$

Ponendo

$$\int_0^z \varphi(x)\,\lambda(z,x)\,dx = \mu(z)$$

abbiamo dalla equazione precedente, derivandola,

$$\frac{d\mu(z)}{dz} - k\,\frac{d\theta(z)}{dz} = C(z)\,\frac{d\theta(z)}{dz},$$

onde

$$C(z) = \frac{\dfrac{d\mu(z)}{dz}}{\dfrac{d\theta(z)}{dz}} - k.$$

Si ha dunque

$$\begin{cases} k = \left(\dfrac{\mu'(z)}{\theta'(z)}\right)_a \\[2ex] \vartheta(z) = -\dfrac{d}{dz}\,\dfrac{\mu'(z)}{\theta'(z)}. \end{cases}$$

Si giunge quindi allo stesso risultato a cui siamo pervenuti direttamente per altra via.