

Aerodynamique stationnaire linéarisée. I. (Subsonique)

D. HOMETCOVSCHI (BUCAREST)

CE TRAVAIL considère l'écoulement stationnaire, linéarisé, d'un fluide compressible non visqueux en présence d'un corps mince. On écrit d'abord les équations de la mécanique des fluides en distributions. Ces équations sont valables autant à l'intérieur du fluide que sur les surfaces de discontinuité de l'écoulement, ce qui permet de construire une représentation pour le champ des vitesses analogue à celle qu'on obtient dans le modèle de la surface portante. La résolution du problème est réduite ensuite à la résolution d'une équation intégrale singulière à deux dimensions. Pour le cas des ailes de grande envergure par rapport à la profondeur on obtient une équation intégrale singulière à une dimension. Cette équation coïncide avec l'équation intégrodifférentielle de Prandtl pour les ailes sans bords latéraux. On fait ensuite l'analyse du cas du corps d'envergure négligeable par rapport à la profondeur.

W pracy rozpatruje się ustalony, zlinearyzowany przepływ płynu ściśliwego i nielepkiego w obecności ciała smukłego. Równania mechaniki płynów formułuje się na gruncie teorii dystrybucji. Te równania są ważne zarówno wewnątrz płynu jak i na powierzchniach nieciągłości przepływu, co pozwala na konstrukcję obrazu pola prędkości analogicznego do tego, który otrzymuje się dla modelu powierzchni nośnej. Rozwiązanie problemu sprowadza się w dalszym ciągu do rozwiązania pewnego równania całkowego osobliwego w dwóch wymiarach. W przypadku skrzydeł o dużej rozpiętości w stosunku do cięciwy otrzymuje się jedno równanie całkowite osobliwe, jednowymiarowe. To równanie pokrywa się z równaniem całkowo-różniczkowym Prandtla dla skrzydeł bez bocznych krawędzi. W dalszym ciągu przeprowadzono analizę przypadku ciała o rozpiętości pomijalnej w stosunku do cięciwy.

В настоящей работе рассматривается установившееся, линеаризованное течение сжимаемой и невязкой жидкости в присутствии тонкого тела. Прежде всего записываются уравнения механики жидкостей, используя дистрибуции. Эти уравнения справедливы так внутри жидкости, как и на поверхностях разрыва течения, что позволяет на построение картины поля скоростей аналогичного такому полю, которое получается для модели несущей поверхности. Решение задачи сводится в дальнейшем к решению некоторого сингулярного интегрального двумерного уравнения. В случае крыльев с большим размахом по отношению к хорде получается одно сингулярное, интегральное, одномерное уравнение. Это уравнение совпадает с интегро-дифференциальным уравнением Прандтля для крыльев без боковых краев. В дальнейшем проведен анализ случая тела с размахом пренебрежимо малым по отношению к хорде.

1. Introduction

L'ÉTUDE mathématique du mouvement de l'aile d'avion en présence d'un fluide incompressible, constitue un problème que les chercheurs scientifiques ont abordé dès le début du siècle, parallèlement aux progrès enregistrés dans le développement de l'aviation.

Un premier modèle du mouvement de l'aile d'envergure finie, en présence d'un fluide incompressible, est dû à PRANDTL [1]. Son modèle, qui porte le nom de "modèle de ligne portante", est basé sur les hypothèses simplificatrices suivantes:

1. On suppose que l'aile est le "siège" de certains tourbillons "liés", dont la direction est celle de l'envergure.

2. L'aile est assimilée à un segment rectiligne situé au bord de fuite.
3. En aval de l'aile on admet l'existence d'une nappe de tourbillons "libres", plane et parallèle à V_∞ .
4. Les tourbillons libres sont supposés parallèles à V_∞ .
5. En dehors de ces hypothèses l'étude du mouvement de l'aile, en présence d'un fluide compressible, nécessite encore l'hypothèse des petites perturbations.

Dans le cas du modèle de la ligne portante la condition aux limites est globalement satisfaite, ce qui conduit à l'équation intégral-différentielle de Prandtl où les seuls paramètres de l'aile qui y interviennent sont $a(y)$ et $j(y)$.

Les résultats obtenus à l'aide de la théorie de Prandtl correspondent aux résultats pratiques seulement dans le cas des ailes de grande envergure par rapport à la profondeur, ce qui impose nécessairement l'amélioration du modèle de la ligne portante. Les investigations ont été orientées surtout sur la modification des deux premières hypothèses. Ainsi, E. REISSNER [2], E. TRUCKENBRODT [3], J. WEISSINGER [4] ont admis que:

- 1'. Les tourbillons liés sont inclus dans un plan.
- 2'. L'aile est assimilée à sa forme dans le plan.

Ces hypothèses ont mené au modèle de la "surface portante" qui a été rigoureusement formulé par P. COCARLAN dans [5]. Dans ce modèle on utilise les conditions aux limites linéarisées imposées sur la forme dans le plan de l'aile. Finalement, on arrive à une équation intégrale singulière à deux dimensions. Le problème qui se pose maintenant est celui d'établir quelles sont les conditions sous lesquelles l'équation intégrale à deux dimensions peut être réduite à une équation de Prandtl. Nombre de recherches ont été effectuées à ce dessein, mais, tel que l'on peut voir dans [6], aucune de ces démonstrations n'est en mesure de rendre satisfaction.

Dans ce travail nous allons tâcher d'aborder ce problème d'un point de vue différent. Puisque nous avons l'intention d'aborder l'étude des fluides compressibles, nous allons adopter dès le début l'hypothèse des petites perturbations.

Nous allons donc considérer une théorie sur les hypothèses suivantes:

1. Les équations que nous allons utiliser seront les équations linéarisées de l'aérodynamique.
2. La condition aux limites sera utilisée sous forme linéarisée.
3. L'aile sera substituée à un domaine plan (sa forme dans le plan).

Nous écrivons d'abord les équations de l'aérodynamique en distributions, utilisant la technique développée par L. SIROVICH [7]. Ensuite, l'appareil mathématique de la théorie des distributions nous permettra de construire l'entière théorie de la surface portante, sans utiliser les hypothèses qui se réfèrent aux tourbillons libres et liés (les hypothèses 1', 3 et 4). La solution du problème se ramène à la solution d'une équation intégral-différentielle à deux dimensions, équivalente à l'équation intégrale de [5].

Si la profondeur de l'aile est négligeable par rapport à l'envergure, la résolution du problème nécessite la résolution d'une équation intégrale singulière à une dimension. Pour les ailes sans bords latéraux cette équation est équivalente à l'équation intégral-différentielle de Prandtl.

Le cas limite de l'aile d'envergure négligeable par rapport à la profondeur sera également analysé.

2. Les équations de la mécanique des fluides en distributions

Considérons dans un fluide non visqueux et compressible, une surface fermée d'équation $S(x, y, z, t) = 0$ qui borde le domaine D_i . Cette surface peut être soit une surface de discontinuité de l'écoulement du fluide, soit la surface d'un corps qui se déplace en présence d'un fluide. Dans ce dernier cas nous admettrons que l'intérieur du corps est occupé par le même fluide que celui de l'extérieur qui se trouve en repos par rapport au corps.

L'écoulement du fluide sera rapporté à un trièdre cartésien fixe. L'écoulement sera décrit dans les deux domaines D_i et $D_e = CD_i$ par les équations suivantes:

$$(2.1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho V_j) = 0 \quad (\text{éq. de continuité}),$$

$$(2.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho V_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho V_i V_j + p \delta_{ij}) = 0 \quad (\text{éq. de Euler}),$$

$$(2.3) \quad \rho = \rho(p) \quad (\text{la loi de compressibilité}).$$

En cas que $S(x, y, z, t) = 0$ représente une surface de discontinuité de l'écoulement du fluide, sur cette surface nous aurons les relations de saut [8] suivantes:

$$(2.4) \quad \rho^{(i)} (\mathbf{V}^{(i)} - \mathbf{d}) \cdot \mathbf{n} - \rho^{(e)} (\mathbf{V}^{(e)} - \mathbf{d}) \cdot \mathbf{n} = 0,$$

$$(2.5) \quad \rho^{(i)} \mathbf{V}^{(i)} \{ (\mathbf{V}^{(i)} - \mathbf{d}) \cdot \mathbf{n} \} - \rho^{(e)} \mathbf{V}^{(e)} \{ (\mathbf{V}^{(e)} - \mathbf{d}) \cdot \mathbf{n} \} + (p^{(i)} - p^{(e)}) \mathbf{n} = 0,$$

où \mathbf{n} est le vecteur de la normale extérieure à S , \mathbf{d} la vitesse de déplacement de la surface, $\rho^{(i)}$ la densité du fluide de l'intérieur de la surface, $\rho^{(e)}$ la densité du fluide à l'extérieur etc.

Si $S(x, y, z, t) = 0$ est la frontière d'un corps, alors sur cette surface nous aurons la condition aux limites:

$$(2.6) \quad \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{n}$$

qui décrit le glissement du fluide sur la surface du corps.

Soit:

$$\theta(x, y, z, t) = \begin{cases} 1 & (x, y, z) \in D_i, \\ 0 & (x, y, z) \in D_e. \end{cases}$$

Dans le sens des distributions nous avons [7]:

$$(2.7) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{n} \delta(s) \quad \text{grad} \theta = -\mathbf{n} \delta(s),$$

où $\delta(s)$ est la distribution

$$(2.8) \quad (\delta(s), \varphi(x, y, z)) = \int_S \varphi(x, y, z) d\sigma.$$

Nous allons considérer maintenant les fonctions (Sirovich):

$$\begin{aligned} \rho &= \rho^{(i)} \theta + \rho^{(e)} (1 - \theta), \\ \rho \mathbf{V} &= \rho^{(i)} \mathbf{V}^{(i)} \theta + \rho^{(e)} \mathbf{V}^{(e)} (1 - \theta), \end{aligned}$$

$$p = p^{(i)}\theta + p^{(e)}(1-\theta),$$

$$\rho V_i V_j = \rho^{(i)} V_i^{(i)} V_j^{(i)}\theta + \rho^{(e)} V_i^{(e)} V_j^{(e)}(1-\theta).$$

Chacune de ces fonctions donne naissance à une distribution. Après une série de calculs, utilisant les relations (2.7) nous obtenons:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho V_j) = & \left[\frac{\partial \rho^{(i)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho^{(i)} V_j^{(i)}) \right] \theta + \left[\frac{\partial \rho^{(e)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho^{(e)} V_j^{(e)}) \right] (1-\theta) \\ & + [\rho^{(e)}(\mathbf{V}^{(e)} - \mathbf{d}) \cdot \mathbf{n} - \rho^{(i)}(\mathbf{V}^{(i)} - \mathbf{d}) \cdot \mathbf{n}] \delta(s) = 0. \end{aligned}$$

Chacun des crochets du membre droit est annulé grâce à l'équation (2.1) et aux conditions (2.4) ou bien (2.6) de sorte que nous obtenons l'équation:

$$(2.9) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho V_j = 0$$

qui est valable maintenant sur tout l'espace.

De façon analogue nous avons:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho V_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho V_i V_j + p \delta_{ij}) = & \left[\frac{\partial \rho^{(i)} V_i^{(i)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho^{(i)} V_i^{(i)} V_j^{(i)} + p^{(i)} \delta_{ij}) \right] \theta \\ & + \left[\frac{\partial \rho^{(e)} V_i^{(e)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho^{(e)} V_i^{(e)} V_j^{(e)} + p^{(e)} \delta_{ij}) \right] (1-\theta) + \{ \rho^{(e)} V_i^{(e)} [(\mathbf{V}^{(e)} - \mathbf{d}) \cdot \mathbf{n}] \\ & - \rho^{(i)} V_i^{(i)} [(\mathbf{V}^{(i)} - \mathbf{d}) \cdot \mathbf{n}] + (p^{(e)} - p^{(i)}) n_i \} \delta(s). \end{aligned}$$

De nouveau les crochets du membre droit sont nuls. L'accolade s'annule dans le cas où $S(x, y, z, t) = 0$ est une surface de discontinuité dans le fluide. Si cependant elle est la frontière d'un corps, ce qui en reste est le dernier terme et dans ce cas les équations de Euler deviennent:

$$(2.10) \quad \frac{\partial \rho V_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho V_i V_j + p \delta_{ij}) = p^{(e)} n_i \delta(s).$$

Le raisonnement peut être répété identiquement aussi dans le cas où nous avons plusieurs surfaces de discontinuité et plusieurs corps dans le fluide, vu que dans le membre droit les équations de Euler n'interviennent que les termes correspondants aux frontières des corps imperméables. Ainsi:

$$(-p^{(e)} \mathbf{n} \delta(s), 1) = - \int_S p^{(e)} \mathbf{n} d\sigma = \mathbf{R}$$

représente la résultante de l'action du fluide sur le corps rigide.

Il faut remarquer que les équations (2.9) et (2.10) sont valables sur tout l'espace, même si à l'intérieur du fluide il y a des surfaces de discontinuité de l'écoulement.

Considérons maintenant l'étude de l'écoulement du fluide compressible non visqueux en présence d'un corps mince qui diffère un peu d'une plaque plane. L'écoulement du fluide est uniforme aux grandes distances en amont, la vitesse \mathbf{V}_∞ est constante et on sup-

pose qu'elle se trouve dans le plan du corps. Nous allons rapporter l'écoulement du fluide à un trièdre cartésien orthogonal choisi tel que le plan $z = 0$ coïncide avec le plan du corps, que l'axe Ox ait la direction et sens du vecteur V_∞ et que l'origine soit située au milieu du corps (Fig. 1).

Soit:

$$z = \varepsilon f^\pm(x, y)$$

l'équation du bord supérieur et respectivement inférieur du corps. (Toutes les magnitudes calculées sur le bord supérieur du corps recevront l'indice + et celles calculées sur le bord

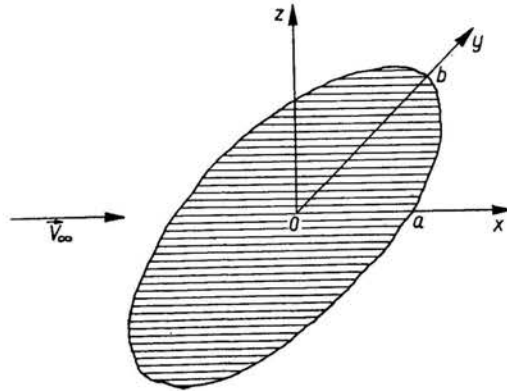


FIG. 1.

inférieur l'indice -). Nous allons également désigner par $\theta(x, y)$ la fonction caractéristique du domaine D , la forme en plan du corps.

Dans l'hypothèse $\varepsilon \ll 1$ le membre droit de (2.10) peut être mis sous la forme [7]:

$$p^{(e)} \mathbf{n} \delta(s) = [(p^+(x, y) - p^-(x, y))\theta(x, y) \delta(z) \mathbf{i}_3 - \varepsilon[(p^+ f_x^+ - p^- f_x^-) \delta(z) \mathbf{i}_1 + (p^+ f_y^+ - p^- f_y^-) \delta(z) \mathbf{i}_2 + (p^+ f_z^+ - p^- f_z^-) \delta'(z) \mathbf{i}_3] \theta(x, y) + 0(\varepsilon^2)].$$

Ou:

$$(2.11) \quad p^{(e)} \mathbf{n} \delta(s) = \varepsilon l(x, y) \theta(x, y) \delta(z) \mathbf{i}_1 + \varepsilon m(x, y) \theta(x, y) \delta(z) \mathbf{i}_2 + n(x, y) \theta(x, y) \delta(z) \mathbf{i}_3 + \varepsilon q(x, y) \theta(x, y) \delta'(z) \mathbf{i}_3 + 0(\varepsilon^2),$$

chacun des premiers trois termes du membre droit ayant la signification de la composante du vecteur $-\mathbf{R}$ sur les axes respectifs:

$$(-\varepsilon l(x, y) \theta(x, y) \delta(z), 1) = \varepsilon \iint_D (p^+ f_x^+ - p^- f_x^-) dx dy = R_x + 0(\varepsilon^2),$$

$$(-\varepsilon m(x, y) \theta(x, y) \delta(z), 1) = \varepsilon \iint_D (p^+ f_y^+ - p^- f_y^-) dx dy = R_y + 0(\varepsilon^2),$$

$$(-n(x, y) \theta(x, y) \delta(z), 1) = - \iint_D (p^+ - p^-) dx dy = R_z + 0(\varepsilon^2).$$

De plus, le dernier terme de (2.11) peut être interprété comme moment de la pression par rapport au plan $z = 0$. Des quatre termes de (2.11) les plus importants sont le premier

et le troisième qui correspondent respectivement à la traînée et à la portance. Nous allons donc utiliser l'expression:

$$(2.12) \quad p^{(e)} \mathbf{n} \delta(s) = \varepsilon l(x, y) \theta(x, y) \delta(z) \mathbf{i}_1 + n(x, y) \theta(x, y) \delta(z) \mathbf{i}_3.$$

Nous allons considérer les variables sans dimensions:

$$\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V}/|\mathbf{V}_\infty|, \quad \tilde{\rho} = \rho/\rho_\infty, \quad \tilde{p} = (p-p_\infty)/\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2.$$

Mettant en évidence les perturbations que nous allons désigner par $\mathbf{v}(u, v, w)$, ρ , p , nous écrivons les équations (2.9) et (2.10), utilisant (2.3) sous la forme:

$$(2.13) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \varepsilon l(x, y) \theta(x, y) \delta(z),$$

$$(2.14) \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$(2.15) \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z} = n(x, y) \theta(x, y) \delta(z),$$

$$(2.16) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \mathbf{M}^2 \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

où \mathbf{M} est le nombre de Mach (en fonction des valeurs de ce paramètre nous aurons à considérer le régime subsonique ($\mathbf{M} < 1$) et le régime supersonique ($\mathbf{M} > 1$). Nous allons consacrer ce travail seulement au premier cas.

De même, la condition aux limites cinématiques (2.6) sous la forme linéarisée, est:

$$(2.17) \quad w(x, y, \pm 0) = \varepsilon f_{\pm}^{\pm}(x, y), \quad (x, y) \in D.$$

3. L'étude du régime subsonique

3.1. Le cas général

Pour $\mathbf{M} < 1$ nous allons effectuer les changements de variable:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} x &= x', & \beta y &= y', & \beta z &= z', \\ \beta u &= u', & v &= v', & w &= w', & \beta p &= p', \end{aligned}$$

où $\beta = \sqrt{1 - \mathbf{M}^2}$.

Utilisant les notations x, y, z, u, v, w, p pour les nouvelles variables, le système d'équations (2.13)–(2.16) aura la forme:

$$(3.2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \varepsilon \beta^2 l(x, y) \theta(x, y) \delta(z),$$

$$(3.3) \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$(3.4) \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z} = n(x, y) \theta(x, y) \delta(z),$$

$$(3.5) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\varepsilon \mathbf{M}^2 l(x, y) \theta(x, y) \delta(z).$$

De même, nous avons noté $\beta n(x', y')$ par $n(x, y)$.

Nous allons considérer ensuite la transformée Fourier de ce système par rapport aux variables spatiales:

$$\begin{bmatrix} ik_1 & 0 & 0 & ik_1 \\ 0 & ik_1 & 0 & ik_2 \\ 0 & 0 & ik_1 & ik_3 \\ ik_1 & ik_2 & ik_3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{F} \{ \varepsilon \beta^2 l(x, y) \theta(x, y) \delta(z) \} \\ 0 \\ \mathcal{F} \{ n(x, y) \theta(x, y) \delta(z) \} \\ \mathcal{F} \{ -\varepsilon l(x, y) M^2 \theta(x, y) \delta(z) \} \end{bmatrix},$$

où

$$U(k_1, k_2, k_3) \equiv \mathcal{F} \{ u(x, y, z) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y, z) e^{-i(k_1 x + k_2 y + k_3 z)} dx dy dz,$$

les fonctions V , W et P étant définies de façon analogue.

La solution de ce système s'obtient aisément sous la forme:

$$(3.6) \quad \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k^2 - k_1^2}{ik_1 k^2} & \frac{ik_2}{k^2} & \frac{ik_3}{k^2} & -\frac{ik_1}{k^2} \\ \frac{ik_2}{k^2} & \frac{k^2 - k_2^2}{ik_1 k^2} & -\frac{k_1 k_2}{ik_1 k^2} & -\frac{ik_2}{k^2} \\ \frac{ik_3}{k^2} & -\frac{k_2 k_3}{ik_1 k^2} & \frac{k^2 - k_3^2}{ik_1 k^2} & -\frac{ik_3}{k^2} \\ -\frac{ik_1}{k^2} & -\frac{ik_2}{k^2} & -\frac{ik_3}{k^2} & \frac{ik_1}{k^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{F} \{ \varepsilon \beta^2 l(x, y) \theta(x, y) \delta(z) \} \\ 0 \\ \mathcal{F} \{ n(x, y) \theta(x, y) \delta(z) \} \\ \mathcal{F} \{ -\varepsilon M^2 l(x, y) \theta(x, y) \delta(z) \} \end{bmatrix}$$

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2.$$

Si les fonctions $l(x, y)$ et $n(x, y)$ sont données, alors du système (3.6) on peut déterminer le champ des vitesses et la pression, et de l'équation (2.4) on obtient la forme du corps. De cette manière le problème inverse est résolu. Pour résoudre le problème direct il faudra déterminer les fonctions $l(x, y)$ et $n(x, y)$ à l'aide des conditions aux limites. Du système (3.6) nous avons:

$$W = \frac{ik_3}{k^2} \mathcal{F} \{ \varepsilon l(x, y) \theta(x, y) \delta(z) \} + \frac{k^2 - k_3^2}{ik_1 k^2} \mathcal{F} \{ n(x, y) \theta(x, y) \delta(z) \}.$$

Mais:

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{ik_3}{k^2} \right\} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} = -\frac{1}{4\pi} \frac{z}{r^3},$$

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{k^2 - k_3^2}{ik_1 k^2} \right\} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{4\pi r} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-\infty}^x \frac{dx}{4\pi r} = \frac{x}{4\pi r^3} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{y}{y^2 + z^2} \left(1 + \frac{x}{r} \right) \right],$$

où $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Pour déterminer les transformées Fourier inverses, écrites ci-dessus, nous avons utilisé la condition d'annullement des solutions fondamentales pour $x \rightarrow -\infty$.

La fonction $w(x, y, z)$ sera donnée donc par les produits de convolution :

$$(3.7) \quad w(x, y, z) = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \iint_D l(\xi, \eta) \frac{z d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}} \\ + \frac{1}{4\pi} \iint_D n(\xi, \eta) \frac{(x-\xi) d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{1}{4\pi} \iint_D n(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \times \\ \times \left[\frac{y-\eta}{(y-\eta)^2 + z^2} \left(1 + \frac{x-\xi}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{1/2}} \right) \right] d\xi d\eta.$$

L'expression que nous avons trouvée pour $w(x, y, z)$ coïncide avec celle de [2] et [5] mais abstraction est faite du premier terme. D'ailleurs le coefficient ε indique que ce terme est d'un ordre de magnitude plus petit que les autres, et que sa présence est due, tel qu'on la verra plus bas, à l'épaisseur du corps.

Si l'on néglige les termes en ε (ce qui équivaut un corps sans épaisseur) nous obtenons encore :

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iint_D n(\xi, \eta) \frac{z}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}} d\xi d\eta,$$

$$v(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_D n(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{z}{(y-\eta)^2 + z^2} \left(1 + \frac{x-\xi}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{1/2}} \right) \right] d\xi d\eta.$$

Il faut remarquer que la fonction $v(x, y, z)$ est discontinue non seulement sur le domaine D mais aussi sur la demibanche du plan $z = 0$ située en aval du corps donné. Cette surface de discontinuité peut être interprétée comme une surface de tourbillons. Par conséquent, les équations de la mécanique des fluides en distributions nous ont permis de déterminer une représentation pour le champ des vitesses sans utiliser des hypothèses supplémentaires. En même temps, comme une conclusion de ce que nous venons de dire, il résulte que le modèle de la surface portante est le seul possible si la géométrie du corps permet l'utilisation de la théorie des petites perturbations.

Nous devons calculer la limite de $w(x, y, z)$ pour $z \rightarrow 0$ et $(x, y) \in D$. Les premières intégrales de (3.7) représentant respectivement la dérivée normale et la dérivée tangentielle d'un potentiel de simple couche de sorte que leur limite s'obtient d'une manière simple :

$$\lim_{z \rightarrow \pm 0} \frac{1}{4\pi} \iint_D l(\xi, \eta) \frac{z d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}} = \pm \frac{1}{2} l(x, y),$$

$$\lim_{z \rightarrow \pm 0} \frac{1}{4\pi} \iint_D n(\xi, \eta) \frac{(x-\xi) d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \lim_{\mathcal{A}(D_s) \rightarrow 0} \left[\iint_{D-D_s} n(\xi, \eta) \frac{x-\xi}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{3/2}} d\xi d\eta + \int_{C_s} \frac{n(\xi, \eta)}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2}} d\eta \right] \\ \equiv \frac{1}{4\pi} \iint_D^{\circ} n(\xi, \eta) \frac{x-\xi}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{3/2}} d\xi d\eta,$$

où C_s est une courbe simple, fermée qui entoure le point (x, y) , et D_s est le domaine bordé par cette courbe.

Nous avons également (v. Annexe):

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \pm 0} \frac{1}{4\pi} \iint_D n(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{y-\eta}{(y-\eta)^2+z^2} \left(1 + \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}} \right) \right] d\xi d\eta \\ = -\frac{1}{4\pi} \iint_D \frac{\partial n(\xi, \eta)}{\partial \eta} \left(1 + \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} \right) \frac{d\xi d\eta}{y-\eta} \\ - \frac{1}{4\pi} \int_C n(\xi, \eta) \left(1 + \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} \right) \frac{d\xi}{y-\eta}, \end{aligned}$$

où:

$$(3.8) \quad \iint_{D_\varepsilon} F(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{D-D_\varepsilon} F(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta,$$

D_ε étant l'intersection du domaine D avec une bande large de 2ε parallèle à l'axe $O\xi$ et à l'axe de symétrie qui passe par le point (x, y) (v. Fig. 2). Ensuite C désigne la fron-

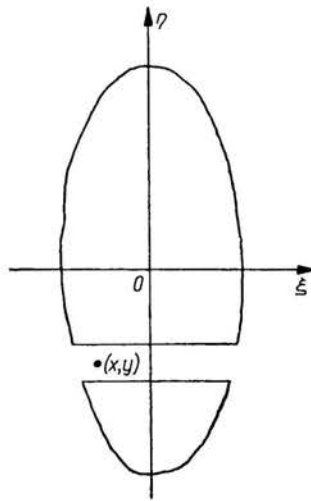


FIG. 2.

tière du domaine D . Compte-tenu de ces formules, de (2.17) et (3.7) nous aurons à la limite les relations suivantes:

$$\begin{aligned} (3.9) \quad \lim_{z \rightarrow \pm 0} w(x, y, z) = \mp \frac{\varepsilon}{2} l(x, y) + \frac{1}{4\pi} \iint_D n(\xi, \eta) \frac{x-\xi}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{3/2}} d\xi d\eta \\ + \frac{1}{4\pi} \iint_D \frac{\partial n(\xi, \eta)}{\partial \eta} \left(1 + \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} \right) \frac{d\xi d\eta}{y-\eta} \\ + \frac{1}{4\pi} \int_C n(\xi, \eta) \left(1 + \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} \right) \frac{d\xi}{y-\eta} = \varepsilon \tilde{f}_z^\pm(x, y). \end{aligned}$$

Pour le corps sans épaisseur, nous avons encore, après quelques calculs simples:

$$(3.10) \quad \lim_{z \rightarrow \pm 0} u(x, y, z) = \mp \frac{1}{2} n(x, y).$$

Faisant la différence entre les deux conditions (3.9) nous obtenons:

$$l(x, y) = \tilde{f}_x^-(x, y) - \tilde{f}_x^+(x, y)$$

(les fonctions $\tilde{f}_x^\pm(x, y)$ étant celles résultant de $f_x^\pm(x, y)$ à l'aide des transformations (3.1)).

De cette manière la fonction $l(x, y)$ est complètement déterminée. Elle est différente de zéro seulement dans le cas des corps à l'épaisseur.

De la somme des deux conditions (3.9) nous obtenons ensuite:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_D \int^{\circ} n(\xi, \eta) \frac{x-\xi}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{3/2}} d\xi d\eta + \frac{1}{4\pi} \int_D \int^= \frac{\partial n(\xi, \eta)}{\partial \eta} \times \\ & \times \left(1 + \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \right) \frac{d\xi d\eta}{y-\eta} + \frac{1}{4\pi} \int_C n(\xi, \eta) \left(1 + \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \right) \frac{d\xi}{y-\eta} = \\ & = \frac{\varepsilon}{2} (\tilde{f}_x^+(x, y) + \tilde{f}_x^-(x, y)). \end{aligned}$$

Mais:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_D \int^{\circ} n(\xi, \eta) \frac{x-\xi}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{3/2}} d\xi d\eta \\ & = \frac{1}{4\pi} \int_D \int^{||} \frac{\partial n(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{(y-\eta) d\xi d\eta}{(x-\xi)\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_C n(\xi, \eta) \frac{y-\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \frac{d\xi}{x-\xi}, \end{aligned}$$

où $\int_D \int^{||} F(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta$ est définie de façon analogue à $\int_D \int^= F(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta$ avec la seule différence que cette fois ci $D_e^{||}$ est l'intersection de D avec une bande large de 2ε parallèle à $O\eta$ (dont le centre est également en le point (x, y)).

Par conséquent, pour la détermination de la fonction $n(x, y)$ nous obtenons l'équation:

$$\begin{aligned} (3.11) \quad & \frac{1}{4\pi} \int_D \int^= \frac{\partial n(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{d\xi d\eta}{y-\eta} + \frac{1}{4\pi} \int_C n(\xi, \eta) \frac{d\xi}{y-\eta} \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_D \int^{\#} \frac{\partial n(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}{(x-\xi)(y-\eta)} d\xi d\eta + \frac{1}{4\pi} \int_C n(\xi, \eta) \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}{(x-\xi)(y-\eta)} d\xi \\ & = \frac{\varepsilon}{2} [\tilde{f}_x^+(x, y) + \tilde{f}_x^-(x, y)]. \end{aligned}$$

Nous avons noté:

$$\int_D \int^{\#} F(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D-D_e^{\#}} F(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta$$

où $D^\#$ est l'intersection du domaine D avec deux bandes larges de 2ε , une d'elles parallèle à $O\xi$ et l'autre parallèle à $O\eta$ l'axe de symétrie de ces deux bandes passant par le point (x, y) .

L'équation intégral-différentielle (3.11) est équivalente à l'équation intégrale singulière de [5]. Nous avons préféré néanmoins la forme (2.11) vu qu'elle est plus facile à manœuvrer par la suite.

Etant donné que le problème de l'intégration de cette équation est particulièrement difficile, nous allons nous occuper seulement de quelques cas limites. Dans ce but nous allons effectuer d'abord les changements de variables: $x = ax'$, $y = by'$, $\xi = a\xi'$, $\eta = b\eta'$ où $2a$ représente la profondeur de l'aile et $2b$ l'envergure. Renotant par x, y, ξ, η les variables indépendantes, par D le domaine résultant de la suite de changement, et par C la frontière de ce domaine, l'équation (3.11) devient:

$$(3.12) \quad \frac{a}{4\pi b} \int_D \int^= \frac{\partial n(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{d\xi d\eta}{y-\eta} + \frac{1}{4\pi} \frac{a}{b} \int_C n(\xi, \eta) \frac{d\xi}{y-\eta} \\ + \frac{1}{4\pi b} \int_D \int^\# \frac{\partial n(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\sqrt{a^2(x-\xi)^2 + b^2(y-\eta)^2}}{(x-\xi)(y-\eta)} d\xi d\eta + \frac{1}{4\pi b} \times \\ \times \int_C n(\xi, \eta) \frac{\sqrt{a^2(x-\xi)^2 + b^2(y-\eta)^2}}{(x-\xi)(y-\eta)} d\xi = \frac{\varepsilon}{2} (\tilde{f}_x^+(x, y) + \tilde{f}_x^-(x, y)) \equiv g(x, y).$$

3.2. Le cas du corps à profondeur négligeable par rapport à l'envergure ($a \ll b$)

Si dans l'équation (3.12) nous considérons un développement en séries par rapport à la magnitude a/b , nous obtenons:

$$\frac{1}{4\pi} \int_D \int^\# \frac{\partial n(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\operatorname{sgn}(y-\eta)}{x-\xi} d\xi d\eta + \frac{1}{4\pi} \int_C n(\xi, \eta) \frac{\operatorname{sgn}(y-\eta)}{x-\xi} d\xi \\ + \frac{1}{4\pi} \frac{a}{b} \int_D \int^= \frac{\partial n(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{d\xi d\eta}{y-\eta} + \frac{1}{4\pi} \frac{a}{b} \int_C n(\xi, \eta) \frac{d\xi}{y-\eta} + O\left(\frac{a^2}{b^2} \ln\left(\frac{a}{b}\right)\right) = g(x, y).$$

Mais:

$$\int_D \int^\# \frac{\partial n(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\operatorname{sgn}(y-\eta)}{x-\xi} d\xi d\eta + \int_C n(\xi, \eta) \frac{\operatorname{sgn}(y-\eta)}{x-\xi} d\xi \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{x_-(y)}^{x_+(y)} n(\xi, y-\varepsilon) \frac{d\xi}{x-\xi} + \int_{x_-(y)}^{x_+(y)} n(\xi, y+\varepsilon) \frac{d\xi}{x-\xi} \right\} = 2 \int_{x_-(y)}^{x_+(y)} \frac{n(\xi, y)}{x-\xi} d\xi,$$

où $x = x_-(y)$ et $x = x_+(y)$ sont les équations de la frontière C (respectivement de l'arc en aval et en amont), l'accent indiquant que l'intégrale respective est calculée en valeur principale au sens de Cauchy.

Par conséquent, l'équation utilisées pour la détermination de la fonction $n(x, y)$ devient:

$$(3.13) \quad \frac{1}{\pi} \int_{x_-(y)}^{x_+(y)} \frac{n(\xi, y)}{x-\xi} d\xi = 2g(x, y) - \frac{1}{2\pi} \frac{a}{b} \left(\int_D \int \frac{\partial n(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{d\xi d\eta}{y-\eta} + \int_C n(\xi, \eta) \frac{d\xi}{y-\eta} \right).$$

Nous remarquerons que l'approximation d'ordre zéro en a/b conduit — au cas où le corps a la forme d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à Oy — à l'équation intégrale de la théorie des profils minces dont la solution peut être explicitée. Considérant que le membre droit de (3.13) est connu et que y est un paramètre, nous obtenons:

$$(3.14) \quad n(x, y) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{x_+ - x}{x - x_-}} \int_{x_-}^{x_+} \sqrt{\frac{t - x_-}{x_+ - t}} g(t, y) \frac{dt}{t - x} - \frac{1}{2\pi} \frac{a}{b} \sqrt{\frac{x_+ - x}{x - x_-}} \int_{-1}^{+1} \frac{\int_{x_-}^{x_+} n(\xi, \eta) d\xi}{(y - \eta)^2} d\eta,$$

où la dernière intégrale est une intégrale singulière au sens de Hadamard.

Afin d'obtenir l'expression (3.14) nous avons utilisé le postulat de Kutta-Joukowsky, nous avons supposé donc que les vitesses au bord de fuite du corps sont finies.

Notons:

$$n(y) = \int_{x_-}^{x_+} n(x, y) dx.$$

Dans ce cas, de l'équation (3.14) nous obtenons, à la suite d'une simple intégration, l'équation suivante pour la fonction $n(y)$:

$$(3.15) \quad n(y) = 2 \int_{x_-}^{x_+} \sqrt{\frac{t - x_-}{x_+ - t}} g(t, y) dt - \frac{a}{b} \frac{x_+ - x_-}{4} \int_{-1}^{+1} \frac{n(\eta)}{(y - \eta)^2} d\eta.$$

La fonction $n(y)$ une fois déterminée, l'équation (3.14) détermine la fonction $n(x, y)$ par une simple intégration. D'un autre côté pour le calcul de la portance il est suffisant de déterminer la fonction $n(y)$.

Notons:

$$\frac{a}{4} \{x_+(y) - x_-(y)\} = a(y).$$

Cette quantité représente le rayon du cercle à l'extérieur duquel on peut représenter conformément le plan $y = \text{const}$ avec la coupure $[x_-(y); x_+(y)]$ sur l'axe $z = 0$ si la représentation garde les vitesses à l'infini. De même, de la théorie des profils minces nous avons encore [8]:

$$\int_{x_-}^{x_+} \sqrt{\frac{t - x_-}{x_+ - t}} g(t, y) dt = -2\pi a(y) j(y).$$

Finalement, avec ces notations, l'équation (3.15) devient:

$$(3.16) \quad C(y) = 4\pi a(y)j(y) - \frac{a(y)}{b} \int_{-1}^{+1} C(\eta) \frac{d\eta}{(y-\eta)^2},$$

où $C(y)$ est la circulation de la vitesse sur une courbe qui entoure le corps dans le plan $y = \text{const}$, et conformément à (3.10) nous avons:

$$C(y) = -n(y).$$

THÉORÈME. *Si les fonctions $a(y)$ et $j(y)$ sont continues, alors l'équation intégrale (3.16) admet une solution, et cette solution est unique.*

Soit:

$$F(\zeta) = \Phi(y, z) + i\Psi(y, z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{C(\eta)}{\eta - \zeta} d\eta$$

qui est une fonction holomorphe dans le plan complexe $\zeta = y + iz$ avec la coupure $[-1; +1]$ sur l'axe réel. Sur ce segment nous avons:

$$\lim_{z \rightarrow \pm 0} F(\zeta) = \pm C(y) + \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{C(\eta)}{y - \eta} d\eta,$$

ou encore [9]:

$$(3.17) \quad \lim_{z \rightarrow \pm 0} F'(\zeta) = \pm C'(y) + \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{C(\eta)}{(y-\eta)^2} d\eta,$$

donc:

$$C(y) = \pm \Phi(y, \pm 0), \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{C(\eta)}{(y-\eta)^2} d\eta = \frac{\partial \Phi}{\partial z}(y, \pm 0).$$

Par conséquent la résolution de l'équation intégrale (3.16) peut être réduite à la résolution du problème aux limites suivantes: déterminer la fonction $F(\zeta) = \Phi + i\Psi$ holomorphe dans le semi-plan supérieur et satisfaisant aux conditions suivantes à la frontière:

$$\Phi(y, 0) = 0, \quad y \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty),$$

$$\Phi(y, +0) = 4\pi a(y)j(y) + \frac{a(y)\pi}{b} \frac{\partial \phi}{\partial z}(y, +0), \quad y \in (-1, +1).$$

Or, ce problème aux limites coïncide avec le problème aux limites considéré par E. TREFFTZ [10] et C. JACOB [8] en liaison avec l'équation de Prandtl. Les auteurs cités ci-dessus démontrent l'existence de l'unicité de la solution de ce problème aux limites dont la résolution se réduit à la résolution d'une équation intégrale de type Fredholm de la II-me espèce.

LEMME. *Pour les ailes sans bords latéraux, l'équation intégrale (3.16) coïncide avec l'équation de Prandtl.*

En effet, dans ce cas $C(\pm 1) = 0$ et par conséquent :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{C(\eta)}{(y-\eta)^2} d\eta = - \int_{-1}^{+1} \frac{C'(\eta)}{y-\eta} d\eta + \frac{C(+1)}{y-1} - \frac{C(-1)}{y+1} = \int_{-1}^{+1} \frac{C'(\eta)}{\eta-y} d\eta.$$

De cette manière l'équation (3.16) devient l'équation intégrodifférentielle de Prandtl.

3.3. Le cas du corps d'envergure négligeable par rapport à la profondeur ($a \gg b$)

Pour les grandes valeurs du paramètre a l'équation (3.12) devient :

$$(3.18) \quad \frac{a}{4\pi b} \int_D \int_D^- \frac{\partial n(\xi, \eta)}{\partial \eta} \{1 + \operatorname{sgn}(x-\xi)\} \frac{d\xi d\eta}{y-\eta} \\ + \frac{a}{4\pi b} \int_C n(\xi, \eta) \{1 + \operatorname{sgn}(x-\xi)\} \frac{d\xi}{y-\eta} + \frac{b}{8\pi a} \int_D \int_D^+ \frac{\partial n(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\operatorname{sgn}(x-\xi)}{x-\xi} d\xi d\eta \\ + \frac{b}{8\pi a} \int_C n(\xi, \eta) \frac{\operatorname{sgn}(x-\xi)}{x-\xi} d\xi + O\left(\frac{b^2}{a^2}\right) = g(x, y).$$

Négligeant les termes d'ordre $(b/a)^2$ cette équation peut être écrite sous la forme :

$$(3.19) \quad \frac{a}{4\pi b} \int_{-1}^{+1} \frac{C(x, \eta)}{(y-\eta)^2} d\eta = g(x, y)$$

où :

$$C(x, y) = - \int_{x-(y)}^x n(\xi, y) d\xi.$$

Pour intégrer cette équation nous écrivons de nouveau $\zeta = y + iz$ et

$$F(\zeta, x) = \Phi(y, z, x) + i\Psi(y, z, x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{C(x, \eta)}{\eta - \zeta} d\eta.$$

Conformément à la formule (3.17), la fonction $F(\zeta, x)$ holomorphe dans le semi-plan $z > 0$ du plan complexe ζ , vérifie les conditions aux limites :

$$\Phi(y, 0, x) = 0, \quad y \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}(y, +0, x) = \frac{b}{a} g(x, y), \quad -1 < y < 1,$$

où :

$$(3.20) \quad \Phi(y, 0, x) = 0, \quad y \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty), \\ \Psi(y, +0, x) = -\frac{b}{a} G(x, y) + h(x), \quad -1 < y < 1,$$

où $G(x, y)$ est une primitive, par rapport à y de la fonction $g(x, y)$ et $h(x)$ une fonction arbitraire pour l'instant. La solution du problème de Volterra avec les conditions à la frontière (3.20), bordée en les points $y = \pm 1$ est:

$$(3.21) \quad F(\zeta, x) = \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{i\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left\{ h(x) - \frac{b}{a} G(x, t) \right\} \frac{dt}{t-\zeta}.$$

La fonction $h(x)$ sera déterminée par la condition que $F(\zeta, x)$ soit annulée à l'infini, ce qui, après quelques calculs simples, conduit à l'expression:

$$h(x) = \frac{b}{\pi a} \int_{-1}^{+1} \frac{G(x, t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

La fonction $F(\zeta, x)$ une fois déterminée, nous avons:

$$C(x, y) = \Phi(y, +0, x)$$

d'où nous obtenons immédiatement la fonction $n(x, y)$.

Pour conclure, l'auteur désire remercier dr. doc. Lazăr DRAGOȘ et dr. N. MARCOV de lui avoir accordé leur appui pour la réussite de ce travail.

Annexe

Soit $\varphi(x, y)$ une fonction dont la dérivée est continue sur tout le plan et dont le support est $D = [-a, a] \times [-R(x), R(x)]$. Nous avons:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \iint_D \varphi(x, y) \frac{y}{y^2 + z^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) dx dy &= \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \iint_D \{ \varphi(x, y) - \varphi(x, 0) \} \frac{y}{y^2 + z^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) dx dy \\ &\quad + \lim_{z \rightarrow 0} \iint_D \varphi(x, 0) \frac{y}{y^2 + z^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Mais:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \iint_D \varphi(x, 0) \frac{y}{y^2 + z^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) dx dy &= \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \int_{-a}^a \varphi(x, 0) \int_{-R(x)}^{R(x)} \frac{y}{y^2 + z^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) dy dx = 0 \end{aligned}$$

vu que l'intégrant est une fonction impaire par rapport à y . Nous avons donc:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \iint_D \varphi(x, y) \frac{y}{y^2 + z^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) dx dy &= \\ &= \iint_D \frac{\varphi(x, y) - \varphi(x, 0)}{y} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Mais:

$$\begin{aligned} \int_D \int \frac{\varphi(x, y) - \varphi(x, 0)}{y} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) dx dy &= \int_{D - D_\varepsilon^-} \int \frac{\varphi(x, y) - \varphi(x, 0)}{y} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) dx dy \\ &+ \int_{D_\varepsilon^-} \int \frac{\varphi(x, y) - \varphi(x, 0)}{y} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) dx dy, \end{aligned}$$

où D_ε^- est l'intersection du domaine D avec une bande de largeur 2ε parallèle à Ox et dont l'axe de symétrie passe par l'origine. Nous avons encore:

$$\begin{aligned} \int_{D - D_\varepsilon^-} \int \frac{\varphi(x, 0)}{y} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) dx dy &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D_\varepsilon^-} \int \frac{\varphi(x, y) - \varphi(x, 0)}{y} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) dx dy &= 0 \end{aligned}$$

et par conséquent:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \int_D \int \varphi(x, y) \frac{y}{y^2 + z^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) dx dy \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D - D_\varepsilon^-} \int \frac{\varphi(x, y)}{y} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) dx dy \equiv \int_D \int \frac{\varphi(x, y)}{y} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) dx dy, \end{aligned}$$

Cette formule est valable, en conditions plus générales, pour la fonction $\varphi(x, y)$, mais la démonstration respective est plus laborieuse. Nous avons encore:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \int_D \int \varphi(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{y}{y^2 + z^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \right\} dx dy \\ = \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \int_D \int \frac{\partial}{\partial y} \left[\varphi(x, y) \frac{y}{y^2 + z^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \right] dx dy \right. \\ \left. - \int_D \int \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \frac{y}{y^2 + z^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) dx dy \right\} \\ = \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \int_C \int \varphi(x, y) \frac{y}{y^2 + z^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) dx dy \right. \\ \left. - \int_D \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{y}{y^2 + z^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) dx dy \right\}. \end{aligned}$$

Par conséquent:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \int_D \int \varphi(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{y}{y^2 + z^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \right\} dx dy \\ = - \int_C \int \frac{\varphi(x, y)}{y} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \int_D \int \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \frac{1}{y} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) dx dy. \end{aligned}$$

Bibliographie

1. L. PRANDTL, *Tragflügeltheorie*, Göttinger Nachrichten, math. phys. Klasse, 451, 1918.
2. J. E. REISSNER, *Note on the theory of lifting surfaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **35**, 208–215, 1949.
3. E. TRUCKENBRODT, *Z.A.M.M.*, **33**, 165–173, 1953.
4. J. WEISSINGER, *Theorie des Tragflügels bei stationäre Bewegung in reibungslosen, inkompressiblen Medien*, Handbuch der Physik, VIII/2, Springer Verlag, 385–437, 1963.
5. P. COCARLAN, *Cercetări asupra teoriei aripilor portante*, Résumé de la thèse de doctorat, Bucureşti 1972.
6. А. Н. ПАНЧЕНКОВ, *Современные вопросы гидродинамики*, Наукова Думка, Киев 1967.
7. L. SIROVICH, *Steady gasdynamic flows*, The Physics of Fluids, **11**, 1424–1439, 1968.
8. C. JACOB, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Bucarest-Paris 1959.
9. C. FOX, *A generalization of the Cauchy principal value*, Canadian J. Math., **9**, 110–115, 1957.
10. E. TREFFTZ, *Zur Prandtlschen Tragflügel Theorie*, Math. Annalen, **82**, 306, 1921.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE L'ACADÉMIE CALEA GRIVITEI, NR. 21
BUCAREST, ROUMANIE.

Received February 1973, revision received August 12, 1974.