440.

NOTE SUR UNE TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tom. LXVII. (1867), pp. 95, 96.]

La lecture de la Note de M. Hesse, "Ein Uebertragungsprincip" (t. LXVI. p. 15 de ce Journal) m'a suggéré les remarques suivantes :

Soient (a_1, b_1, c_1, d_1), (a_2, b_2, c_2, d_2), (a_3, b_3, c_3, d_3) des constantes données, on peut supposer que les coordonnées (x, y) d'un point quelconque dans un plan soient exprimées en fonctions des paramètres variables (u, v) par les équations

$$x = \frac{a_1 + b_1u + c_1v + d_1uv}{a_3 + b_3u + c_3v + d_3uv}, \quad y = \frac{a_2 + b_2u + c_2v + d_2uv}{a_3 + b_3u + c_3v + d_3uv}.$$

En introduisant une nouvelle indéterminée s, ces équations peuvent être écrites dans la forme

$$\begin{aligned} sx &= a_1 + b_1u + c_1v + d_1uv, \\ sy &= a_2 + b_2u + c_2v + d_2uv, \\ s &= a_3 + b_3u + c_3v + d_3uv\,; \end{aligned}$$

pour des valeurs données des coordonnées (x, y) la quantité s est en général déterminée par une équation quadratique, et les paramètres u et v sont des fonctions linéaires données de s ; il y a cependant deux cas particuliers qu'il convient de distinguer.

1°. L'équation quadratique en s peut avoir la racine $s = 0$ et, débarrassée de ce facteur, se réduire par conséquent à une équation linéaire ; ce cas particulier a lieu si la condition $(abc)(bcd) = (abd)(acd)$ est remplie, où la notation (abc) désigne le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}.$$

Dans ce cas u et v sont des fonctions rationnelles de (x, y) et la transformation a la signification géométrique suivante :

En considérant deux droites quelconques L, M dans l'espace et en menant par le point donné (x, y) la droite unique G qui rencontre ces deux droites, on peut supposer que u et v soient des paramètres qui déterminent les positions des points de rencontre sur les deux droites respectivement ; c. à. d. que u soit la distance d'un point fixe sur la droite L au point de rencontre avec la droite G, et de même que v soit la distance d'un point fixe sur la droite M au point de rencontre avec la droite G.

2°. Supposons $b_1 : c_1 = b_2 : c_2 = b_3 : c_3$, ou ce qui est au fond la même chose $b_1 - c_1 = 0$, $b_2 - c_2 = 0$, $b_3 - c_3 = 0$; alors s est déterminée par une équation simple, mais u et v ne sont plus des fonctions rationnelles de s ; on voit que dans ce cas $u + v$ et uv sont des fonctions rationnelles de (x, y), et que par conséquent u et v sont les racines d'une équation quadratique qui contient (x, y) linéairement. On peut supposer que u et v soient les paramètres de deux points sur une droite donnée, c. à. d. que u et v soient les distances de ces deux points respectivement à un point fixe situé sur la droite donnée ; on a ainsi la transformation de M. Hesse.

Je n'ai pas cherché la signification géométrique des formules générales.

Cambridge, 10 *octobre* 1866.