KOS ... ELEMENTE DER ARITHMET

6089

1089

http://rcin.org.pl

http://rcin.org.pl

DIE ELEMENTE DER ARITHMETIK.

VON

ERNST KOSSAK.

Towarzystwa Naukowego Warszawskiego

(PROGRAMMABHANLUNG DES WERDERSCHEN GYMNASIUMS IN BERLIN.)

BERLIN, 1872.

NICOLAI'SCHE VERLAGSBUCHHANDLUNG

(A. EFFERT & L. LINDTNER).

http://rcin.org.pl

PAŃSTW. INSTYTUT MAT.
BIBLIOTEKA
6713

http://rcin.org.pl

830

Die Elemente der Arithmetik.

Durch die nachstehende Abhandlung beabsichtige ich, dazu beizutragen, dass bei den Lehrern der Mathematik ein Einverständniss über die Behandlung der Elemente der Arithmetik beim Unterrichte erzielt werde; die Erreichung dieses Zieles wird aber wohl am besten dadurch gefördert, dass die wissenschaftliche Auffassung dieser Elemente eine allgemeine wird. Zu der Annahme, dass dieses noch nicht der Fall ist, bin ich wohl berechtigt, indem manche der neu oder in neuer Auflage erscheinenden arithmetischen Lehrbücher theils Ungenauigkeiten enthalten, theils die Schwierigkeiten bemänteln, und hierdurch die Unklarheit der Begriffe eher vermehren, als beseitigen. Um nun zunächst einen sicheren Boden zu gewinnen, gebe ich in dem ersten Abschnitte eine kurze historische Uebersicht über die Entwickelung der Arithmetik, wobei es mir, da die Bibliotheken der Schulen wohl selten an mathematischen Werken reich sind, nothwendig erschien, die wichtigsten Originalstellen, welche sich auf diesen Gegenstand beziehen, wörtlich anzuführen.

Während nun früher die Einführung neuer Einheiten in die Arithmetik „*durch die Nachweisbarkeit einer anschaulichen Bedeutung*“ derselben (s. unten S. 14 die Ausführungen von Gauss) begründet wurde, beruht gegenwärtig diese Einführung allein auf der *Definition* der einzuführenden Einheiten, so dass z. B. für die Zulassung der negativen Einheit der einzige Grund der ist, dass man die Subtraction allgemein gelten lassen will, und folglich eine Einheit annehmen muss, welche zur positiven Einheit addirt, Null ergiebt. Ueberhaupt liegt die Veranlassung zur Definition neuer Einheiten in der Forderung, dass die Rechnungsoperationen, welche für ganze (positive) Zahlen aufgestellt sind, allgemein aufrecht erhalten werden sollen, wodurch zunächst die negativen ganzen Zahlen, so wie die gebrochenen und irrationalen positiven Zahlen sich ergeben, und indem dann weiter verlangt wird, dass auch für diese Zahlen dieselben Rechnungsoperationen gebildet werden sollen, welche für die ganzen positiven Zahlen bestehen, *und zwar auf Grund der Gesetze*, welche für die Rechnungsoperationen dieser letzteren abgeleitet sind, gelangt man zu den gebrochenen und irrationalen negativen Zahlen, und zu den imaginären Zahlen (s. unten S. 18); andererseits ist die Annahme neuer Einheiten dadurch *beschränkt*, dass die aus diesen zusammengesetzten complexen Zahlen so beschaffen sein sollen, dass für dieselben die Rechnungsoperationen, die bei ganzen Zahlen Geltung haben, nämlich die Addition, Multiplication und

http://rcin.org.pl

ihre umgekehrten Operationen die Subtraction und die Division ebenfalls in gleicher Bestimmtheit, wie für die ganzen Zahlen, auf Grund der bei diesen bestehenden Gesetze ausführbar bleiben sollen.

Fragen wir nun aber, durch welchen Umstand diese Aenderung in der Auffassung der Elemente der Arithmetik bewirkt worden ist, so finden wir wohl die Antwort darin, dass die Theorie der elliptischen Functionen, welche (s. unten S. 11) die volle Anerkennung der imaginären Grössen in der Analysis unvermeidlich machte, auch die Ursache enthält, dass die Elemente der Arithmetik einer streng wissenschaftlichen Erklärung unterzogen worden sind, indem das Princip der Umkehrung, auf welches jene Theorie sich gründet, auch in der Arithmetik von weittragendem Einflusse gewesen ist.

Im Besonderen aber ist es das Verdienst von Herrn Weierstrass, die allgemeine Theorie der complexen Zahlen zum Abschluss geführt zu haben, indem derselbe sowohl die Rechnungsoperationen für die im engeren Sinne complexen Zahlen in der bereits angegebenen Weise streng begründet hat, als auch gezeigt hat, dass die Zulassung von complexen Zahlen mit mehr als zwei Grundeinheiten und den diesen entgegengesetzten in der allgemeinen Arithmetik unvereinbar ist mit der Beibehaltung der Division, wodurch die von Gauss angeregte Frage entschieden ist, „warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Grössen liefern können“ (s. unten S. 15). Herr Weierstrass behandelt nämlich die Theorie der complexen Zahlen als Einleitung zu seiner Vorlesung über die Theorie der analytischen Functionen, an welcher ich im Winter-Semester 1865—66 Theil genommen habe. Im Interesse der Sache glaubte ich berechtigt zu sein, Herrn Weierstrass um die Genehmigung zu bitten, an dieser Stelle und zu dem angegebenen Zwecke seine Begründungsweise der Theorie der complexen Zahlen zu entwickeln; die Bereitwilligkeit, mit welcher Herr Weierstrass meine Bitte gewährte, darf ich wohl als eine Rechtfertigung meiner Voraussetzung ansehen. So umfasst nun der zweite Abschnitt dieser Abhandlung die Theorie der complexen Zahlen in der ihr von Herrn Weierstrass gegebenen Vollständigkeit. Zu bemerken habe ich, dass ich hier die Ableitung für die Multiplication der Grundelemente (s. S. 25 und 26) nach einer Andeutung von Herrn Weierstrass ausgeführt habe, während derselbe eine andere Entwickelung giebt; den Satz über die Vertauschung der Summanden mit verschiedenen Vorzeichen bei der Addition habe ich in gleicher Weise aus dem Begriff der Gleichheit solcher Zahlen zu folgern gesucht (s. S. 22), wie dies bei der Addition von positiven Zahlen durch Herrn Weierstrass geschieht (s. S. 18).

Es war meine Absicht, auch die Elemente der Geometrie, deren neuere Literatur das Interesse der Mathematiker so lebhaft in Anspruch nimmt, hier zu behandeln; da jedoch der mir in diesem Programme gewährte Raum nur noch die Aufnahme eines kleinen Theils der geometrischen Abhandlung gestatten würde, so werde ich dieselbe besonders gedruckt zur Mittheilung bringen.

http://rcin.org.pl

§. 1.

Historische Uebersicht über die Entwickelung der Arithmetik.

Die erste Hauptfrage, welche uns in der Geschichte der Arithmetik entgegentritt, bezieht sich auf die Entstehung und Verbreitung unseres Zahlensystems. Als unzweifelhaft ist anzusehen, dass dasselbe in Indien seinen Ursprung hat, und dass die Araber es von den Indern erhalten haben. Wie aber die Darstellung der Zahlen bis zur Einführung des Stellenwerthes eine allmälige Entwickelung durchgemacht haben muss, so hat auch wohl ohne Zweifel eine diesen einzelnen Entwickelungsstufen entsprechende allmälige Verbreitung der indischen Methoden, die Zahlen darzustellen, stattgefunden. Wenn wir nun auch hoffen können, dass die Untersuchungen über die Verbreitung des indischen Zahlensystems zu sichereren Resultaten führen werden, als es bisher der Fall ist, so wird doch nicht zu erwarten sein, dass der Weg, auf welchem dasselbe thatsächlich entstanden ist, entdeckt werden wird. Alexander von Humboldt hat uns aber einen Weg gezeigt, auf welchem die Entwickelung desselben allmälig hat geschehen können. Derselbe hat nämlich die Aufgabe verfolgt, „die bei verschiedenen Völkern alter und neuerer Zeit üblichen Systeme von Zahlzeichen unter einen allgemeinen Gesichtspunkt zu stellen“, und ohne Rücksicht auf die ethnographische Folge nur die verschiedenen Mittel zu betrachten, welche angewandt wurden, „um dieselben Gruppen von Einheiten (gemischte oder ungemischte Gruppen) graphisch auszudrücken“. Die Resultate seiner Untersuchungen sind von ihm dargelegt in der Abhandlung: „Ueber die bei verschiedenen Völkern üblichen Systeme von Zahlzeichen und über den Ursprung des Stellenwerthes in den indischen Zahlen“. (S. Crelle's Journal Bd. 4, S. 205—231.) Im Eingange derselben sagt Humboldt: „Bei der neuen und glücklichen Richtung, welche das Studium der Sprachen und Monumente genommen, bei dem wachsenden Verkehr mit den süd- und ostasiatischen Völkern, ist es wohl nicht ohne einigen Nutzen, Probleme zur Sprache zu bringen, welche mit dem Gange des menschlichen Geistes, und (durch die letzten Verzweigungen der Zahlen-Hieroglyphik und einfacher graphischer Methoden) mit den glänzendsten Fortschritten der Mathematik in so enger Verbindung stehen. ‚Der Gedanke, alle Quantitäten durch neun Zeichen auszudrücken, indem man ihnen zugleich einen absoluten und einen Stellenwerth giebt, sagt einer der grössten Geometer unserer Zeit und aller Zeiten, der Verfasser der Mécanique céleste, ist so einfach, dass man eben deshalb nicht genugsam erkennt, welche Bewunderung er verdient. Aber eben diese Einfachheit und die Leichtigkeit, welche die Methode dem calcul zusichert, erheben das arithmetische System der Inder zu dem Range der nützlichsten Entdeckungen. Wie schwer es war, eine solche Methode aufzufinden, kann man daraus abnehmen, dass sie dem Genie des Archimedes und Apollonius von Perga, zweier der grössten Geister des Alterthums, entgangen war‘. Die nachfolgenden Bemerkungen werden zeigen, wie ich hoffe, dass die indische Methode allmälig aus früheren, noch jetzt im östlichen Asien üblichen, entstehen konnte.“

Den Gang der Untersuchungen Humboldt's erkennt man besonders aus den beiden folgenden Stellen: „Beschreibt man die Zahlensysteme einzeln, wie sie jedes Volk anwendet, so verdunkeln sich die Aehnlichkeiten der Methoden; man verliert die Spur, auf welcher der menschliche Geist zu dem Meisterwerke der indischen Arithmetik gelangt ist“. „In der einfachen Herzählung der verschiedenen Methoden, welche Völker, denen die indische Positions-Arithmetik unbekannt war, angewandt haben, um die multipla der Fundamental-Gruppen auszudrücken, liegt, glaube ich, die Erklärung von der allmäligen Entstehung des indischen Systems.“

http://rcin.org.pl

Ohne auf die so inhaltreiche Abhandlung Humboldt's näher einzugehen, will ich nicht unterlassen, das Gesammtresultat derselben kurz anzuzeigen.

Als die erste schriftliche Darstellung der Zahlen ist die Aneinanderreihung von Punkten und Strichen zu betrachten, so dass die aneinandergereihten Einheitszeichen mehr abgezählt als in ihrer Gesammtheit gelesen wurden (s. die Abh. S. 218). Ein wichtiger Fortschritt besteht in der Einführung von besonderen Zeichen für Gruppen von Einheiten, und zwar sind hierbei dieselben Gruppen zu Grunde gelegt, für welche auch die Sprache eine besondere Benennung hatte; und „die verschiedensten Völker stehen still, in Folge der gleichen körperlichen Gliederung (vier fünffach getheilter Extremitäten), entweder bei einer Hand, oder bei beiden, oder bei Händen und Füssen“, so dass sie Gruppen bilden von fünf, zehn oder zwanzig Einheiten, und dieselben „eine Hand“, „zwei Hände“ und „Hände und Füsse“ nennen. In der Chibcha-Sprache der Muyscas (den Bewohnern der Hochebene von Cundinamarra) heissen eilf, zwölf, dreizehn: Fuss eins, Fuss zwei, Fuss drei; das Zahlwort Fuss bedeutet zehn, weil man den Fuss nennt, wenn schon beide Hände durchgezählt sind.“ In der Sprache der Yaruros (am Apure-Flusse) heisst „vierzig“ zwei Menschen, indem der ganze Mensch als ein Symbol von zwanzig erscheint.

Die Entwickelung nun der Darstellung der Zahlen mit Hilfe bestimmter Gruppenzeichen, ist jedenfalls wesentlich gefördert worden durch die Mittel der palpabeln (betastenden) Arithmetik (s. die Abh. S. 216), als deren Werkzeuge anzusehen sind: beide menschliche Hände, Häufchen von Steinen, Samenkörner, lose Schnüre mit Knoten (Rechenschnüre, tatarische und peruanische quippos), der Suanpan Inner-Asiens, der zu den abendländischen Völkern als abax oder tabula logistica früh (vielleicht durch Aegypter zur Zeit des Pythagoreïschen Bundes) übergegangen ist, und die slavische Rechenmaschine mit aufgezogenen Kugeln oder Samenkörnern. „Alle diese Werkzeuge lieferten dem Auge die ersten graphischen Bezeichnungen von Gruppen verschiedener Abstufung. Eine Hand oder eine Schnur mit Knoten oder verschiebbaren Kugeln bezeichnet die Einheiten bis fünf oder zehn oder zwanzig. Wie oft durch Schliessung der einzelnen Finger eine Hand durchgezählt ist, giebt die andere Hand an, auf der dann jeder Finger, d. i. jede Einheit, eine Gruppe von Fünf ausdrückt. Ebenso verhalten sich zwei lose Knotenschnüre gegen einander, und zu Gruppen zweiter, dritter und vierter Ordnung übergehend, stehen in demselben auf- und absteigenden Gruppenverhältniss die aufgespannten, mit Kugeln bezogenen Rechenschnüre, der altasiatische Suanpan“. „Die Chinesen scheinen von den frühesten Zeiten an willkürlich irgend eine der aufeinander folgenden parallelen Schnüre als die Schnur der Einheiten betrachtet zu haben, so dass sie auf- und abwärts, Decimalbrüche und ganze Zahlen und Potenzen von zehn erhielten“.

Um über die verschiedenen Methoden, welche nach Humboldt die Völker im Ausdruck numerischer Grössen angewandt haben, einen Ueberblick zu geben, führe ich den Abschnitt an, mit welchem derselbe seine Ausführungen schliesst; dieser lautet (s. die Abh. S. 228):

„Wenn wir noch einmal den Blick auf die vielen, zum Theil so wenig bekannten, Notationsmethoden der Völker beider Continente zurückwerfen, so sehen wir:

1) wenige Gruppenzeichen, und fast nur für n^2, n^3, n^4 . . ., nicht für 2n, 3n, und $2n^2$, $2n^3$ . . ., wie bei Römern und Tuscern X, C, M (daher alle Zwischenstufen, z. B. 2n oder $2n^2$, durch Juxtaposition wie in XX oder CCC bezeichnet werden);

2) viele Gruppenzeichen nicht blos für n, n^2 (ι und ϱ in den griechischen Buchstabenziffern), sondern auch für 3n oder $4n^2$ (in λ und υ), woraus grosse Heterogeneïtät der einzelnen Elemente im Ausdruck für $2 + 2n + 2n^2$ entsteht (z. B. $\sigma\varkappa\beta$ für 222);

3) Bezeichnung des Vielfachen der Fundamental-Gruppe und ihrer Potenzen (2n, 3n, $4n^2$, $5n^2$), entweder durch Hinzufügung (darüber und daneben) von Indicatoren zu den

*) Vergl. Nesselmann: Die Algebra der Griechen. Cap. IV.

http://rcin.org.pl

Gruppenzeichen (chinesisch:* $\overset{2}{X}$, $\overset{3}{X}$, $\overset{4}{C}$, $\overset{5}{C}$; indisch-tamulisch 2X, 3X, 4C, 5C), oder durch stufenweise Bepunktung oder Accentuirung der ersten neuen Einheitszeichen, gleichsam $\dot{\alpha}$ für 10, $\dot{\beta}$ für 20, $\ddot{\alpha}$ für 100, $\dddot{\alpha}$ für 1000, $\ddddot{\delta}$ für 40000, im Gobar,** im Scholion des Neophytos, und in absteigender Sexagesimal-Scale der alexandrinischen Astronomen für $\frac{1}{60}, \frac{1}{60^2}, \frac{1}{60^3}$ in 1° 37′ 37″ 37‴ . . . .

Wir haben gesehen, wie die Indicatoren (Multiplicatoren) der Ost-Asiaten und Bewohner der südlichen und indischen Halb-Insel, oder, wenn ursprünglich Gruppenzeichen für n, n^2, n^3 verschieden waren, wie die Accentuirung der Pythmenes (Wurzelzahlen) im Gobar-Systeme oder Scholion des Neophytos, ja endlich wie die Kugelschnüre des Suanpan, in dem ein potenzirter Werth nur durch relative Lage der Schnur ausgedrückt wird, zum Stellenwerthe führen konnten.« ***

Ueber das Resultat seiner Untersuchungen sagt Humboldt selbst, dass er nicht historisch entwickeln kann, dass der Ursprung des indischen Stellenwerthes von neun Ziffern wirklich der sei, welchen er angegeben, aber er glaubt einen Weg gefunden zu haben, auf welchem allmälig die Entdeckung gemacht werden konnte. „Auf die Einsicht solcher Möglichkeiten führt ja überhaupt nur die dunkle und eben darum so anziehende Geschichte der alterthümlichen Entwickelung geistiger Kräfte und Bildung des Menschen-Geschlechts.«

Während nun die Entstehung unseres Zahlensystems nur bei einem Volke zu suchen ist, finden wir bei allen Völkern das Zusammenfassen besonderer Gruppen von Einheiten als neue Einheiten, und indem die Vorstellung einer Gruppe von gleichartigen Gegenständen die umgekehrte Vorstellung veranlasst, ein Ganzes als aus gleichen Theilen bestehend anzusehen, so werden wir in jener Gruppenbildung auch gleichzeitig den Ursprung der Bruchrechnung erblicken müssen. Interessant ist in dieser Hinsicht, dass im Mexikanischen sich nicht blos Gruppenzeichen für Zwanzig (eine Fahne), für das Quadrat und den Cubus von zwanzig, sondern auch (da die Fahne in vier Fächer getheilt und halb oder zu $\frac{3}{4}$ colorirt ist) Zahlzeichen für halb zwanzig oder zehn, und für $\frac{3}{4}$ zwanzig oder funfzehn finden (s. H.'s Abh. S. 212).

Aus dem bezeichneten Grunde sind wir wohl zu der Annahme berechtigt, dass die Einführung der gebrochenen Zahlen in die Arithmetik ohne wesentliche Schwierigkeit geschehen konnte. Dagegen wissen wir, dass die Anerkennung der negativen Zahlen nur erst nach langem Widerstreben der Mathematiker erfolgt ist.

Das Rechnen mit Zahlen unter Berücksichtigung ihres Vorzeichens hat seinen Ursprung wohl theils in der Geometrie, theils bei der Auflösung der Gleichungen ersten Grades gefunden. Die Regel, dass bei der Multiplication zweier Polynome Glieder von demselben Vorzeichen ein positives Produkt, Glieder von entgegengesetzten Vorzeichen ein negatives Produkt ergeben, wird schon im Alterthum, besonders bei Diophant (Arith. I. def. 9) angewendet; sie war ohne Zweifel aus der Geometrie abgeleitet, nämlich aus den Sätzen über den Flächeninhalt der Figuren, welche das zweite Buch des Euclid enthält

Der fünfte Satz dieses Buches ist, arithmetisch ausgedrückt, der folgende (s. Nesselmann: Die Algebra der Griechen S. 154): $ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Herr Nesselmann sagt in seinem Werke S. 288: „In Def. IX hält Diophant es nicht für nöthig, einen Satz, der selbst spätern Mathematikern so viel Kopfzerbrechen verursachte, den nämlich,

*) Humboldt bedient sich, ohne Rücksicht auf die wirklich angewandten Ziffern zu nehmen, „der römischen Zahlen als Gruppenzeichen, der indischen als Indicatoren."

**) Humboldt nimmt an, dass von der Anwendung dieser Punkte statt der Nullen der Namen Ghobar (Staub) herstammt. Max Müller dagegen hebt hervor, dass nach Angabe der Araber diese Schrift Ghobar genannt wurde, weil man zu ihrer Darstellung zuerst mit Staub bedeckte Tafeln angewandt hatte; s. die Abhandlung desselben über: „unsere Zahlzeichen."

***) Vergl. Nesselmann: „Die Algebra der Griechen." Cap. III: Ueber Zahlensysteme und Zahlzeichen. S. 62—104.

http://rcin.org.pl

dass Negatives mit Negativem multiplicirt Positives gebe, auch nur mit einer Sylbe zu erläutern, sondern er sagt, als spräche er von einer Sache, die sich längst von selbst versteht: „Λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὕπαρξιν· λεῖψις δὲ ἐπὶ ὕπαρξιν ποιεῖ λεῖψιν.“

Nachdem er nun in der zehnten Definition ermahnt hat, in den Rechnungen mit algebraischen Ausdrücken sich fleissig zu üben, namentlich in Operationen mit mehrgliedrigen Grössen, von denen er vorher gar nichts gesagt hat, und sich dann erst an die Auflösung von Aufgaben zu machen, so lehrt er eben so kurz und gleichfalls nur wie eine Nebensache in der eilften Definition, wie man eine gegebene Gleichung auf die einfachste Form bringen könne. Man ersieht aus dem Allen, dass Diophant die Elemente der Algebra nicht lehrt, sondern voraussetzt und nur im Vorbeigehen daran erinnert, um den Schüler zu veranlassen, dass er sich in derselben recht festsetze, weil er in seinem Werke sich derselben als Hilfsmittel der Untersuchung bediene.“

In der Uebersetzung des Diophant durch Xylander (s. Kästner's Gesch. d. M. Theil 1, S. 184) wird es absurd genannt, wenn das Resultat einer Gleichung gleich Null oder negativ wird; aber bei der Operation des Auflösens der Gleichung wird doch Anwendung vom Rechnen mit Zahlen verschiedenen Vorzeichens gemacht. Kästner hebt bei der Besprechung jenes Werkes die Behandlung der folgenden Aufgabe hervor: „Von zwei gegebenen Zahlen, dieselbe Zahl wegzunehmen, so dass die Reste ein gegebenes Verhältniss haben. Dieses Verhältniss muss aber grösser sein, als das Verhältniss der grösseren gegebenen Zahl zur kleineren.

Man soll von 100 und von 20 dieselbe Zahl abziehen; der grössere Rest soll des kleineren sechsfaches sein. Die Zahl, die man abziehen soll, heisse 1 N; die Reste sind 100 — 1 N und 20 — 1 N. Jener soll der sechsfache von diesem sein. Sechsmal 20 — 1 N sind 120 — 6 N also gleich 100 — 1 N. Adiiciatur quod deerat utrique et auferantur similia utrinque, tandem habebis 5 N aequales 20, et 1 N aequ. 4. Das Scholion zeigt uns, warum das gegebene Verhältniss, hier 6 zu 1, grösser sein soll als das der gegebenen Zahlen, welches 5 zu 1 ist. Sonst bestünde die Frage nicht. Wäre es ebenso gross, hier 5 zu 1, so folgte 4 N so gross als Nichts, und diese Ungereimtheit würde vergrössert, wenn es kleiner wäre als 5 zu 1.“

Kästner fügt hier aus Xylanders Uebertragung des Diophant hinzu:

„Quod de adiiciendo utrique defectu ait, cum aequentur 120 — 6 N et 100 — 1 N, quaeritur de utro defectu sit intelligendum. Dicimus non hic modo sed ubique in tali casu maiorem defectum communiter addendum esse. Nam si minorem adiiceremus non aboteretur maior defectus, sed hoc addito etiam minor tollitur. Ita hic, maiore defectu, 6 N addito, fiunt 120 integrum, et 100 — 1 N fiunt 100 + 5 N, cum 1 N ob defectum aboleatur 5 superstitibus. Nam defectus, si excedatur a copia, ei additus defectum creat.« „Xylander erwähnt hierbei: Graeca verba de defectu adiiciendo erant mutila.«

Xylander hat den Diophant im Jahre 1575 herausgegeben, also mehr als tausend Jahre nach Diophant; die Auffassung der negativen Zahlen hat sich aber in diesem grossen Zwischenraume nicht geändert.

Die Zeichen + und — nannte man cossische Zeichen (von cosa, welches Wort die Unbekannte in einer Gleichung bezeichnet), und man verstand mit Zahlen zu rechnen, welche diese Zeichen vor sich hatten; überall aber, wo die Rechnung negative Resultate ergab, schloss man diese als falsche aus. So liess man bei den Gleichungen ersten Grades diejenigen ganz fort, welche zu negativen Resultaten führten, bei den Gleichungen des zweiten Grades blieb ein negativer Werth der Unbekannten unberücksichtigt, und sogar ganz die Form dieser Gleichungen, wenn beide Wurzeln negativ wurden; man wusste wohl, dass der Werth einer Quadratwurzel sowohl positiv als negativ zu nehmen sei, was hervortritt bei quadratischen Gleichungen mit zwei positiven Wurzeln (s. Kästner S. 71: Den Bericht über die Arithmetik von Lucas de Burgo S. S., welcher die Auflösung der quadratischen Gleichungen lehrt [1494]).

Erwähnungswerth ist es, anzuführen, in welcher Weise die Multiplikationsgesetze

http://rcin.org.pl

für die relativen Zahlen durch Gosselin (1578) abgeleitet werden, welcher die Arithmetik des Tartaglia (1556) mit Ergänzungen herausgegeben hat (s. Kästner S. 198).

„Dass minus heraus kommt, wenn man plus und minus mit einander multiplicirt, und minus mit minus plus giebt, dieses zu beweisen, sagt Gosselin, hat unzählige gute Köpfe gequält. Er will es so deutlich darthun, dass Niemand so klein sein solle, der es nicht verstehe.“ Seine Beweise, giebt Kästner an, in jetzt gewöhnlichen Zeichen ausgedrückt, würden so aussehen:

„$6 = (4 + 2) = (8 - 2)$, also: $(4 + 2) \cdot (8 - 2) = 36$;

macht man die Rechnung, so erhellt, dass plus mit minus, und minus mit plus beides minus giebt. Ferner:

$$6 = (8 - 2) = (10 - 4) \text{ und wenn } (8 - 2) \cdot (10 - 4) = 36$$

sein soll, muss plus aus minus mit minus kommen.“

Dasselbe Werk enthält in seinem sechsten Buche: „Die sieben ersten Sätze aus dem zweiten Buche des Euclid in Zahlen gewiesen“ (s. Kästner S. 199).

Der Grund für die vollgiltige Zulassung der negativen Zahlen in der Arithmetik liegt nun wohl in der Einführung des rechtwinkligen Coordinatensystems in die Geometrie durch Descartes; vorzugsweise diesem ist es auch zu verdanken, dass die Bezeichnung eines negativen oder positiven Werthes durch denselben Buchstaben angewandt wurde (Descartes: Geom. 1637). Den Nutzen dieser Bezeichnung hat Newton noch für Leibniz ausdrücklich hervorgehoben (Newton's Brief an Leibniz 1676, s. Baltzer El. d. M. Theil I. S. 70).

Noch ehe die Mathematik den Kampf mit den negativen Zahlen beendet hatte, war schon ein neuer Gegenstand des Streites entstanden: Die imaginären Zahlen.

Cardanus (1545) ist der erste, welcher auf die Bedeutung von Quadratwurzeln aus negativen Zahlen eingeht. Wenn bei der Auflösung einer Gleichung zweiten Grades die Grösse unter dem Wurzelzeichen negativ wird, so sagt Cardanus: „quaestio ipsa est falsa nec esse potest quod proponitur, semper autem pro regula generali in hoc tractatu toto est observandum quod cum ea quae praecipiuntur fieri non possunt, nec illud quod proponebatur fuit nec esse potuit“ (s. Kästner S. 155).

Wenn nun auch die imaginären Zahlen allmälig eine grössere Bedeutung gewannen, wozu besonders die Erweiterung der Theorie der Gleichungen beitrug, und die Eigenschaften derselben, welche nach und nach aufgefunden waren, immer mehr als brauchbar und nützlich anerkannt werden mussten, so blieb doch die Auffassung dieser Zahlen diejenige, welche Cardanus ausspricht, und man duldete sie nur als ein Hilfsmittel bei der Ableitung mathematischer Sätze, deren Resultate man jedoch von Neuem allein durch reelle Zahlen begründen zu müssen glaubte.

Von sehr wesentlichem Einfluss für die Zulassung der imaginären Grössen in der Analysis war der Umstand, dass Euler, nachdem schon Johann Bernoulli seit 1702 den Zusammenhang logarithmischer und cyclometrischer Differentialformeln durch Benutzung der imaginären Zahlen aufgeklärt hatte (Opp. I, No. 70 und 89), den Exponenten imaginäre Werthe beilegte, und hierdurch die Beziehungen zwischen den Exponential- und Kreisfuntionen aufdeckte (Intorc. I §. 138; Brief an Goldbach 1741).*

Wenig beachtet wurde dagegen wohl der erste Versuch, die imaginären Grössen geometrisch darzustellen, welcher fast in dieselbe Zeit fällt und von Kühn, einem Lehrer der Mathematik in Danzig, gemacht wurde. In seiner Abhandlung: „Meditationes de quantitatibus imaginariis construendis et radicibus imaginariis exhibendis“ (Novi commentarii Acad. Petrop. III ad 1750 et 1751) sagt Kühn,** dass man unter $a\sqrt{-1}$ eine Grade zu verstehen habe, welche auf der Graden a senkrecht steht und mit ihr gleiche Länge hat; er construirte also $\sqrt{-1}$ als die mittlere Proportionale zwischen $+1$ und -1.

Den entschiedensten Einfluss aber auf die Anerkennung der imaginären Zahlen

*) S. Baltzer's Elem. d. M. Th. I, S. 182.

**) S. Durège: El. d. Theorie d. Fct. S. 4; Montucla: Histoire des Mathématiques T. III, p. 30.

http://rcin.org.pl

hatte der Satz, dass jede Gleichung n. Grades n Wurzeln hat; jedoch spricht selbst Gauss, welcher den ersten Beweis dieses Satzes in seiner Inaugural-Dissertion (1799) gab,* denselben damals noch in der folgenden Weise aus: „Demonstatio nova thorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse.“ Ueber seine Beweisführung bemerkt Gauss: „Demonstrationem meam absque omni quantitatum imaginariarum subsidio absolvam, etsi eadem libertate, qua omnes recentiores analystae usi sunt, etiam mihi uti liceret.“ Besonders hervorzuheben ist aus jener Abhandlung die folgende Anmerkung (S. 6): „Si quantitates imaginariae omnino in analysi retineri debent (quod pluribus rationibus consultius videtur, quam ipsas abolere, modo satis solide stabiliantur): necessario tamquam aeque possibiles ac reales spectandae sunt; quam ob rem reales et imaginarias sub de nominatione communi quantitatum possibilium complecti mallem: contra, impossibilem dicerem quantitatem, quae conditionibus satisfacere debeat, quibus ne imaginariis quidem concessis satisfieri potest, attamen ita, ut phrasis haec idem significet ac si dicas, talem quantitatem in toto magnitudinum ambitu non dari. Hinc vero genus peculiare quantitatum formare, neutiquam concederem. Quodsi quis dicat, triangulum rectilineum aequilaterum rectangelum impossibile esse, nemo erit qui neget. At si tale triangulum impossibile tamquam novum triangulorum genus contemplari, aliasque triangulorum proprietates ad illud applicare voluerit, ecquis risum teneat? Hoc esset verbis ludere seu potius abuti. — Quamvis vero etiam summi mathematici saepius veritates, quae quantitatum ad quas spectant possibilitatem manifesto supponunt, ad tales quoque applicaverint quarum possibititas adhuc dubia erat; neque abnuerim, huius modi licentias plerumque ad solam formam et quasi velamen ratiociniorum pertinere, quod veri geometrae acies mox penetrare possit: tamen consultius, scientiaeque, quae tamquam perfectissimam claritatis et certitudinis exemplar merito celebratur, sublimitate magis dignum videtur, tales libertates aut omnino prosribere, aut saltem parcius neque alias ipsis uti, nisi ubi etiam minus exercitati perspicere valeant, rem etiam absque illarum subsidio etsi forsan minus beviter tamen aeque rigorose absolvi potuisse. — Ceterum haud negaverim, ea quae hic contra impossibilium abusum dixi, quodam respectu etiam contra imaginarias obiici posse: sed harum vindicationem nec non totius huius rei expositionem uberiorem ad aliam occasionem mihi reservo.“

In seiner Jubeläumsschrift:** „Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen“ (1849) sagt Gauss über die Fassung des oben angegebenen Satzes: „Was die äussere Einkleidung des Lehrsatzes selbst betrifft, so war die 1799 gebrauchte, dass die Function $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots$ sich in reelle Factoren erster oder zweiter Ordnung zerlegen lässt, damals deshalb gewählt, weil alle Einmischung imaginärer Grössen vermieden werden sollte. Gegenwärtig, wo der Begriff der complexen Grössen jedermann geläufig ist, scheint es angemessener, jene Form fahren zu lassen und den Satz so auszusprechen, dass jene Function sich in n einfache Factoren zerlegen lasse, wo dann die constanten Theile dieser Factoren nicht eben reelle Grössen zu sein brauchen, sondern für dieselben auch jede complexen Werthe zulässig sein müssen. Bei dieser Einkleidung gewinnt selbst der Satz noch an Allgemeinheit, weil dann die Beschränkung auf reelle Werthe auch bei den Coefficienten A, B, etc. nicht vorausgesetzt zu werden braucht, vielmehr jedwede Werthe für dieselben zulässig bleiben.“

Untersuchen wir nun, wodurch Gauss selbst, der 1799 es noch unentschieden lässt, ob die imaginären Grössen überhaupt in der Analysis zuzulassen sind, zu deren unbedingter Anerkennung veranlasst worden ist, so sehen wir, dass er in der Theorie der biquadratischen Reste die Nothwendigkeit erkannt hat, die Arithmetik durch die Einführung der imaginären Zahlen zu vervollständigen.

In der ersten Abhandlung über die Theorie der biquadratischen Reste (1825)*** sagt

*) Gauss Werke Bd. 3, S. 1—30.
**) Gauss Werke Bd. 3, S. 71.
***) Gauss Werke Bd. 2, S. 67.

http://rcin.org.pl

Gauss von der Theorie dieser und der cubischen Reste: „Quam quum inde ab anno 1805 perscrutari coepissemus, praeter ea, quae quasi in limine sunt posita, nonnulla quidem theoremata specialia se obstulerunt, tum propter simplicitatem suam, tum propter demonstrationum difficultatem valde insignia; mox vero comperimus, principia Arithmeticae hactenus usitata ad theoriam generalem stabiliendam neutiquam sufficere, quin potius hanc necessario postulare, ut campus Arithmeticae Sublimioris infinities quasi promoveatur, quod quomodo intelligendum sit, in continuatione harum disquisitionum clarissime elucebit.“

In der Anzeige, welche Gauss von dieser ersten Abhandlung gemacht hat (s. Göttingische gelehrte Anzeigen, 1825 April 11.),* hebt er hervor: „Die gegenwärtige Abhandlung ist keineswegs dazu bestimmt, den überaus reichhaltigen Gegenstand zu erschöpfen. Die Entwickelung der allgemeinen Theorie, welche eine ganz eigenthümliche Erweiterung des Feldes der höhern Arithmetik erfordert, bleibt vielmehr der künftigen Fortsetzung vorbehalten, während in diese erste Abhandlung diejenigen Untersuchungen aufgenommen sind, welche sich ohne eine solche Erweiterung vollständig darstellen liessen.“

Ehe jedoch die zweite Abhandlung von Gauss über die Theorie der biquadratischen Reste erschien (1831), war auch schon in der Analysis ein Ereigniss eingetreten, welches die rückhaltlose Anerkennung der imaginären Grössen erzwang: Abel und Jacobi hatten die Theorie der elliptischen Functionen geschaffen, welche erfordert, dass für das Argument beliebig reelle oder imaginäre Werthe anzunehmen sind, und welche durch ihre Eigenschaft, eine reelle und eine imaginäre Periode zu besitzen, die reellen, wie die imaginären Grössen als vollständig gleichberechtigt erscheinen lässt. Wollte man nicht die Theorie der elliptischen Functionen aufgeben, so musste man die imaginären Grössen beibehalten.

So sehen wir, dass der grosse Werth der imaginären Grössen für die Mathematik sich von Neuem auf zwei verschiedenen Wegen ergeben hat: in der Theorie der biquadratischen Reste und in der Theorie der elliptischen Functionen.

Wenn ich hier auch nicht entwickeln kann, wie die Theorie der biquadratischen Reste durch die Erweiterung des Zahlengebietes der Arithmetik an Allgemeinheit gewonnen hat, so ist es doch für meinen Zweck grade wichtig, aus der zweiten Abhandlung von Gauss über die Theorie der biquadratischen Reste** diejenigen Stellen anzuführen, welche sich auf die imaginären Zahlen beziehen.

In dem dreissigsten Abschnitt derselben heisst es: „Quem ad modum scilicet arithmetica sublimior in quaestionibus hactenus pertractatis inter solos numeros integros reales versatur, ita theoremata circa residua biquadratica tunc tantum in summa simplicitate ac genuina venustate resplendent, quando campus arithmeticae ad quantitates imaginarias extenditur, ita ut absque restrictione ipsius obiectum constituant numeri formae $a + bi$, denotantibus i, pro more*** quantitatem imaginariam $\sqrt{-1}$, atque a, b indefinite omnes numeros reales integros inter $-\infty$ et $+\infty$. Tales numeros vocabimus numeros integros complexos, ita quidem, ut reales complexis non opponantur, sed tamquam species sub his contineri censeantur. Commentatio praesens tum doctrinam elementarem de numeris complexis, tum prima initia theoriae residuorum biquadraticorum sistet, quam ab omni parte perfectam reddere in continuatione subsequente suscipiemus.“

Der achtunddreissigste Abschnitt hat folgenden Inhalt:

„Progredimur iam ad congruentiam numerorum secundum modulos complexos. Sed in limine huius disquisitionis convenit indicare, quomodo ditio quantitatum complexarum intuitui subiici possit.

*) Gauss Werke Band 2, S. 166.

**) Gauss Werke Band 2, S. 93.

***) Zuerst wendet Gauss diese Bezeichnung an in den Disquis. arith. Sect. VII, Art. 337; s. Gauss Werke Band 1, S. 414.

http://rcin.org.pl

Sicuti omnis quantitas realis per partem rectae utrinque infinitae ab initio arbitrario sumendam, et secundum segmentum arbitrarium pro unitate acceptam aestimandum exprimi, adeoque per punctum alterum repraesentari potest, ita ut puncta ab altera initii plaga quantitates positivas, ab altera negativas repraesentent: ita quaevis quantitas complexa repraesentari poterit per aliquod punctum in plano infinito, in quo recta determinata ad quantitates reales refertur, scilicet quantitas complexa $x + iy$ per punctum, cuius abscissa $= x$, ordinata (ab altera lineae abscissarum plaga positive, ab altera negative sumta) $= y$. Hoc pacto dici potest, quamlibet quantitatem complexam mensurare inaequalitatem inter situm puncti ad quod refertur atque situm puncti initialis, denotante unitate positiva deflexum arbitrarium determinatum versus directionem arbitrariam determinatam; unitate negativa deflexum aeque magnum versus directionem oppositam; denique unitatibus imaginariis deflexus aeque magnos versus duas directiones laterales normales.

Hoc modo metaphysica quantitatum, quas imaginarias dicimus, insigniter illustratur. Si punctum initiale per (o) denotatur, atque duae quantitates complexae m, m' ad puncta M, M' referuntur, quorum situm relative ad (o) exprimunt, differentia $m - m'$ nihil aliud erit nisi situs puncti M relative ad punctum M': contra, producto $m m'$ repraesentante situm puncti N relative ad (o), facile perspicies, hunc situm perinde determinari per situm puncti M ad (o), ut situs puncti M' determinatur per situm puncti cui respondet unitas positiva, ita ut haud inepte dicas, situs punctorum respondentium quantitatibus complexis $m m'$, m, m', 1 formare proportionem. Sed uberiorem huius rei tractationem ad aliam occasionem nobis reservamus. Difficultates, quibus theoria quantitatum imaginariarum involuta putatur, ad magnam partem a denominationibus parum idoneis originem traxerunt (quum adeo quidam usi sint nomine absono quantitatum impossibilium). Si, a conceptibus, quos offerunt varietates duarum dimensionum, (quales in maxima puritate conspiciuntur in intuitionibus spatii) profecti, quantitates positivas directas, negativas inversas, imaginarias laterales nuncupavissemus, pro tricis simplicitas, pro caligine claritas successisset."

Von hervorragender Bedeutung ist der Abschnitt, mit welchem Gauss die Anzeige dieser zweiten Abhandlung (Göttingische gelehrte Anzeigen. 1831 April 23.)* schliesst, welchen ich daher hier angebe:

„Wir haben nun noch einige allgemeine Anmerkungen beizufügen. Die Versetzung der Lehre von den biquadratischen Resten in das Gebiet der complexen Zahlen könnte vielleicht manchem, der mit der Natur der imaginären Grössen weniger vertraut und in falschen Vorstellungen davon befangen ist, anstössig und unnatürlich scheinen, und die Meinung veranlassen, dass die Untersuchung dadurch gleichsam in die Luft gestellt sei, eine schwankende Haltung bekomme, und sich von der Anschaulichkeit ganz entferne. Nichts würde ungegründeter sein, als eine solche Meinung. Im Gegentheil ist die Arithmetik der complexen Zahlen der anschaulichsten Versinnlichung fähig, und wenngleich der Verfasser in seiner diesmaligen Darstellung eine rein arithmetische Behandlung befolgt hat, so hat er doch auch für diese die Einsicht lebendiger machende und deshalb sehr zu empfehlende Versinnlichung die nöthigen Andeutungen gegeben, welche für selbstdenkende Leser zureichend sein werden. So wie die absoluten Zahlen durch eine in einer graden Linie unter gleichen Entfernungen geordnete Reihe von Punkten dargestellt werden, in der der Anfangspunkt die Zahl 0, der nächste die Zahl 1 u. s. w. vertritt; und so wie dann zur Darstellung der negativen Zahlen nur eine unbegrenzte Verlängerung dieser Reihe auf der entgegengesetzten Seite des Anfangspunktes erforderlich ist: so bedarf es zur Darstellung der complexen ganzen Zahlen nur des Zusatzes, dass jene Reihe als in einer bestimmten unbegrenzten Ebene befindlich angesehen, und parallel mit ihr auf beiden Seiten eine unbeschränkte Anzahl ähnlicher Reihen in gleichen Abständen von einander angenommen werde, so dass wir anstatt einer Reihe von Punkten ein System von Punkten vor uns haben, die sich auf eine zweite Art in Reihen von Reihen ordnen lassen, und zur Bildung

*) Gauss Werke Band 2, S. 174.

http://rcin.org.pl

einer Eintheilung der ganzen Ebene in lauter gleiche Quadrate dienen. Der nächste Punkt bei o in der ersten Nebenreihe auf der einen Seite der Reihe, welche die reellen Zahlen repräsentirt, bezieht sich dann auf die Zahl i, so wie der nächste Punkt bei o in der ersten Nebenreihe auf der andern Seite auf — i u. s. f. Bei dieser Darstellung wird die Ausführung der arithmetischen Operationen in Beziehung auf die complexen Grössen, die Congruenz, die Bildung eines vollständigen Systems incongruenter Zahlen für einen gegebenen Modulus u. s. f. einer Versinnlichung fähig, die nichts zu wünschen übrig lässt.

Von der andern Seite wird hierdurch die wahre Metaphysik der imaginären Grössen in ein neues helles Licht gestellt.

Unsere allgemeine Arithmetik, von deren Umfang die Geometrie der Alten so weit überflügelt wird, ist ganz die Schöpfung der neueren Zeit. Ursprünglich ausgehend von dem Begriff der abstracten ganzen Zahl hat sie ihr Gebiet stufenweise erweitert; zu den ganzen Zahlen sind die gebrochenen, zu den rationalen die irrationalen, zu den positiven die negativen, zu den reellen die imaginären hinzugekommen. Dies Vorschreiten ist immer anfangs mit furchtsam zögerndem Schritt geschehen. Die ersten Algebraisten nannten noch die negativen Wurzeln der Gleichungen falsche Wurzeln, und sie sind es auch, wo die Aufgabe, auf welche sie sich beziehen, so eingekleidet vorgetragen ist, dass die Beschaffenheit der gesuchten Grösse kein Entgegengesetztes zulässt. Allein so wenig man in der Allgemeinen Arithmetik Bedenken hat, die gebrochenen Zahlen mit aufzunehmen, obgleich es so viele zählbare Dinge giebt, wobei eine Bruchzahl ohne Sinn ist, eben so wenig durften in jener den negativen Zahlen gleiche Rechte mit den positiven deshalb versagt werden, weil unzählige Dinge kein Entgegengesetztes zulassen. Die Realität der negativen Zahlen ist hinreichend gerechtfertigt, da sie in unzähligen andern Fällen ein adaequates Substrat finden. Darüber ist man nun seit langer Zeit in Klarem: allein die den reellen Grössen gegenübergestellten imaginären — ehemals, und hin und wieder noch jetzt, obwohl unschicklich, unmögliche genannt — sind noch immer weniger eingebürgert als nur geduldet, und erscheinen also mehr als ein an sich inhaltleeres Zeichenspiel, dem man ein denkbares Substrat unbedingt abspricht, ohne doch den reichen Tribut, welchen dieses Zeichenspiel zuletzt in den Schatz der Verhältnisse der reellen Grössen steuert, verschmähen zu wollen.

Der Verfasser hat diesen hochwichtigen Theil der Mathematik seit vielen Jahren aus einem verschiedenen Gesichtspunkt betrachtet, wobei den imaginären Grössen eben so gut ein Gegenstand untergelegt werden kann, wie den negativen: es hat aber bisher an einer Veranlassung gefehlt, dieselbe öffentlich bestimmt auszusprechen, wenngleich aufmerksame Leser die Spuren davon in der 1799 erschienenen Schrift über die Gleichungen, und in der Preisschrift über Umbildung der Flächen leicht wiederfinden werden. In der gegenwärtigen Abhandlung sind die Grundzüge davon kurz angegeben, sie bestehen in Folgendem.

Positive und negative Zahlen können nur da eine Anwendung finden, wo das Gezählte ein Entgegengesetztes hat, was mit ihm vereinigt gedacht der Vernichtung gleich zu stellen ist. Genau besehen findet diese Voraussetzung nur da statt, wo nicht Substanzen (für sich denkbare Gegenstände) sondern Relationen zwischen je zwei Gegenständen das Gezählte sind. Postulirt wird dabei, dass diese Gegenstände auf eine bestimmte Art in einer Reihe geordnet sind z. B. A, B, C, D . . . und dass die Relation des A zu B als der Relation des B zu C u. s. w. gleich betrachtet werden kann. Hier gehört nun zu dem Begriff der Entgegensetzung nichts weiter als der Umtausch der Relation, so dass wenn die Relation (oder der Uebergang) von A zu B als + 1 gilt, die Relation von B zu A durch — 1 dargestellt werden muss. Insofern also eine solche Reihe auf beiden Seiten unbegrenzt ist, repräsentirt jede reelle ganze Zahl die Relation eines beliebig als Anfang gewählten Gliedes zu einem bestimmten Gliede der Reihe.

Sind aber die Gegenstände von solcher Art, dass sie nicht in Eine, wenngleich unbegrenzte, Reihe geordnet werden können, sondern sich nur in Reihen von Reihen ordnen lassen, oder was dasselbe ist, bilden sie eine Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen; verhält es sich dann mit den Relationen einer Reihe zu einer andern oder den Uebergängen aus

http://rcin.org.pl

einer in die andere auf eine ähnliche Weise wie vorhin mit den Uebergängen von einem Gliede einer Reihe zu einem andern Gliede derselben Reihe, so bedarf es offenbar zur Abmessung des Ueberganges von einem Gliede des Systems zu einem andern ausser den vorigen Einheiten $+1$ und -1 noch zweier andern unter sich auch entgegengesetzten $+i$ und $-i$. Offenbar muss aber dabei noch postulirt werden, dass die Einheit i allemal den Uebergang von einem gegebenen Gliede einer Reihe zu einem bestimmten Gliede der unmittelbar angrenzenden Reihe bezeichne. Auf diese Weise wird also das System auf eine doppelte Art in Reihen von Reihen geordnet werden können.

Der Mathematiker abstrahirt gänzlich von der Beschaffenheit der Gegenstände und dem Inhalt ihrer Relationen; er hat es blos mit der Abzählung und Vergleichung der Relationen unter sich zu thun: insofern ist er eben so, wie er den durch $+1$ und -1 bezeichneten Relationen, an sich betrachtet, Gleichartigkeit beilegt, solche auf alle vier Elemente $+1$, -1, $+i$ und $-i$ zu erstrecken befugt.

Zur Anschauung lassen sich diese Verhältnisse nur durch eine Darstellung im Raume bringen, und der einfachste Fall ist, wo kein Grund vorhanden ist, die Symbole der Gegenstände anders als quadratisch anzuordnen, indem man nämlich eine unbegrenzte Ebene durch zwei Systeme von Parallellinien, die einander rechtwinklig durchkreuzen, in Quadrate vertheilt, und die Durchschnittspunkte zu den Symbolen wählt. Jeder solche Punkt A hat hier vier Nachbarn, und wenn man die Relation des A zu einem benachbarten Punkte durch $+1$ bezeichnet, so ist die durch -1 zu bezeichnende von selbst bestimmt, während man, welche der beiden andern man will, für $+i$ wählen, oder den sich auf $+i$ beziehenden Punkt nach Gefallen rechts oder links nehmen kann. Dieser Unterschied zwischen rechts und links ist, so bald man vorwärts und rückwärts in der Ebene, und oben und unten in Beziehung auf die beiden Seiten der Ebene einmal (nach Gefallen) festgesetzt hat, in sich völlig bestimmt, wenn wir gleich unsere Anschauung dieses Unterschiedes andern nur durch Nachweisung an wirklich vorhandenen materiellen Dingen mittheilen können. (Beide Bemerkungen hat schon Kant gemacht, aber man begreift nicht, wie dieser scharfsinnige Philosoph in der ersten einen Beweis für seine Meinung, dass der Raum nur Form unserer Anschauung sei, zu finden glauben konnte, da die zweite so klar das Gegentheil, und dass der Raum unabhängig von unserer Anschauungsart eine reelle Bedeutung haben muss, beweiset.) Wenn man aber auch über letzteres sich entschlossen hat, sieht man, dass es doch von unserer Willkür abhing, welche von den beiden in Einem Punkte sich durchkreuzenden Reihen wir als Hauptreihe, und welche Richtung in ihr wir als auf positive Zahlen sich beziehend ansehen wollten; man sieht ferner, dass wenn man die vorher als $+i$ behandelte Relation für $+1$ nehmen will, man nothwendig die vorher durch -1 bezeichnete Relation für $+i$ nehmen muss. Das heisst aber in der Sprache des Mathematiker, $+i$ ist mittlere Proportionalgrösse zwischen $+1$ und -1 oder entspricht dem Zeichen $\sqrt{-1}$: wir sagen absichtlich nicht die Proportionalgrösse, denn $-i$ hat offenbar gleichen Anspruch. Hier ist also die Nachweisbarkeit einer anschaulichen Bedeutung von $\sqrt{-1}$ vollkommen gerechtfertigt, und mehr bedarf es nicht, um diese Grösse in das Gebiet der Gegenstände der Arithmetik zuzulassen.

Wir haben geglaubt, den Freunden der Mathematik durch diese kurze Darstellung der Hauptmomente einer neuen Theorie der sogenannten imaginären Grössen einen Dienst zu erweisen. Hat man diesen Gegenstand bisher aus einem falschen Gesichtspunkte betrachtet, und eine geheimnissvolle Dunkelheit dabei gefunden, so ist dieses grossentheils den wenig schicklichen Benennungen zuzuschreiben. Hätte man $+1$, -1, $\sqrt{-1}$ nicht positive, negative, imaginäre (oder gar unmögliche) Einheit, sondern etwa directe, inverse, laterale Einheit genannt, so hätte von einer solchen Dunkelheit kaum die Rede sein können. Der Verfasser hat sich vorbehalten, den Gegenstand, welcher in der vorliegenden Abhandlung eigentlich nur gelegentlich berührt ist, künftig vollständiger zu bearbeiten, wo dann auch die Frage, warum die Relation zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen

http://rcin.org.pl

darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Grössen liefern können, ihre Beantwortung finden wird.«

Obwohl nun Gauss, noch lange, nachdem er dieses geschrieben hatte, der Wissenschaft erhalten blieb,*) so hat er doch sein Vorhaben nicht ausgeführt, und auch in den Bruchstücken zur Theorie der biquadratischen Reste und zur Theorie der complexen Zahlen, welche aus seinem Nachlasse veröffentlicht sind,**) ist dieser Gegenstand nicht weiter berührt.

In welcher Weise aber Herr Weierstrass die von Gauss angeregte Frage nach der Anzahl der von einander unabhängigen Einheiten in der allgemeinen Arithmetik beantwortet hat, und wie die Theorie der complexen Zahlen überhaupt durch Herrn Weierstrass vervollständigt ist, werde ich im nächsten Abschnitte entwickeln; auf die geometrische Bedeutung dieser Frage gehe ich in dem geometrischen Theile dieser Abhandlung näher ein.

So haben wir gesehen, dass der Zahlenkreis der Arithmetik allmälig durch Einführung neuer Einheiten erweitert worden ist, und dass diese Einführung sowohl durch die Algebra (zur Aufrechterhaltung des Satzes, dass jede Gleichung n. Grades n Wurzeln hat), wie durch die Arithmetik (zur Begründung einer allgemeinen Theorie der biquadratischen Reste), und durch die Analysis (in Folge der Theorie der elliptischen Functionen) veranlasst worden ist.

Diese Erweiterung des Gebietes der Arithmetik ist aber allein abhängig gewesen von dem Grade der Anschaulichkeit und Brauchbarkeit der neu einzuführenden Zahlen, und ausserdem ist wohl das Alter ihres Gebrauches nicht ohne Einfluss für die Anerkennung gewesen.

So finden wir, dass Cauchy, der sich die grössten Verdienste in der Theorie der Functionen von imaginären Veränderlichen erworben hat, die negativen Zahlen gleichzeitig mit den positiven in die Mathematik einführt, und beide Arten von Zahlen unter dem Namen „Zahlengrössen“ zusammenfasst, und sie als reelle oder mögliche Zahlen bezeichnet, während er die imaginären Zahlen „als Symbole, die an sich keine Bedeutung haben,“ betrachtet (s. die erste Note zur algebraischen Analysis: „Ueber die Theorie der positiven und negativen Grössen“); selbst noch im Jahre 1844 hat Cauchy dieselbe Ansicht, welche er in den „Exercices d'analyse“ in folgender Weise ausspricht:***)

„Toute équation imaginaire n'est autre chose que la répresentation symbolique de deux équations entre quantités réelles. L'emploi des expressions imaginaires, en permettant de remplacer deux équatians par une seule, offre souvent le moyen de simplifier les calculs et d'écrire sous une forme abrégée des résultats fort compliqués. Tel est même le motif principal pour le quel on doit continuer à se servir de ces expressions, qui prises à la lettre et interprétées d' aprés les conventions généralement établies, ne signifient rien et n'ont pas de sens. Le signe $\sqrt{-1}$ n'est en quelque sorte qu'un outil, un istrument de calcul, qui peut être employé avec succès dans un grand nombre de cas pour rendre beaucoup plus simples non seulement les formules analytiques, mais encore les méthodes à l'aide desquelles on parvient à les établir.“

Erst nachdem die imaginären Zahlen vollständig in das Gebiet der Arithmetik aufgenommen waren, und man sich überzeugt hatte, dass durch ihre Einführung kein Widerspruch mit den Gesetzen, welche für die reellen Zahlen giltig sind, entsteht, haben die Mathematiker den allgemeineren Standpunkt eingenommen, dass die Berechtigung zur Einführung einer Zahl in die Arithmetik allein auf der Definition dieser Zahl beruht.

Wie aber aus diesem Gesichtspunkte die Arithmetik sich gestaltet, wird der Gegenstand des folgenden Abschnittes sein.

---

*) Gauss starb den 23. Februar 1855.

**) Gauss Werke Band 2, S. 313 und 387.

***) Exercices d'analyse Band 3, S. 361.

http://rcin.org.pl

§. 2.

Der Begriff der ganzen Zahl und die Theorie der complexen Zahlen.

Wenn ein Gegenstand aus mehreren Bestandtheilen zusammengesetzt ist, so können die Bestandtheile, die Elemente, desselben entweder von gleicher Art, oder sie können von verschiedener Art sein. Besteht ein Gegenstand nur aus Elementen gleicher Art, und abstrahiren wir davon, was diese Elemente bedeuten, so hat man von der Menge dieser eine Vorstellung durch die Zahl.

Das Zählen der Elemente eines solchen Gegenstandes geschieht nun dadurch, dass man bei einem der Elemente verweilt, und dasselbe mit dem Ausdrucke Eins fixirt, dann zu einem andern übergeht und dieses als gleichartig zu dem früheren hinzufügt; war dieses Element das einzige, welches dem Gegenstande nach Wegnahme des ersteren übrig blieb, so sagen wir, der Gegenstand besteht aus zwei Elementen u. s. w.

Hieraus ergiebt sich: Die Zahl ist die zusammengesetzte Vorstellung von Eins und Eins u. s. w. Man bildet nun alle Zahlen mit einer ganz abstracten Einheit. Die einzelnen Zahlen erscheinen uns auf diese Weise in eine Reihe geordnet, der Art, dass jede Zahl aus der nächst vorhergehenden durch Hinzufügung von Eins entsteht. Wir unterscheiden jetzt zunächst gleiche und ungleiche Zahlen; gleich sind zwei Zahlen, wenn zu jedem Element der einen Zahl ein Element der andern gehört; ungleich sind zwei Zahlen, wenn bei dieser Gegenüberstellung der einzelnen Elemente bei der einen Zahl ein oder mehrere Elemente übrig bleiben, und zwar heisst diese dann die grössere von beiden: sie enthält mehr Einheiten als die andere.

Bei dieser Feststellung des Begriffes der Zahl habe ich im Wesentlichen dieselben Worte angewandt, welcher Herr Weierstrass sich zu diesem Zwecke in seiner in der Einleitung bezeichneten Vorlesung bediente; auch im Folgenden werde ich bei Anführung einzelner Theile aus jener Vorlesung möglichst den Wortlaut derselben festhalten.

Dem Begriffe der Zahl liegt die Annahme von der Existenz gleichartiger Dinge zu Grunde. Die Ansicht Riemann's über die Berechtigung dieser Annahme ist von ihm ausgesprochen in dem folgenden Abschnitte: *

„Grössenbegriffe sind nur da möglich, wo sich ein allgemeiner Begriff vorfindet, d. i. der einer Mannigfaltigk
der verschiedene Bestimmungsweisen zulässt. Je nachdem unter diesen Bestimmungsweisen von einer zu einer andern ein stetiger Uebergang stattfindet oder nicht, bilden sie eine stetige oder discrete Mannigfaltigkeit; die einzelnen Bestimmungsweisen heissen im erstern Fall Punkte, im letztern Elemente dieser Mannigfaltigkeit. Begriffe, deren Bestimmungsweisen eine discrete Mannigfaltigkeit bilden, sind so häufig, dass sich für beliebig gegebene Dinge, wenigstens in den gebildeteren Sprachen immer ein Begriff auffinden lässt, unter welchem sie enthalten sind (und die Mathematiker konnten daher in der Lehre von den discreten Grössen unbedenklich von der Forderung ausgehen, gegebene Dinge als gleichartig zu betrachten), dagegen sind die Veranlassungen zur Bildung von Begriffen, deren Bestimmungsweisen eine stetige Mannigfaltigkeit bilden, im gemeinen Leben so selten, dass die Orte der Sinnengegenstände und die Farben wohl die einzigen einfachen Begriffe sind, deren Bestimmungsweisen eine mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit bilden. Häufigere Veranlassung zur Erzeugung und Ausbildung dieser Begriffe findet sich erst in der höhern Mathematik.

Bestimmte durch ein Merkmal oder eine Grenze unterschiedene Theile einer Mannigfaltigkeit heissen Quanta. Ihre Vergleichung der Quantität nach geschieht bei den discreten Grössen durch Zählung, bei den stetigen durch Messung. Das Messen besteht in einem Aufeinanderlegen der zu vergleichenden Grössen; zum Messen wird also ein Mittel erfordert,

*) S. §. 1 der Habilitationsschrift Riemann's: „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" im XIII. Bd. der Abhandlungen der Königl. Gesellschaft d. W. zu Göttingen.

http://rcin.org.pl

die eine Grösse als Massstab für die andere fortzutragen. Fehlt dieses, so kann man zwei Grössen nur vergleichen, wenn die eine ein Theil der andern ist, und auch dann nur das Mehr oder Minder, nicht das Wieviel entscheiden.«

Diesen Abschnitt habe ich hier vollständig aufgenommen, da ich auch auf die Elemente der Geometrie eingehen werde.

Der Begriff der Zahl ist uns also gegeben durch die Zusammensetzung von Gegenständen aus Elementen gleicher Art. Ist nun aber ein Gegenstand aus verschiedenartigen Elementen zusammengesetzt, so muss man, um eine Vorstellung von dieser Zusammensetzung bewirken zu können, angeben, welche Arten von Elementen vorkommen, und wie viele Elemente von jeder Art vorhanden sind. Hierdurch gelangt man zu dem Begriffe einer complexen Zahl: sie ist die zusammengesetzte Vorstellung von verschiedenartigen Gruppen unter einander gleicher Elemente.

Zwei complexe Zahlen werden gleich genannt, wenn die Elemente jeder einzelnen Art in gleicher Anzahl in ihnen vorkommen.

Die erste Aufgabe der Arithmetik ist nun die Ableitung von Rechnungsregeln für Zahlen, welche nur aus einem Grundelement gebildet sind, und welche gewöhnlich ganze (positive) Zahlen genannt werden.

Haben wir zwei ganze Zahlen mit demselben Grundelement, welche man z. B. durch grade Linien verwirklicht denken kann, so werden wir aus ihnen eine neue Zahl zusammensetzen können, welche sämmtliche Elemente jener beiden Zahlen enthält; hierdurch ist der Begriff der Addition gegeben: sie besteht in der Vereinigung sämmtlicher Elemente beider Zahlen zu einer einzigen. Diese Operation, welche zunächst in unserer Vorstellung beruht, wird stets ausführbar sein.

Wenn nun ferner α eine ganze Zahl ist mit einem beliebigen Grundelemente, so bedeutet die Multiplication von α mit einer benannten oder unbenannten Zahl n: man soll an Stelle jedes der Elemente, aus denen α gebildet ist, n setzen, z. B. 3 mal 4 bedeutet die Zahl, welche so aus 4 gebildet ist, wie 3 aus der Einheit.

Bei der Multiplication ganzer Zahlen steht es frei, die Factoren zu vertauschen;* ausserdem gilt für ganze Zahlen der Satz, dass eine Summe mit einer Zahl multiplicirt wird, indem man jedes Glied der Summe mit der Zahl multiplicirt. Auch die Multiplication wird für alle ganzen Zahlen stets ausführbar sein.

Nicht ist dies der Fall bei den umgekehrten Rechnungsarten, der Subtraction und Division. Eine Zahl x von einer Zahl y subtrahiren heisst: diejenige Zahl z bestimmen, welche zu x addirt y ergiebt; dies wird also nicht mehr möglich sein, wenn x grösser als y ist. Eine Zahl x in eine Zahl y dividiren heisst: diejenige Zahl z bestimmen, welche mit x multiplicirt y ergiebt; dies ist nur ausführbar in ganzen Zahlen, wenn y grade ein ganzes Vielfaches von x ist.

Wird jetzt aber die Forderung gestellt, dass die Subtraction und Division auch für beliebige ganze Zahlen x und y stets ausführbar sein sollen, so kann derselben nicht entsprochen werden, wenn nur ganze (positive) Zahlen angenommen werden. Um die Subtraction allgemein aufrecht zu erhalten, muss man die negativen Zahlen in die Arithmetik einführen, dieselben sind dann von derselben Berechtigung, wie die positiven Zahlen, und diese Berechtigung beruht allein auf ihrer Definition, welche eben dadurch gegeben ist, dass die Subtraction stets giltig bleiben soll, so dass zu jeder positiven Zahl eine entgegengesetzte (negative) Zahl gehört, welche zu ihr addirt Null ergiebt. Hierbei ist es für die Arithmetik ganz gleichgiltig, ob die negativen Zahlen einer Veranschaulichung fähig sind oder nicht. Derselbe Gesichtspunkt gilt überhaupt für die Einführung neuer Zahlen in die Arithmetik, indem hierbei allein die Definition der Zahlen massgebend ist.

Da ferner auch die Division für beliebige ganze Zahlen bestehen

---

*) S. §. 1 und 2 der Vorlesungen über Zahlentheorie von Dirichlet. Herausgegeben von Dedekind.

bleiben soll, so muss man, damit der Begriff der Zahl dieser Forderung genügen kann, zu jedem Elemente noch andere hinzunehmen, so dass 2, 3, 4 etc. dieser jenes eine vertreten können; also wir müssen die gebrochenen Zahlen zulassen, deren Begriff gegeben ist durch den Begriff des genauen Theiles eines Ganzen: man sagt ein Element ist genauer Theil eines andern, wenn dieses aus einer ganzen Anzahl dem ersten gleichen Elementen zusammengesetzt werden kann.

Wenn wir nun Zahlen annehmen, welche aus einer Einheit und beliebigen genauen Theilen derselben gebildet sind, so müssen wir, um die Subtraction auch für diese Zahlen allgemein beibehalten zu können, die entsprechenden Zahlen nicht nur aus der negativen Einheit, sondern auch aus den genauen Theilen derselben herstellen.

Die so definirten Zahlen werden nun gleich von Anfang an in die Arithmetik eingeführt; und hierdurch entsteht die neue Frage, wie werden sich die Rechnungsoperationen, welche für die ganzen (positiven) Zahlen aufgestellt sind, für diese neu eingeführten Zahlen gestalten?

Hier wird nun wieder festgesetzt, dass die Rechnungsoperationen, welche für ganze (positive) Zahlen angenommen sind, auch für diese neuen Zahlen giltig bleiben sollen; und es werden die Rechnungsregeln für diese aus den Gesetzen der Rechnungsoperationen der ganzen (positiven) Zahlen abgeleitet.

Es wird nun das Rechnen mit Zahlen, welche nur aus einem Grundelement und beliebigen genauen Theilen desselben gebildet sind, hier vorausgesetzt.

Hervorheben will ich nur, dass es bei der Einführung derselben nöthig ist, den Begriff der Gleichheit solcher Zahlen festzustellen. Dies geschieht durch Herrn Weierstrass in der folgenden Weise:

„Wenn irgend eine Zahl aus einem Grundelement und genauen Theilen desselben zusammengesetzt ist, so kann man mit derselben Veränderungen vornehmen, ohne dass die Geltung der Zahl sich ändert; denn man kann, wenn von irgend einem Elemente eine bestimmte Anzahl α vorkommt, diese α Elemente ersetzen durch ein einziges, und umgekehrt kann man jedes Element vertreten lassen durch eine Reihe anderer unter einander gleicher Elemente.“

Es werden hiernach zwei Zahlen, welche aus demselben Grundelement und genauen Theilen desselben gebildet sind, als gleich betrachtet, wenn sie durch Veränderungen der angegebenen Art so umgeformt werden können, dass beide genau dieselben Elemente und jedes in gleicher Anzahl enthalten.“

Wenn man nun Zahlen, die aus einer Einheit und genauen Theilen derselben bestehen, addirt, d. h. sämmtliche Elemente derselben zu einer einzigen Zahl vereinigt, so wird man mit ihrer Summe ebenfalls die gestatteten Umformungen ausführen können, und jede sich so ergebende Zahl ist in gleicher Weise als die Summe der zu addirenden Zahlen zu betrachten. Hieraus folgt, dass, wenn man dieselben in einzelne Gruppen zusammenfügt, oder ihre Elemente in beliebiger Weise in Gruppen zusammennimmt, und dann diese Gruppen addirt, man stets zu demselben Resultate gelangt.

Um nun Zahlen, denen dieselbe Haupteinheit zu Grunde liegt, mit einander zu vergleichen, bringt man sie auf solche Formen, dass sie aus Vielfachem derselben Elemente zusammengesetzt sind; dies erreichen wir bei den ganzen Zahlen durch Darstellung derselben nach unserm Zahlensystem, bei den gebrochenen Zahlen dadurch, dass wir sie auf einen gemeinschaftlichen Nenner bringen. Will man aber auch bei diesen stets eine bestimmte Form anwenden, z. B. ihre Darstellung als Decimalbrüche, so wird dies nicht immer möglich sein, ohne Zahlformen zuzulassen, in denen die Anzahl der Elemente eine unendliche ist. Um nun aber zu zeigen, dass eine Zahl, die aus einer endlichen Anzahl von Elementen gebildet ist, gleich einer Zahl ist, in welcher die Anzahl der Elemente unendlich ist, reicht der Begriff der Gleichheit für Zahlen mit endlicher Anzahl von Elementen nicht aus, indem man dann nicht die Gleichheit durch eine endliche

http://rcin.org.pl

Anzahl von Transformationen nachweisen kann, und eine unendliche Anzahl von Transformationen unausführbar ist. Um nun auch die Gleichheit von zwei Zahlen zu definiren, wenn nicht in beiden die Anzahl der Elemente eine endliche ist, schliesst Herr Weierstrass so:

„Vergleicht man eine Zahl a mit einer Zahl b, welche letztere nur aus einer endlichen Anzahl von Elementen gebildet ist, so wird b Bestandtheil von a genannt, wenn die Zahl a so umgeformt werden kann, dass sie alle Elemente von b enthält und ausserdem noch andere Elemente. Hieraus ergiebt sich auch, in wiefern man zwei Zahlen als gleich betrachten kann, selbst wenn sie nicht durch eine endliche Anzahl von Transformationen in einander übergeführt werden können. Damit aber zwei Zahlen vergleichbar sind, muss zuerst festgestellt werden, dass dieselben in Bezug auf ihre Einheit endlich sind. Eine Zahl a ist endlich, wenn es überhaupt irgend eine aus einer endlichen Anzahl von Elementen gebildete Zahl giebt, die nicht in a enthalten ist. Dies ist die Definition der Endlichkeit einer Zahl; die Entscheidung aber darüber, ob eine Zahl endlich ist oder nicht, wird in folgender Weise getroffen: ‚eine Zahl a ist endlich, wenn es irgend eine aus einer endlichen Anzahl von Elementen gebildete Zahl b giebt, so dass jede aus den Elementen von a gebildete Zahl in b enthalten ist (oder kleiner als b ist)'. Es werden jetzt zwei Zahlen a und a', welche in Bezug auf ihre Einheit endlich sind, gleich genannt, wenn jede dritte Zahl, die aus einer endlichen Anzahl von Elementen der einen Zahl a gebildet ist, auch ein Bestandtheil der andern Zahl a' ist; bei dieser Erklärung der Gleichheit braucht die Anzahl der Elemente in a und a' keine endliche zu sein."

Wenn nun der Grund für die Zulassung von Zahlen, die aus einer unendlichen Anzahl von Elementen gebildet werden, allein hierbei darin bestand, die Vergleichung der Zahlen, welche aus einer Haupteinheit und den genauen Theilen derselben gebildet sind, zu erleichtern, so wird man hingegen gezwungen, Zahlen mit unendlicher Anzahl von Elementen einzuführen, wenn man eine Zahl x so bestimmen will, dass $xx = y$ wird, wo y eine beliebige ganze (positive) Zahl vorstellt; es sei nämlich die Einheit, welche y zu Grunde liegt, mit e bezeichnet, so soll x so gefunden werden, dass $x\,(xe) = y\,(e)$ wird, und dies kann, wenn y nicht grade eine Quadratzahl ist, durch keine Zahl erfüllt werden, welche aus einer endlichen Anzahl von Elementen zusammengesetzt ist. So gelangt man zu dem Begriffe der irrationalen Zahl, deren Einführung als unendliche Reihe nichts entgegensteht; denn da man angeben kann, welche Elemente und wie oft die einzelnen Elemente in ihr vorkommen (indem jedes Element nur in endlicher Anzahl in ihr enthalten ist), und jede aus einer endlichen Anzahl von ihnen gebildete Summe kleiner ist als eine angebbare Zahl, so hat die irrationale Zahl eine ganz bestimmte Bedeutung.

Da ich bei der historischen Uebersicht über die Entwickelung der Arithmetik auf die irrationalen Zahlen nicht eingegangen bin, so will ich hier nicht unterlassen, kurz auf den Ursprung derselben hinzuweisen. Die irrationalen Zahlen haben ihre Entstehung in der Geometrie gefunden. Dieselben werden schon von Plato* einer besonderen Betrachtung unterzogen; eine umfassende Behandlung des Irrationalen enthält das zehnte Buch der Elemente des Euclid. Herr Nesselmann sagt über dasselbe:**

„Dieses Buch, an Umfang das grösste, an Inhalt das schwierigste der Euclidischen Elemente, handelt in eigenthümlicher Weise von den Irrationalgrössen, indem alle nur als algebraische Formeln bekannte irrationale Zahlenausdrücke hier in ganz geometrischer Vorstellungsweise als Irrationallinien betrachtet werden. Das Buch beginnt mit folgenden Definitionen:

Commensurable und incommensurable Grössen, (*σύμμετρα, ἀσύμμετρα*); Grössen sind commensurabel, wenn sie von einem und demselben Masse gemessen werden,

---

*) S. Hippias maior p. 303. B. Plato lässt den Sokrates sagen: *ἢ οὐδὲν κωλύει, ὥσπερ ἀρτίων ὄντων τινῶν ἀμφοτέρων τάχα μὲν ἑκάτερα περιττὰ εἶναι, τάχα δ' ἄρτια, καὶ αὖ ἀρρήτων ἑκατέρων ὄντων τάχα μὲν ῥητὰ τὰ συναμφότερα εἶναι, τάχα δ' ἄρρητα, καὶ ἄλλα μυρία τοιαῦτα, ἃ δὴ καὶ ἐγὼ ἔφην ἐμοὶ προφαίνεσθαι;* Während nämlich $a + \sqrt{b}$ und $a - \sqrt{b}$ einzeln irrational sind, ist die Summe beider rational.

**) S. Nesselmann: Die Algebra der Griechen, S. 165.

http://rcin.org.pl

oder wie hieraus gefolgert wird, wenn sie sich zu einander verhalten, wie eine Zahl zu einer Zahl. Im entgegengesetzten Falle sind sie incommensurabel. Z. B. a und $\sqrt{b}$ sind, wenn b kein Quadrat ist, incommensurable Grössen.

In Potenz commensurabel (*δυνάμει σύμμετροι*) sind zwei Linien, wenn ihre Quadrate von demselben Flächenraum gemessen werden, im entgegengesetzten Falle sind sie in Potenz incommensurabel. Z. B. a und $\sqrt{b}$ sind immer in Potenz commensurabel, dagegen a und $\sqrt[n]{b}$, wenn $n > 2$, oder a und $b + \sqrt{c}$ in Potenz incommensurabel.

Dieses vorausgesetzt, wird gezeigt, dass einer angenommenen geraden Linie unzählige andere geraden Linien commensurabel und incommensurabel sind, theils in Länge und Potenz, theils in Potenz allein. Diese angenommene gerade Linie heisse rational (*ῥητή*).

Rational heissen ferner alle Linien, die dieser entweder in Länge und Potenz, oder bloss in Potenz commensurabel sind.

Irrational (*ἄλογοι*) aber, die ihr incommensurabel sind.

Es ist zu bemerken, dass Euclides den Begriff der rationalen und irrationalen Grösse anders nimmt, als wir und Diophant, indem wir irrational nennen, was Euclides incommensurabel nennt. Der Unterschied rührt daher, dass Euclides die Rationalität auch auf die bloss in Potenz commensurabeln Grössen ausdehnt. Daher ist ihm das Verhältniss $a : \sqrt{b}$ rational, weil die Quadrate beider Ausdrücke commensurabel werden.«

Nachdem nun Herr Nesselmann den Inhalt dieses Buches von Euclid, ohne etwas Wesentliches zu übergehen, dargestellt hat, fügt er die folgende Schlussbemerkung hinzu:

„Kaum habe ich nöthig, den Leser auf den hohen Grad der Abstraction, welchen die Behandlung dieses Gegenstandes als einer geometrischen Theorie bei den der algebraischen Formelnsprache entbehrenden Griechen voraussetzt und verräth, aufmerksam zu machen. Mehr als irgend eine von den Griechen bearbeitete Methode zeugt eben die Theorie der Irrationalgrössen für das ungeheure Uebergewicht, welches in ihrer Vorstellungsweise die Geometrie über die Arithmetik behauptete. Diese Formeln, welche wir meistens aus sehr complicirten und in einander geschobenen Quadratwurzeln gebildet in der eben gegebenen Darstellung vor Augen gestellt haben, behandelt Euclid, auf den einfachen und einzigen Begriff der Commensurabilität gestützt, ohne auch nur einer Quadratwurzel zu erwähnen.“

Nachdem nun die Lehre des Irrationalen beinahe achtzehn Jahrhunderte brach gelegen, finden wir die Fortbildung derselben wohl zuerst wieder aufgenommen durch Lucas de Burgo S. S.* In seiner Arithmetik giebt dieser Mathematiker Vorschriften de approximatione radicum in Surdis.**

Kästner*** giebt ein Beispiel an, welches Lucas ausgeführt hat: „Aus 6 ist die erste Näherung zur Wurzel $2\frac{1}{2}$, wovon das Quadrat $6\frac{1}{4}$ ist; man dividire den Ueberschuss $\frac{1}{4}$ durch das Doppelte der ersten Näherung 5, das Resultat $\frac{1}{20}$ zieht man von $2\frac{1}{2}$ ab, so erhält man die zweite Näherung $2\frac{9}{20}$. In gleicher Weise findet man dann mit Hilfe dieser die dritte Näherung $2\frac{881}{1960}$, und ebenso die folgenden.

Das Verfahren des Lucas besteht also darin, dass er $\sqrt{a} = n - x$ setzt, und unter Vernachlässigung von x^2 bestimmt $x = \frac{n^2 - a}{2n}$.“

Solche Näherungsmethoden wurden aber überflüssig, als man durch die Einführung der Decimalbrüche † ein einfaches Mittel erlangte, die Näherungswerthe zu bestimmen. Wallis giebt überhaupt als das älteste Beispiel, das ihm für die Anwendung der Decimalbrüche in der Arithmetik bekannt ist, eine Regel für die Ausziehung der Quadratwurzeln

---

*) S. Nesselmann: Die Algebra der Griechen. S. 183.

**) Die Bezeichnung einer Irrationalzahl als numerus surdus kommt (1202) bei Leonardo (liber abaci fol. 160) vor und ist noch im achtzehnten Jahrhundert gebräuchlich gewesen. S. Baltzer's El. d. M. Th. I, S. 105.

***) S. Kästner's Gesch. d. M. Th. I, S. 68.

†) Regiomontan vertauschte (1464) die von den Griechen herstammenden Sexagesimalbrüche mit den Decimalbrüchen, wozu er durch die Trigonometrie veranlasst wurde. S. Kästner G. d. M. Th. I, S. 45. In allgemeineren Gebrauch sind die Decimalbrüche seit der Mitte des 16. Jahrhunderts gekommen.

http://rcin.org.pl

durch Näherung an, welche von Wilhelm Buckley, der eine Arithmeticam memorativam in lateinischen Versen verfasst hat, aufgestellt ist.* Diese lautet:

„Quadrato numero senas praefigito ciphras**
Producti quadri radix per mille secetur.
Integra dat quotiens, et pars ita recte manebit
Radici ut verae, ne pars millesima desit.“

Aus demselben Grunde nun, aus welchem wir die irrationalen Zahlen bei den Quadratwurzeln eingeführt haben, sind wir veranlasst, auch bei beliebigen andern Wurzeln dieselben gelten zu lassen; die Bedeutung der irrationalen Zahl bleibt für die verschiedenen Wurzeln dieselbe. Wir haben gesehen, dass bei Zahlen mit einem Grundelement, bei denen die Anzahl der Elemente eine endliche ist, eine willkürliche Reihenfolge dieser bei der Summation stets zu gleichen Resultaten führt; dies ist in dem Begriffe der Gleichheit solcher Zahlen begründet. Ebenso kann man auch bei einer unendlichen Reihe von Zahlen (in denen jedes einzelne Element nur in endlicher Anzahl vertreten ist), welche eine endliche Summe hat, wie dies bei den irrationalen Zahlen der Fall ist, ihre Elemente willkürlich in Gruppen zusammenfassen, und dann diese Gruppen addiren; wenn man irgend solche Gruppen bildet, entweder Gruppen aus endlicher Anzahl von Gliedern und eine aus unendlicher Anzahl, oder Gruppen, in deren jeder unendlich viele Glieder enthalten sind, oder auch unendlich viele Gruppen, jede mit endlicher Anzahl von Gliedern, so hat jede einzelne Gruppe eine endliche Summe und die Summe dieser Summen ist endlich und gleich der Summe der ursprünglichen Reihe. Dass zunächst jede Gruppe eine endliche Summe hat, folgt daraus, dass die Bedingungen, welche für die Reihe überhaupt erfüllt sind, auch in jeder einzelnen Gruppe erfüllt werden. Nimmt man nun die Summe der so gebildeten Gruppen, so können, wenn wir diese Gruppen in der ursprünglichen Form betrachten, nur solche Elemente in ihrer Summe vorkommen, welche schon in den ursprünglichen Zahlen, also auch in ihrer Summe enthalten sind; jedes einzelne Element ist aber in der Summe der Gruppen so oft genommen, als es überhaupt vorhanden ist. Folglich ist die Summe einer beliebigen Gruppe endlich und die Summe aller Gruppen ist gleich der Summe der ursprünglichen Reihe. Also auch bei der Addition von Zahlen, welche an demselben Grundelement und einer unendlichen Anzahl genauer Theile dieses, jeden in endlicher Anzahl genommen, gebildet sind, liegt es in der Definition der Gleichheit solcher Zahlen begründet, dass die Reihenfolge der Zusammensetzung der Elemente in beliebiger Weise gewählt werden kann, und dass auch bei der Ausführung der Addition Umformungen der einzelnen Gruppen und Ersetzungen der Zahlen durch ihnen gleiche gestattet sind.

Indem wir nun das Gebiet der Zahlen mit einem Grundelement verlassen, gehen wir zu unserer nächsten Aufgabe über, nämlich die Rechnungsoperationen für solche Zahlen abzuleiten, welche aus zwei einander entgegengesetzten Grundelementen und genauen Theilen derselben zusammengesetzt sind.

Der Begriff der Addition bleibt für diese Zahlen, wie überhaupt für complexe Zahlen mit einer beliebigen Anzahl von Grundelementen bestehen: zwei complexe Zahlen werden addirt, indem man sämmtliche Elemente derselben zu einer einzigen Zahl vereinigt; hierbei wird die Addition in Bezug auf jedes Grundelement besonders ausgeführt.

Wir haben zwei complexe Zahlen gleich genannt, wenn in ihnen die Elemente jeder Art in gleicher Anzahl vorkommen, indem wir bei dieser Erklärung nur ganze (positive) Zahlen im Sinne hatten; jetzt nachdem wir den Begriff der (positiven) Zahl und in Folge dessen den Begriff der Gleichheit solcher Zahlen erweitert haben, werden wir zwei complexe Zahlen gleich nennen, wenn sie in Bezug auf jedes ihrer Grundelemente

---

*) S. die Algebra von Wallis c. 9. S. 38. Wallis sagt, dass Buckley wahrscheinlich um 1550 gestorben sei.

**) Im Englischen hat sich cypher für Null erhalten.

http://rcin.org.pl

gleich sind. Hiernach ist es bei der Addition complexer Zahlen gleichgiltig, in welcher Anordnung man dieselbe ausführt.

Wir wissen nun aber, dass wenn wir complexe Zahlen mit einer beliebigen Anzahl von Grundelementen herstellen wollen, wir um die Subtraction allgemein aufrecht zu erhalten, zu jedem dieser Grundelemente auch das ihm entgegengesetzte Grundelement einführen müssen; also dass wir Grundelemente haben, welche bei der Addition nicht unabhängig von einander sind. Durch die Einführung der negativen Zahlen sind wir nun wieder genöthigt, den Begriff der Gleichheit zweier Zahlen, welche aus denselben einander entgegengesetzten Grundelementen bestehen, festzustellen. Nach der Definition der einander entgegengesetzten Zahlen wird sich der Werth einer complexen Zahl mit zwei einander entgegengesetzten Grundelementen nicht ändern, wenn man mit derselben Umformungen vornimmt, so dass man einander entgegengesetzte Elemente von gleichem absoluten Werthe zugleich hinzufügt, oder zugleich fortnimmt; letzteres setzen wir jedoch nur insoweit voraus, dass der absolute Werth der abzunehmenden Elemente nicht grösser ist als der absolut genommene kleinere Theil der umzuformenden Zahl. Durch diese letztere Operation wird es erlangt, dass jede solche Zahl auf eine andere zurückgeführt werden kann, welche nur positive oder nur negative Elemente enthält oder Null ist.

Wir werden hiernach zwei Zahlen, welche aus denselben einander entgegengesetzten Grundelementen und genauen Theilen derselben zusammengesetzt sind, gleich nennen, wenn sie durch solche Transformationen so umgeändert werden können, dass sie in Bezug auf jedes der Grundelemente einander gleich sind, oder wenn sie, auf ein Grundelement reducirt, gleich sind. Hieraus folgt, dass es bei der Addition beliebig vieler Zahlen mit denselben beiden Grundelementen gleichgiltig ist, in welcher Reihenfolge die Summation ausgeführt wird; denn alle Resultate, welche sich bei Aenderung dieser Reihenfolge ergeben, sind gleich, weil sie durch erlaubte Umformungen rückwärts wieder so umgewandelt werden können, dass sie in Bezug auf jedes der Grundelemente in gleicher Weise zusammengesetzt erscheinen.

Bei der Subtraction ergiebt sich die Rechnungsregel für einander entgegengesetzte Zahlen sofort aus der Definition dieser Rechnungsart; denn wenn M den Minuendus und S den Subtrahendus bezeichnet, so ist die Differenz $D = M + (-S)$, weil $M + (-S) + (+S) = M$ ist.

Die Multiplicationsregeln für einander entgegengesetzte Zahlen müssen sich ergeben aus den Multiplicationsgesetzen der ganzen (positiven) Zahlen und aus der Definition der einander entgegengesetzten Zahlen; wenn a, b, c ganze (positive) Zahlen sind, so ist $a \,.\, (b + c) = ab + ac$ und $ab = ba$; ist e das positive Grundelement und e' das negative, so ist $e + e' = 0$.

Zunächst kann man zeigen, dass die Multiplication zweier Zahlen aus verschiedenen Grundelementen ausführbar ist, wenn man nur die Grundelemente zu multipliciren vermag. Denn löst man die Zahlen in ihre Elemente auf, so ist jede Zahl von der Form einer Summe, und man hat jedes Element der einen Summe mit jedem Element der andern Summe zu multipliciren. Sind nun e und e' zwei verschiedene Grundelemente, so hat man ausser $e \,.\, e$, $e \,.\, e'$ $(= e' \,.\, e)$ und $e' \,.\, e'$ zu bestimmen $\frac{e}{m} \,.\, \frac{e}{n}$, $\frac{e}{m} \,.\, \frac{e'}{n}$ und $\frac{e'}{m} \,.\, \frac{e'}{n}$; die Produkte dieser werden sein $\frac{e \,.\, e}{m \,.\, n}$, $\frac{e \,.\, e'}{m \,.\, n}$ und $\frac{e' \,.\, e'}{m \,.\, n}$. Um dies darzuthun genügt es, zu zeigen, dass $\frac{e}{m} \,.\, \frac{e'}{n} = \frac{e \,.\, e'}{m \,.\, n}$ ist; dies ergiebt sich aus einem besonderen Beispiel: es ist $\frac{e}{3} \,.\, \frac{e'}{4} = \frac{e \,.\, e'}{3 \,.\, 4}$, denn wir können setzen:

$$3\left(\frac{e}{3} \,.\, \frac{e'}{4}\right) = \frac{e}{3} \,.\, \frac{e'}{4} + \frac{e}{3} \,.\, \frac{e'}{4} + \frac{e}{3} \,.\, \frac{e'}{4} = \left(\frac{e}{3} + \frac{e}{3} + \frac{e}{3}\right) \,.\, \frac{e'}{4} = e \,.\, \frac{e'}{4}$$

http://rcin.org.pl

$$4 \cdot 3\left(\frac{e}{3} \cdot \frac{e'}{4}\right) = e\left(\frac{e'}{4} + \frac{e'}{4} + \frac{e'}{4} + \frac{e'}{4}\right) = e \cdot e',$$

also ist: $\frac{e}{3} \cdot \frac{e'}{4} = \frac{e \cdot e'}{3 \cdot 4}$ und allgemein $\frac{e}{m} \cdot \frac{e'}{n} = \frac{e \cdot e'}{m \cdot n}$; da nun $m \cdot n = n \cdot m$ ist, so wird man umgekehrt schliessen können, dass $\frac{e}{m} \cdot \frac{e'}{n} = \frac{e}{n} \cdot \frac{e'}{m}$ ist, und ebenso folgt, dass $\frac{e}{m} \cdot \frac{e}{n} = \frac{e}{n} \cdot \frac{e}{m}$ ist.

Wenn mithin e und e′ zwei einander entgegengesetzte Grundelemente sind, und man die Multiplicationsregeln für diese bestimmen kann, so hat man die Multiplication für Zahlen mit einander entgegengesetzten Grundelementen überhaupt begründet.

Herr Weierstrass leitet die Multiplicationsregeln für diese Elemente in der folgenden Weise ab: Es ist $a = a + e + e'$, also wenn diese Zahl mit e multiplicirt wird, $ae = ae + ee + ee'$, es ist aber auch $ae = ae + e + e'$, mithin, wenn $e \cdot e = e$ festgesetzt ist, $(1 \cdot 1 = 1)$, so ist $ee' = e'e = e'$, d. h. $(+1) \cdot (-1) = (-1) \cdot (+1) = -1$; ferner giebt: $a = a + e + e'$ mit e′ muliplicirt:

$$ae' = ae' + ee' + e'e',$$

und da $ae' = ae' + e' + e$ ist, so folgt, weil $ee' = e'$ erwiesen ist, $e'e' = e$ d. h. $(-1) \cdot (-1) = +1$. Hieraus ergiebt sich, wenn a und b zwei Zahlen sind, welche aus e und e′ gebildet sind, dass die Multiplication von a mit b bedeutet, dass eine dritte Zahl bestimmt werden soll, welche aus a und a′ und den genauen Theilen von a und a′ so zusammengesetzt werden soll, wie b aus e und e′ und den genauen Theilen von e und e′ zusammengesetzt ist.

Für die Division folgt die Rechnungsregel für diese Zahlen wiederum aus der Erklärung derselben als der in Bezug auf die Multiplication umgekehrten Operation.

Hiermit wäre nun Alles Rechnen begründet, wenn man sich auf diese Zahlen beschränken würde.

Sobald man aber die Annahme macht, dass die Bestimmung von x auch möglich sein soll, so dass $xx = -y$ wird, wenn y eine positive Zahl ist, so muss man ein neues Grundelement zulassen der Art, dass $ii = -1$ ist, und das Gebiet der Arithmetik würde dann umfassen die Einheiten $+1, +i, -1, -i$; das Rechnen mit Zahlen, welche aus diesen Einheiten gebildet sind, würde auch bestimmt sein, indem wir die Multiplication dieser Grundelemente auszuführen verstehen, nämlich wissen, dass $ei = i$, $e'i = -i$, $ii = -e$ ist, und auch die übrigen Rechnungsarten vollständig bestehen bleiben.

Es ist nun die Frage, ob die Arithmetik nicht einer ferneren Erweiterung fähig sein wird, und zu diesen Einheiten $+1, +i, -1, -i$ nicht noch andere Einheiten hinzukommen können. Es ist oben (S. 15) die Behauptung von Gauss angeführt, dass in der allgemeinen Arithmetik keine anderen Einheiten, als die angegebenen zulässig sind; warum dies der Fall ist, werden wir erkennen durch die Behandlung, welche Herr Weierstrass einschlägt, um die Theorie der complexen Zahlen zu entwickeln.

Herr Weierstrass verfährt nun in der folgenden Weise: Wenn complexe Zahlen in die Arithmetik eingeführt werden sollen, so lässt man die Grundelemente derselben zunächst unbestimmt, und stellt die Frage, welche Grundeinheiten werden in der Arithmetik unter der Bedingung zulässig sein, dass die Rechnungsoperationen, welche für ganze (positive) Zahlen aufgestellt sind, auch für complexe Zahlen mit diesen Grundeinheiten aufrecht erhalten werden können, und wie werden aus den Gesetzen der Rechnungsoperationen der ganzen (positiven) Zahlen die Rechnungsregeln für diese complexen Zahlen sich folgern lassen.

Bei der Addition ist die Einführung beliebig vieler von einander unabhängigen Grundeinheiten gestattet; um aber die Subtraction allgemein beibehalten zu können, muss

http://rcin.org.pl

man zu jeder einzelnen Grundeinheit die ihr entgegengesetzte hinzunehmen; indem wir aber Zahlen, welche aus denselben einander entgegengesetzten Grundelementen gebildet sind, stets in solche umformen können, welche nur ein Grundelement enthalten, so werden wir als die allgemeine Form der complexen Zahlen eine solche annehmen können, deren Grundelemente in Bezug auf die Addition von einander unabhängig sind.

Es ist nun weiter zu untersuchen, wie die Anzahl und Beschaffenheit solcher in Bezug auf die Addition von einander unabhängiger Grundelemente abhängig ist von der Uebertragung der Multiplicationsgesetze der ganzen (positiven) Zahlen auf complexe Zahlen mit diesen Grundelementen.

Bei dieser Untersuchung ergiebt sich das folgende Resultat: In der allgemeinen Arithmetik kann man, wenn auch die Division bestehen bleiben soll, nur solche complexe Zahlen zulassen, welche bloss aus zwei in Bezug auf die Addition von einander unabhängigen Grundeinheiten zusammengnsetzt sind; und die im engeren Sinne als compleze Zahl bezeichnete Zahl $\alpha + \beta i$, wo α und β beliebige positive oder negative Zahlen sind, ist als die allgemeinste Zahlform anzusehen.

Es wird jetzt gezeigt werden, in welcher Weise sich dieser Satz bestätigt.

Nehmen wir die Grundelemente $e_1, e_2, e_3, --$, welche in Bezug auf die Addition von einander unabhängig sind, und stellen wir durch $x_1, x_2, x_3, --, y_1, y_2, y_3, --, z_1, z_2, z_3, --$ beliebige positive oder negative Zahlen vor, so sagen wir unter Anwendung dieser Bezeichnung:

Wenn eine complexe Zahl $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + --$
mit der complexen Zahl $y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 + --$
multiplicirt werden soll, so heisst dies, es soll eine dritte complexe Zahl, die aus denselben Grundelementen $e_1, e_2, e_3 --$ besteht, $z = z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3 + --$ gebildet werden, so dass die $z_1, z_2, z_3, --$ aus den $x_1, x_2, x_3 --$ und $y_1, y_2, y_3 --$ hergeleitet werden, und zwar dadurch, dass die Gesetze der Multiplication ganzer (positiver) Zahlen auch auf diese complexen Zahlen x und y angewendet werden und die Division ebenfalls bei diesen Zahlen beibehalten werden soll. Es sollen hiernach auch die Producte zweier Grundelemente $e_1 . e_1, e_1 . e_2$, u. s. w. Zahlen von der Form $z_1 e_1 + z_2 e_2 + --$ sein.

Die Multiplicationsgesetze für ganze (positive) Zahlen sind die beiden folgenden: Eine Summe wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man jedes Glied der Summe mit dieser Zahl multiplicirt, und zweitens: die Vertauschung der Factoren ist gestattet.

Um nun gleich der Bedingung zu genügen, dass bei diesen complexen Zahlen auch die Division ausführbar sein soll, nehmen wir an, das x und z gegeben sind und y so bestimmt werden soll, dass $x . y = z$ wird.

Wenn ν Grundelemente sind, und λ und μ irgend eine der Zahlen von 1 bis ν bezeichnen, so werden wir, indem wir Gebrauch machen von dem Satze für die Multiplication zweier Summen, und da, wie oben gezeigt ist, $x_\lambda e_\lambda . y_\mu e_\mu = x_\lambda y_\mu . e_\lambda e_\mu$ ist, erhalten:

$$z = x . y = \sum x_\lambda y_\mu e_\lambda e_\mu,$$

wo für λ und μ die Zahlen von 1 bis ν zu setzen sind;
nun soll aber sein, indem die α positive oder negative Zahlen bedeuten,

$$e_\lambda e_\mu = \alpha_{\lambda\mu}' e_1 + \alpha_{\lambda\mu}'' e_2 + \alpha_{\lambda\mu}''' e_3 + --$$
$$= \sum_\nu \alpha_{\lambda\mu}^{(\nu)} . e_\nu,$$

wobei, da nach dem zweiten Multiplicationsgesetze $e_\lambda e_\mu = e_\mu e_\lambda$ zu setzen ist, $\alpha_{\lambda\mu}^{(\nu)} = \alpha_{\mu\lambda}^{(\nu)}$ ist, folglich wird: $z = x . y = \sum_{\lambda,\mu}^{\nu} \alpha_{\lambda\mu}^{(\nu)} x_\lambda y_\mu e_\nu$;

http://rcin.org.pl

Da nun die Elemente in Bezug auf die Addition von einander unabhängig sind, so hat man den Coefficienten von e_ν aus z dem Coefficienten von e_ν aus der Summe gleich zu setzen, dies ergiebt: $z_\nu = \sum\limits_{\lambda,\mu}^{(\nu)} \alpha_{\lambda,\mu}\, x_\lambda \cdot y_\mu$.

Jetzt kann man ordnen nach y_μ und hat zur Bestimmung dieser ν Coefficienten y grade ν lineare Gleichungen.

Nehmen wir zunächst an, es seien nur zwei Grundelemente e_1 und e_2, und untersuchen wir die Ausdrücke, welche sich für y_1 und y_2 ergeben.

Es soll also y so bestimmt werden, dass $x \,.\, y = z$ wird; in dem angegebenen besonderen Falle sind mithin y_1 und y_2 durch x_1, x_2, z_1, z_2 so zu bestimmen, dass

$$(x_1\, e_1 + x_2\, e_2)\,(y_1\, e_1 + y_2\, e_2) = z_1\, e_1 + z_2\, e_2 \text{ wird,}$$

während: $e_1\, e_1 = \alpha'_{11}\, e_1 + \alpha''_{11}\, e_2$, $\quad e_1\, e_2 = e_2\, e_1 = \alpha'_{12}\, e_1 + \alpha''_{12}\, e_2$, $e_2\, e_2 = \alpha'_{22}\, e_1 + \alpha''_{22}\, e_2$ werden soll, wobei die α noch unbekannt sind.

Wir erhalten zur Bestimmung von y_1 und y_2 die beiden Gleichungen:

$$(\alpha'_{11}\, x_1 + \alpha'_{12}\, x_2)\, y_1 + (\alpha'_{12}\, x_1 + \alpha'_{12}\, x_2)\, y_2 = z_1$$

$$(\alpha''_{11}\, x_1 + \alpha''_{12}\, x_2)\, y_1 + (\alpha''_{12}\, x_1 + \alpha''_{12}\, x_2)\, y_2 = z_2,$$

aus welchen y_1 und y_2 bestimmt sind, wenn nicht die Determinante der Gleichungen verschwindet, welche eine homogene Function zweiten Grades von x_1 und x_2 ist. Dieselbe wird Null, wenn wir gleichzeitig $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ setzen; dann ist aber x selbst gleich Null, und, wie aus diesen Gleichungen hervorgeht, auch $z_1 = 0$ und $z_2 = 0$, folglich $z = 0$, und y_1 und y_2 erscheinen in der Form $\frac{0}{0}$; mithin ist y unbestimmt. Nun kann man aber x_1 und x_2 beliebig oft so wählen, dass die Determinante verschwindet, ohne dass die Zähler von y_1 und y_2 verschwinden, so dass mithin für unendlich viele endliche Werthe von x die Division unausführbar sein würde. Wird aber verlangt, dass die Division ausser durch $x = 0$ stets möglich sein soll, so kann dies nur erfüllt werden, wenn die Determinante so umgeformt wird, dass sie nur für $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ verschwindet, also auf die Form $A x_1{}^2 + B x_2{}^2$, wo A und B positive Coefficienten sind, gebracht wird.

Zu der Nothwendigkeit dieser Umformung gelangt man auch durch die folgende Betrachtung.

Wir sahen, dass, wenn $x = 0$ wird, auch $z = 0$ wird und y einen unbestimmten Werth hat; wählen wir nun x_1 und x_2 so, dass die Determinante verschwindet, und setzen wir $z_1 = 0$ und $z_2 = 0$, so ist der Werth von y wiederum unbestimmt, und es würde das Product $x \,.\, y$ verschwinden, indem $z = 0$ ist, ohne dass einer seiner Factoren verschwindet.

Will man aber den Satz als Grundsatz festhalten, dass ein Produkt nicht verschwinden kann, wenn nicht einer seiner Factoren verschwindet, so ist die allgemeine Form der Determinante nicht zulässig und wir müssen statt ihrer eine solche Form wählen, dass sie nur für $x = 0$, d. h. für $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ verschwinden kann.

Es ist mithin unsere Aufgabe, die Determinante der Gleichungen, welche y_1 und y_2 ergeben, nämlich;

$$(\alpha'_{11}\, x_1 + \alpha'_{12}\, x_2)\,(\alpha''_{12}\, x_1 + \alpha''_{22}\, x_2) - (\alpha''_{11}\, x_1 + \alpha''_{12}\, x_2)\,(\alpha'_{12}\, x_1 + \alpha'_{22}\, x_2)$$

in die Form $A x_1{}^2 + B x_2{}^2$ zu bringen, wo A und B positiv sein müssen. Diese Determinante wird, wenn man nach x_1 und x_2 ordnet:

$$= (\alpha'_{11}\, \alpha''_{12} - \alpha''_{11}\, \alpha'_{12})\, x_1{}^2 + (\alpha'_{11}\, \alpha''_{22} - \alpha''_{11}\, \alpha'_{22})\, x_1\, x_2 + (\alpha'_{12}\, \alpha''_{22} - \alpha''_{12}\, \alpha'_{22})\, x_2{}^2,$$

es muss folglich: $\quad \alpha'_{11}\, \alpha''_{22} - \alpha''_{11}\, \alpha'_{22} = 0$

und sowohl $\quad A = \alpha'_{11}\, \alpha''_{12} - \alpha''_{11}\, \alpha'_{12}$,

wie $\quad B = \alpha'_{12}\, \alpha''_{22} - \alpha''_{12}\, \alpha'_{22}$ positiv sein.

http://rcin.org.pl

Die erste Bedingung sagt: $\alpha'_{11} : \alpha''_{11} = \alpha'_{22} : \alpha''_{22}$, d. h. $e_1 . e_1$ und $e_2 . e_2$ sind proportional, während aus der Bedingung, dass A und B nicht Null sind, folgt, dass $e_1 . e_1$ und $e_1\, e_2$, so wie $e_1\, e_2$ und $e_2\, e_2$ nicht proportional sein dürfen.

Setzt man nun $\alpha'_{11} = \lambda \alpha'_{22}$, $\alpha''_{11} = \lambda \alpha''_{22}$, so wird $A = -\lambda\, (\alpha'_{12}\, \alpha''_{22} - \alpha''_{12}\, \alpha'_{22}) = -\lambda B$, und da B positiv sein soll, so muss, weil auch A positiv zu nehmen ist, λ negativ sein; wird $\lambda = -\frac{1}{k^2}$ gesetzt, so wird $e_2\, e_2 = -k^2 . e_1\, e_1$.

Setzen wir nun fest, das $e_1\, e_1 = e_1$ ist, indem wir e_1 als die positive Einheit annehmen, so ergiebt sich, dass $\alpha'_{11} = 1$, $\alpha''_{11} = 0$, $\alpha'_{12} = 0$ und $\alpha''_{12} = 1$ ist, und $e_2\, e_2 = -k^2 . e_1$ zu setzen ist.

Nimmt man nun $e_2 = k\, i$, so folgt: $i\, i = -e_1$.

Es wird folglich $A = +1$, $B = +k^2$, also die Determinante $= x_1{}^2 + k^2 x_2{}^2$ und

$$y_1 = \frac{x_1\, z_1 + k^2\, x_2\, z_2}{x_1{}^2 + k^2\, x_2{}^2},\ y_2 = \frac{x_1\, z_2 - x_2\, z_1}{x_1{}^2 + k^2\, x_2{}^2},$$

wobei k^2 eine beliebige positive Zahl sein kann; für die Multiplication der Grundelemente gelten hierbei die Gesetze: $e_1 . e_1 = e_1$, $e_1 . e_2 = e_2$, $e_2 . e_2 = -k^2 e_1$, indem e_1 die positive Einheit ist; in dem besonderen Fall, dass wir $k = 1$ nehmen, in welchem wir e_2 durch i ersetzen, erhalten wir: $y_1 = \frac{x_1\, z_1 + x_2\, z_2}{x_1{}^2 + z_2{}^2}$, $y_2 = \frac{x_1\, z_2 - x_2\, z_1}{x_1{}^2 + x_2{}^2}$, während das Multiplicationsgesetz für die Grundelemente $e_1 = 1$ und i ist: $e_1 . e_1 = e_1$, $e_1\, i = i$, $i . i = -e_1$.

Dieses letztere Multiplicationsgesetz wird als das e i n f a c h s t e beibehalten; es wäre vollständig überflüssig, wenn man ausser diesem noch andere anwenden wollte, welche man in beliebiger Anzahl herstellen kann, indem man nicht allein für k^2 beliebige positive Werthe annehmen darf, sondern auch an Stelle der beiden Grundelemente e_1 und e_2 zwei beliebige aus diesen gebildete complexe Zahlen, welche nicht proportional sind, der Multiplication zu Grunde legen kann.

Es lässt sich dann nämlich jede dritte complexe Zahl mit den Grundelementen e_1 und e_2 durch diese beiden Zahlen ausdrücken. Sind dieselben:

$$a = \alpha e_1 + \beta e_2 \text{ und } a' = \alpha' e_1 + \beta' e_2,$$

wobei für die Coefficienten, welche sonst beliebige positive oder negative Zahlen sein können, vorausgesetzt ist, dass n i c h t $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'}$ ist, so kann jede dritte complexe Zahl mit denselben Grundelementen: $a'' = \alpha'' e_1 + \beta'' e_2$ dargestellt werden in der Form $m\, a + n\, b$, indem m und n bestimmt sind durch die Gleichungen:

$$m\alpha + n\alpha' = \alpha'' \text{ und } m\beta + n\beta' = \beta'',$$

deren Determinante nach der Voraussetzung nicht verschwindet.

Es sind mithin die Rechnungsoperationen, welche für ganze (positive) Zahlen gelten, auch ausführbar bei complexen Zahlen, welche aus zwei Grundelementen, die in Bezug auf die Addition von einander unabhängig sind, gebildet werden, und wir haben grade dadurch, dass wir die Forderung stellten, diese Zahlen sollten von der Beschaffenheit sein, dass jene Gesetze auch für sie anwendbar bleiben, die Rechnungsregeln für die beiden Grundelemente, und somit für Zahlen überhaupt, die aus ihnen bestehen, abgeleitet.

Nachdem wir nun gesehen haben, dass wir berechtigt sind, complexe Zahlen mit zwei Grundelementen, welche die festgesetzte Bedeutung haben, in die Arithmetik einzuführen, haben wir jetzt weiter zu fragen, ob wir auch complexe Zahlen, die aus drei in Bezug auf die Addition von einander unabhängigen Grundelementen zusammengesetzt sind, in der allgemeinen Arithmetik zulassen können.

http://rcin.org.pl

Verfolgen wir hierbei denselben Weg, so erhalten wir, indem jetzt $\nu = 3$ ist, zur Bestimmung von y_1, y_2, y_3 die drei Gleichungen:

$$(\alpha'_{11}\, x_1 + \alpha'_{21}\, x_2 + \alpha'_{31}\, x_3)\, y_1 + (\alpha'_{12}\, x_1 + \alpha'_{22}\, x_2 + \alpha'_{32}\, x_3)\, y_2 + (\alpha'_{13}\, x_1 + \alpha'_{23}\, x_2 + \alpha'_{33}\, x_3)\, y_3 = z_1$$
$$(\alpha''_{11}\, x_1 + \alpha''_{21}\, x_2 + \alpha''_{31}\, x_3)\, y_1 + (\alpha''_{12}\, x_1 + \alpha''_{22}\, x_2 + \alpha''_{32}\, x_3)\, y_2 + (\alpha''_{13}\, x_1 + \alpha''_{23}\, x_2 + \alpha''_{33}\, x_3)\, y_3 = z_2$$
$$(\alpha'''_{11}\, x_1 + \alpha'''_{21}\, x_2 + \alpha'''_{31}\, x_3)\, y_1 + (\alpha'''_{12}\, x_1 + \alpha'''_{22}\, x_2 + \alpha''_{32}\, x_3)\, y_2 + (\alpha'''_{13}\, x_1 + \alpha'''_{23}\, x_2 + \alpha''_{33}\, x_3)\, y_3 = z_3;$$

Die Determinante dieser Gleichungen ist eine ganze homogene Function dritten Grades von x_1, x_2, x_3.

Während nun bei der Annahme zweier Grundelemente die entsprechende Determinante sich so umformen liess, dass dieselbe nur für $x_1 = x_2 = 0$ verschwinden konnte, ist dies hier, wenn x_1, x_2, x_3 beliebige positive oder negative Zahlen vorstellen sollen, nicht möglich, und es folgt hieraus, dass für Zahlen mit drei Grundelementen die Division durch beliebig viele von Null verschiedene Zahlen unausführbar sein würde, oder dass die Zulassung solcher Zahlen unvereinbar ist mit sem Grundsatze, dass ein Product nur verschwinden kann, wenn einer deiner Factoren verschwindet.

Wir müssen also complexe Zahlen mit drei Grundelementen aus der allgemeinen Arithmetik ausschliessen; nicht ist das nothwendig in der beschränkten Arithmetik, wenn z. B. die Coefficienten solcher complexen Zahlen nur als ganze Zahlen angenommen werden. *

Somit ist das Gebiet der complexen Zahlen abgeschlossen mit den aus zwei von einander unabhängigen Grundelementen bestehenden, welche allein gewöhnlich complexe Zahlen genannt werden; und es ist also gezeigt, wie die von Gauss aufgestellte Frage, „warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der Arithmetik zulässige Arten von Grössen liefern können“, durch Herrn Weierstrass ihre Beantwortung gefunden hat.

Gehen wir jetzt auf Grund unserer Resultate zurück, um diesem Entwickelungsgange gegenüber festzustellen, in welcher Weise Gauss die Einführung der complexen Zahlen gerechtfertigt hat.

Das Verfahren von Gauss ist synthetisch; ich habe oben bereits zwei Stellen (s. Seite 12 den zweiten Absatz und Seite 13 und 14) aus Gauss Werken angeführt, durch welche dies bestätigt wird; in dieser Beziehung ist auch noch der Artikel des Bruchstückes VI: „zur Theorie der biquadratischen Reste“ hervorzuheben.**

Gauss nimmt, um die Verhältnisse einer Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen zur Anschauung zu bringen (s oben Seite 13 und 14), in der Ebene zwei sich senkrecht schneidende grade Linien an, und indem er den Schnittpunkt derselben als Anfangspunkt betrachtet, setzt er auf der einen graden Linie von diesem aus eine Strecke e fest, auf der entgegengesetzten Seite derselben Linie die Strecke e′, auf der zu dieser senkrechten Linie ebenfalls vom Schnittpunkte an gerechnet die diesen absolut gleichen Strecken i und i′; wobei es also freigestellt bleibt, e mit e′ und i mit i′ zu vertauschen.

Wenn wir jetzt von einer bestimmten Reihenfolge der Elemente ausgehen, nämlich e, i, e′, i′, und wir eins der drei anderen Elemente an die Stelle von e setzen, so ist, damit die Bedeutung der Anordnung aufrecht erhalten bleibt (die Figur nur um den Schnittpunkt der graden Linien gedreht erscheint), genau vorgeschrieben, in welcher Weise die übrigen Elemente durch andere zu ersetzen sind; man hat nämlich stets nur das Element, welches an die Stelle von e treten soll, voran zu nehmen, und dann die ursprüngliche Reihenfolge festzuhalten, indem e als auf i′ folgend anzusehen ist.

---

*) S. die Besprechung von Gauss der: „Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen von Seeber.“ Götting. gelehrte Anzeigen 1831; Gauss Werke Bd. 2, S. 188.

**) S. Gauss Werke Bd. 2, S. 368.

http://rcin.org.pl

Die ursprüngliche Reihenfolge mit den sich in der angegebenen Art aus ihr ergebenden sind hiernach:

$$\begin{array}{cccc} e, & i, & e', & i' \\ i, & e', & i', & e \\ e', & i', & e, & i \\ i', & e, & i, & e'. \end{array}$$

Wir nennen nun e und e', i und i' entgegengesetzte Elemente, und bezeichnen ferner nach Herrn Weierstrass das auf ein Element nächst folgende als das adiungirte zu diesem, so dass also i das adiungirte Element zu e, e' zu i, i' zu e' und e zu i' ist; es ist mithin das adiungirte Element zu dem einem andern Elemente adiungirten das jenem entgegengesetzte Element.

Nehmen wir jetzt zu jedem Elemente die Vielfachen und die genauen Theile desselben hinzu, so werden wir zu jeder Zahl, welche aus einem dieser Elemente als Grundeinheit zu bilden ist, sowohl die ihr entgegengesetzte Zahl haben, wie die zu ihr und zu der entgegengesetzten Zahl adiungirten Zahlen; Gauss nennt vier so zusammenhängende Zahlen associirt.*

Ueberhaupt werden wir zu jeder complexen Zahl mit den Grundelementen e, i, e', i' die zu ihr associirten Zahlen herstellen können, indem wir die einzelnen Grundelemente der Reihe nach in gleicher Weise durch die ihnen associirten ersetzen Es werden mithin die vier folgenden complexen Zahlen, in denen α, β, γ, δ positive Zahlen sind, associirt sein:

$$\begin{array}{l} \alpha e + \beta i + \gamma e' + \delta i' \\ \alpha i + \beta e' + \gamma i' + \delta e \\ \alpha e' + \beta i' + \gamma e + \delta i \\ \alpha i' + \beta e + \gamma i + \delta e', \end{array}$$

und zwar sind die erste und dritte, die zweite und vierte einander entgegengesetzt, und jede dieser complexen Zahlen hat die nächstfolgende zu ihrer adiungirten, indem wiederum die erste als auf die vierte folgend zu betrachten ist.

Jetzt können wir ein Multiplicationsgesetz aufstellen, indem wir e als die (positive) Grundeinheit ansehen.

Eine Zahl mit einer andern Zahl multipliciren heisst: es ist eine dritte Zahl so aus dem Multiplicandus und den zu ihm associirten Zahlen zu bilden, wie der Multiplicator aus der positiven Grundeinheit (e) und den zu dieser associirten Grundeinheiten (i, e', i') gebildet ist.

Hieraus folgt im besonderen, dass durch die Multiplication einer Zahl mit e dieselbe unverändert bleibt, das Product einer Zahl mit e' die zu ihr entgegengesetzte, mit i die zu ihr adiungirte, mit i' die zu der ihr entgegengesetzten adiungirte Zahl ergiebt; es ist z. B.

$e' \,.\, e' = e$, nämlich gleich der entgegengesetzten Zahl von e',

$i \,.\, i = e'$, nämlich gleich der zu i adiungirten Zahl.

Aus der oben angegebenen Zusammenstellung:

$$\begin{array}{cccc} e, & i, & e', & i' \\ i, & e', & i', & e \\ e', & i', & e, & i \\ i', & e, & i, & e' \end{array}$$

ersieht man überhaupt allgemein, dass das Product zweier der Grundelemente, von denen das eine in der ersten Verticalreihe, das andere in der ersten Horizontalreihe steht, dasjenige Grundelement ist, welches mit dem ersteren in derselben Horizontalreihe, mit dem

*) S. die zweite Abhandlung über: „Die Theorie der biquadratischen Reste" Artikel 31, in welchem Gauss sagt: „Producta terna cuiuslibet numeri complexi — 1, + i, — i illius socios vel numeros illi associatos appellabimus. Exepta itaque cifra (quae sibi ipsa associata est) semper quaterni numeri inaequales associati sunt."

http://rcin.org.pl

letzteren in derselben Verticalreihe vorkommt. Hierbei erkennt man, dass es gleichgiltig ist, welches der beiden zu multiplicirenden Grundelemente man in der ersten Verticalreihe annimmt, und das somit aus der Definition der Multiplication folgt, dass zunächst bei der Multiplication zweier Grundelemente die Factoren vertauscht werden können, woraus dann, wie schon früher bemerkt worden ist, das Gesetz der Factorenvertauschung für beliebige Zahlen sich ergiebt, welche aus je einem der Grundelemente gebildet sind.

Ferner ist durch die angegebene Definition der Multiplication auch das Gesetz für die Multiplication von Summen gegeben, und weiter dann auch die Berechtigung der Factorenvertauschung, wenn die Factoren Summen sind.

Es ist jetzt noch eine andere Frage zu erwähnen, welche Herr Weierstrass in Erwägung zieht, nämlich:

„Ist das Gebiet der Elementar-Operationen der Arithmetik erschöpft durch die Addition und Multiplication nebst ihren umgekehrten Rechnungsarten der Subtraction und Division?“

Herr Weierstrass sprach sich über diese Frage in der folgenden Weise aus:

„Es wird, glaube ich, keine anderen Elementar-Operationen geben; wenigstens steht fest, dass kein Beispiel in der Analysis bekannt ist, dass wenn überhaupt ein analytischer Zusammenhang stattfindet, er sich nicht stets zerlegen und zurückführen lässt auf diese elementaren Operationen.

Man hat Potenzen, Wurzeln und Logarithmen als drei neue Elementar-Operationen einführen zu müssen geglaubt. Dies sind aber keine; denn wenn man den Zusammenhang zwischen Zahlen auf irgend eine Weise in analytische Form bringen kann, in welcher nur jene beiden Elementar-Operationen, nämlich die Addition und Multiplication, und ihre Umkehrungen erscheinen, so ist doch keine Veranlassung vorhanden, eine neue Operation als elementare anzunehmen.

Wenn bei einigen Formen dies nicht bestätigt zu sein schien, indem nur ein Zusammenhang durch Reihen vorhanden war, die bei bestimmten Werthen aufhörten zu convergiren, so ist dies ein Zeichen, dass die Reihen aus dem Convergenzbereich heraustretend überhaupt gar nicht mehr existiren.“

Druck der Nauck'schen Buchdruckerei in Berlin.

http://rcin.org.pl

http://rcin.org.pl

http://rcin.org.pl

http://rcin.org.pl