44

Zur

Lehre vom Transfiniten.

Gesammelte Abhandlungen

aus der

Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik

von

Georg Cantor,

ord. Professor an der Universität Halle.

Erste Abtheilung.

Halle = Saale.

Verlag von C. E. M. Pfeffer (Robert Stricker).

1890.

Zur

Lehre vom Transfiniten.

Gesammelte Abhandlungen

aus der

Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik

von

Georg Cantor,

ord. Professor an der Universität Halle.

Erste Abtheilung.

Halle-Saale.
Verlag von C. E. M. Pfeffer (Robert Stricker).
1890.

Über die verschiedenen Standpunkte in Bezug auf das actuale Unendliche.

Von

Georg Cantor

in Halle.

(Aus einem Schreiben des Verf. an Herrn G. Eneström in Stockholm vom 4. Nov. 1885.)

. . . . Ihr heute in meine Hände gelangter Brief vom 31. Oct. d. J. enthält folgende Frage: „Avez vous vu et étudié l'écrit de l'Abbé Moigno intitulé: „„Impossibilité du nombre actuellement infini; la science dans ses rapports avec la foi."" (Paris, Gauthier-Villars, 1884)?" Allerdings habe ich mir dieses Schriftchen vor einigen Wochen verschafft. Was Moigno hier über die angebliche Unmöglichkeit der actual unendlichen Zahlen sagt und die Nutzanwendung, welche er von diesem falschen Satze auf die Begründung gewisser Glaubenslehren macht, ist mir dem Wesentlichen nach bereits aus Cauchy's: „Sept leçons de physique générale" (Paris, Gauthier-Villars, 1868) bekannt gewesen. Cauchy scheint zu dieser für einen Mathematiker höchst seltsamen Speculation durch das Studium des P. Gerdil geführt worden zu sein. Letzterer (Hyacinth, Sigmund, 1718—1802.) war eine hochgestellte, sehr respectable Persönlichkeit und ein angesehener Philosoph, der als Professor eine Zeit lang in Turin wirkte, später Erzieher des nachmaligen Königs Karl Emanuel IV. von Piemont, dann vom Papst Pius VI. 1776 nach Rom berufen, zu mancherlei Geschäften des heil. Stuhles gebraucht und endlich zum Bischof von Ostia, wie auch zum Cardinal erhoben wurde. Ihnen wird er vielleicht als Verfasser einiger Arbeiten über Geometrie und über historische Gegenstände bekannt sein. Cauchy nimmt pag. 26 Bezug auf eine Abhandlung Gerdil's, welche den Titel führt: „Essai d'une démonstration mathématique contre l'existence éternelle de la matière et du mouvement, déduite de l'impossibilité démontrée d'une suite actuellement infinie de termes, soit permanents, soit successifs."

(Opere edite ed inedite del cardinale Giacinto Sigismondo Gerdil, t. IV, p. 261, Rome 1806). Derselbe Gegenstand findet sich auch von ihm dargestellt in: „Mémoire de l'infini absolu considéré dans la grandeur“ (ibid. t. V. p. 1, Rome 1807).

Ich stehe durchaus nicht in principiellem Gegensatz zu diesen Autoren, sofern sie eine Harmonie zwischen Glauben und Wissen erstreben, halte aber das Mittel, dessen sie sich hier dazu bedienen, für ein gänzlich verfehltes.

Wenn die Glaubenssätze zu ihrer Stütze eines so grundfalschen Satzes, wie derjenige von der Unmöglichkeit actual unendlicher Zahlen (der in der bekannten Formulirung: „numerus infinitus repugnat“ uralt ist; neuerdings findet er sich z. B. bei Tongiorgi: „Instit. philos. t. II, l. 3, a. 4, pr. 10“ in der Form: „Multitudo actu infinita repugnat“; auch u. a. bei Chr. Sigwart: „Logik, Bd. II. p. 47, Tübingen 1878“ und bei K. Fischer: „System der Logik und Metaphysik oder Wissenschaftslehre p. 275, Heidelberg 1865 kann er gefunden werden) bedürften, so wäre es mit ihnen sehr schlecht bestellt und es scheint mir höchst bemerkenswert, daß der heil. Thomas von Aquino in I p, q. 2, a. 3 seiner „Summa theologica“, wo er mit fünf Argumenten die Existenz Gottes beweist, von diesem fehlerhaften Satze keinen Gebrauch macht, obwohl er im Übrigen kein Gegner desselben ist; jedenfalls erschien er ihm für diesen Zweck doch zu unsicher. (M. vergl. Constantin Gutberlet: „Das Unendliche metaphysisch und mathematisch betrachtet, p. 9, Mainz 1878“) So hoch ich Cauchy als Mathematiker und Physiker schätze, so sympathisch mir seine Frömmigkeit ist und so sehr mir im Besondern auch jene „Sept Leçons de physique générale“, abgesehen von dem in Rede stehenden Irrtum gefallen, muß ich doch entschieden gegen seine Autorität protestiren da, wo er gefehlt hat.

Es sind jetzt gerade zwei Jahre her, daß mich Herr Rudolf Lipschitz in Bonn auf eine gewisse Stelle im Briefwechsel zwischen Gauß und Schumacher aufmerksam machte, wo ersterer gegen jede Heranziehung des Actual-Unendlichen in die Mathematik sich ausspricht (Brief v. 12. Juli 1831); ich habe ausführlich geantwortet und die Autorität von Gauß, welche ich in allen anderen Beziehungen so hoch halte, in diesem Punkte abgelehnt, sowie ich heute das Zeugnis Cauchy's und wie ich in meinem Schriftchen: „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883" u. a. auch die Autorität Leibnizens, der in dieser Frage eine merkwürdige Inconsequenz begangen hat, zurückweise.

Wenn Sie sich das soeben genannte Schriftchen (nicht die Übersetzung in den Acta mathematica t. II, wo nur ein Teil davon abgedruckt ist) genauer ansehen wollten, so würden Sie finden, daß ich in den §§ 4—8 im Grunde auf alle Einwürfe geantwortet habe, welche wider die Einführung actual unendlicher Zahlen gemacht werden können. Sind mir auch damals die erwähnten Schriften von Gerdil, Cauchy und Moigno über unsern Gegenstand noch nicht bekannt gewesen, so werden doch die betreffenden Scheingründe dieser Autoren ebensowohl getroffen, wie die petitiones principii der von mir dort so reichlich angeführten Philosophen.

Alle sogenannten Beweise wider die Möglichkeit actual unendlicher Zahlen sind, wie in jedem Falle besonders gezeigt und auch aus allgemeinen Gründen geschlossen werden kann, der Hauptsache nach dadurch fehlerhaft und darin liegt ihr πρῶτον ψεῦδος, daß sie von vornherein den in Frage stehenden Zahlen alle Eigenschaften der endlichen Zahlen zumuten oder vielmehr aufdringen, während die unendlichen Zahlen doch andrerseits, wenn sie überhaupt in irgend einer Form denkbar sein sollen, durch ihren Gegensatz zu den endlichen Zahlen ein ganz neues Zahlengeschlecht constituiren müssen, dessen Beschaffenheit von der Natur der Dinge durchaus abhängig und Gegenstand der Forschung, nicht aber unserer Willkühr oder unserer Vorurteile ist.

Pascal hat, wie ich erst kürzlich gesehen, das Bedenkliche, wenn nicht Widersinnige solcher Deductionen, wie sie uns bei den genannten Schriftstellern begegnen, wohl erkannt und er spricht sich deshalb auch, ebenso wie sein Freund Antoine Arnauld für die actual unendlichen Zahlen aus, nur daß er aus einem andern widerlegbaren Grunde, auf den ich hier nicht näher eingehen will, den menschlichen Geist in Hinsicht seiner Auffassungskraft des Actual-Unendlichen zu gering schätzt. (M. v. Pascal, Oeuvres complètes, t. I p. 302—303, Paris, Hachette & Co. 1877; ferner: Logique de Port-Royal, ed. par C. Jourdin, 4^e^ partie, chap. 1, Paris, Hachette & Co. 1877).

Wenn man die verschiedenen Ansichten, welche sich in Bezug auf unsern Gegenstand, das Actual-Unendliche (im folgenden, Kürze halber mit A.-U. bezeichnet), im Laufe der Geschichte geltend gemacht haben, übersichtlich gruppiren will, so bieten sich dazu mehrere Gesichtspunkte dar, von denen ich heute nur einen hervorheben möchte.

Man kann nämlich das A.-U. in drei Hauptbeziehungen in Frage stellen; erstens sofern es in Deo extramundano aeterno omnipotenti sive natura naturante, wo es das Absolute heißt, zweitens sofern es in concreto seu in natura naturata vorkommt, wo ich es Transfinitum nenne und drittens kann das A.-U. in abstracto in Frage gezogen werden, d. h. sofern es von der menschlichen Erkenntnis in Form von actual-unendlichen, oder wie ich sie genannt habe, von transfiniten Zahlen oder in der noch allgemeineren Form der transfiniten Ordnungstypen (*ἀριθμοὶ νοητοὶ* oder *εἰδητικοί*) aufgefaßt werden könne.

Sehen wir zunächst von dem ersten dieser drei Probleme ab und beschränken uns auf die beiden letzteren, so ergeben sich von selbst vier verschiedene Standpunkte, welche auch wirklich in Vergangenheit und Gegenwart sich vertreten finden.

Man kann erstens das A.-U. sowohl in concreto, wie auch in abstracto verwerfen, wie dies z. B. von Gerdil, Cauchy, Moigno in den angeführten Schriften, von Herrn Ch. Renouvier (M. vergl. dessen: Esquisse d'une classification systématique des doctrines philosophiques, t. I. pag. 100, Paris, au Bureau de la Critique philosophique, 1885) und von allen sogenannten Positivisten und deren Verwandten geschieht.

Zweitens kann man das A.-U. in concreto bejahen, dagegen in abstracto verwerfen; dieser Standpunkt findet sich, wie ich in meinen „Grundlagen, pag. 16" hervorhob, bei Descartes, Spinoza, Leibniz, Locke und vielen Anderen. Soll ich auch hier einen neueren Autor nennen, so erwähne ich Hermann Lotze, der in einem Aufsatze betitelt: „L'Infini actuel est-il contradictoire? Réponse à Monsieur Renouvier" in der Revue philos. de Ribot, t. IX, 1880 das A.-U. in concreto verteidigt; die Replik Renouviers findet sich in demselben Bande dieser Zeitschrift.

Es kann drittens das A.-U. in abstracto bejaht, dagegen in concreto verneint werden; auf diesem Standpunkt befindet sich ein Teil der Neuscholastiker, während ein andrer, und vielleicht der größere Teil dieser, durch die Encyclica Leo's XIII, vom 4. August 1879: „De philosophia Christiana ad mentem Sancti Thomae Aquinatis Doctoris Angelici in scholis catholicis instauranda" mächtig angespornten Schule den ersten dieser vier Standpunkte noch zu verteidigen sucht.

Endlich kann viertens das A.-U. sowohl in concreto, wie auch in abstracto bejaht werden; auf diesem Boden, den ich für den einzig richtigen halte, stehen nur Wenige; vielleicht bin ich der zeitlich erste, der diesen Standpunkt mit voller Bestimmtheit und in allen seinen Konsequenzen vertritt, doch das weiß ich sicher, daß ich nicht der Letzte sein werde, der ihn verteidigt!

Wird auch die Stellung der Philosophen zu dem Problem des A.-U. in Deo berücksichtigt, so erhält man eine Classification der Schulen in acht Standpunkte, welche merkwürdigerweise sämtlich vertreten zu sein scheinen. Eine Schwierigkeit der Einordnung in diese acht Klassen könnte sich nur bei denjenigen Autoren ergeben, welche in Bezug auf eine oder mehrere der drei das A.-U. betreffenden Fragen keine bestimmte Position genommen haben.

Daß das sogenannte potenziale oder synkategorematische Unendliche (Indefinitum) zu keiner derartigen Einteilung Veranlassung giebt, hat darin seinen Grund, daß es ausschließlich als Beziehungsbegriff, als Hülfsvorstellung unseres Denkens Bedeutung hat, für sich aber keine Idee bezeichnet; in jener Rolle hat es allerdings durch die von Leibniz und Newton erfundene Differential- und Integralrechnung seinen großen Wert als Erkenntnismittel und Instrument unseres Geistes bewiesen; eine weitergehende Bedeutung kann dasselbe nicht für sich in Anspruch nehmen.

Vielleicht sind Sie zu Ihrer Fragestellung durch eine Bemerkung in meinem Aufsatze „Über verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen" in Acta mathemathica, t. VII, p. 123 veranlaßt worden, wo ich unter Anderen Cauchy als Gewährsmann für meine Ansicht in Bezug auf die Constitution der Materie genannt; ich habe hierbei besonders denjenigen Bestandteil meiner Hypothese im Auge gehabt, in welchem ich die strenge räumliche Punktualität oder Ausdehnungslosigkeit der letzten Elemente, wie sie nach dem Vorgange Leibnizens auch von dem Pater Boscovich, in dessen Schrift: „Theoria philosophiae naturalis redacta ad unicam legem virium in natura existentium, Venetiis, 1763" gelehrt wurde, behaupte; und allerdings findet sich diese Ansicht von Cauchy in seinen „Sept leçons" und vor ihm von André Marie Ampère (Cours du collège de France 1835—1836), nach ihm von de Saint-Venant (M. vergl. dessen: „Mémoire sur la question de savoir s'il existe des masses continues, et sur la nature probable des dernières particules des corps". Bulletin de la Société philomatique de Paris, 20 Janvier 1844; ebenso dessen größere Arbeit in den Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 2e année), bei uns in Deutschland vornehmlich von H. Lotze (M. vergl. dessen „Mikrokosmos", Bd. I) und von G. Th. Fechner (M. vergl. dessen: „Über die physikalische und philosophische Atomenlehre", Leipzig, 1864) meisterhaft verteidigt. Dagegen kann ich nicht in Abrede stellen, daß Cauchy wenigstens in jenem Schriftchen (und wohl auch die übrigen zuletzt genannten Autoren, mit Ausnahme von Leibniz) gegen den zweiten Bestandteil meiner Hypothese, die actual-unendliche Zahl der letzten Elemente polemisiren; mit welchem Rechte ist von mir oben gezeigt worden. Daß Cauchy jedoch bei anderen Gelegenheiten dieser, das A.-U. betreffenden Meinung nicht treu geblieben ist, wie es ja auch nicht anders sein konnte, will ich später einmal nachweisen. . . . .

Trotz wesentlicher Verschiedenheit der Begriffe des potenzialen und actualen Unendlichen, indem ersteres eine veränderliche endliche, über alle endliche Grenzen hinaus wachsende Größe, letzteres ein in sich festes, constantes, jedoch jenseits aller endlichen Größen liegendes Quantum bedeutet, tritt doch leider nur zu oft der Fall ein, daß das eine mit dem andern verwechselt wird. So beruht z. B. die nicht selten vorkommende Auffassung der Differentiale, als wären sie bestimmte unendlich kleine Größen (während sie doch nur veränderliche, beliebig klein anzunehmende Hülfsgrößen sind, die aus den Endresultaten der Rechnungen gänzlich verschwinden und darum schon von Leibniz als bloße Fictionen characterisirt werden, z. B. in der Erdmann'schen Ausgabe, pag. 436), auf einer Verwechselung jener Begriffe. Wenn aber aus einer berechtigten Abneigung gegen solches illegitime A. U. sich in breiten Schichten der Wissenschaft, unter dem Einflusse der modernen epikureisch-materialistischen Zeitrichtung, ein gewisser Horror Infiniti ausgebildet hat, der in dem erwähnten Schreiben von Gauß seinen klassischen Ausdruck und Rückhalt gefunden, so scheint mir die damit verbundene unkritische Ablehnung des legitimen A. U. kein geringeres Vergehen wider die Natur der Dinge zu sein, die man zu nehmen hat, wie sie sind, und es läßt sich dieses Verhalten auch als eine Art Kurzsichtigkeit auffassen, welche die Möglichkeit raubt, das A. U. zu sehen, obwohl es in seinem höchsten, absoluten Träger uns geschaffen hat und erhält und in seinen secundären, transfiniten Formen uns allüberall umgiebt und sogar unserm Geiste selbst innewohnt.

Eine *andere* häufige *Verwechselung* geschieht mit den beiden Formen des *actualen* Unendlichen, indem nämlich das *Transfinite* mit dem *Absoluten* vermengt wird, während doch diese Begriffe streng geschieden sind, insofern ersteres ein *zwar Unendliches*, aber doch *noch Vermehrbares*, das letztere aber wesentlich als *unvermehrbar* und daher mathematisch *undeterminirbar* zu denken ist; diesem Fehler begegnen wir z. B. im *Pantheismus* und er bildet die *Achillesferse* der *Ethik Spinoza's*, von welcher zwar F. H. *Jacobi* behauptet hat, daß sie mit Vernunftgründen nicht zu widerlegen sei. Auch bemerkt man, daß sich seit *Kant* die falsche Vorstellung unter den Philosophen einbürgert, als sei das *Absolute* die ideale Grenze des *Endlichen*, während in Wahrheit diese Grenze nur als ein *Transfinitum* und zwar als das *Minimum alles Transfiniten* (entsprechend der von mir mit ω bezeichneten, *kleinsten* überendlichen Zahl) gedacht werden kann. Ohne ernste kritische Vorerörterung wird der Unendlichkeitsbegriff von *Kant* in dessen „Kritik der reinen Vernunft", in dem Kapitel über die „Antinomien der reinen Vernunft" an *vier* Fragen behandelt, um den Nachweis zu liefern, daß sie mit gleicher Strenge *bejaht* und *verneint* werden können. Es dürfte kaum jemals, selbst bei Mitberücksichtigung der Pyrrhonischen und Akademischen Skepsis, mit welcher *Kant* so viele Berührungspuncte hat, mehr zur Discreditirung der menschlichen Vernunft und ihrer Fähigkeiten geschehen sein, als mit diesem Abschnitt der „kritischen Transcendentalphilosophie". Ich werde gelegentlich zeigen, daß es diesem Autor nur durch einen *vagen, distinctionslosen* Gebrauch des Unendlichkeitsbegriffs (wenn unter solchen Verhältnissen überhaupt noch von Begriffen die Rede sein kann) gelungen ist, seinen Antinomien Geltung zu verschaffen, und dies auch nur bei denen, die gleich ihm einer gründlichen mathematischen Behandlung solcher Fragen gern ausweichen.

Hier möchte ich auch auf *zwei* Angriffe antworten, welche gegen meine Arbeiten unternommen worden sind.

Herbart faßt bekanntlich die Definition des Unendlichen so, daß unter sie nur das potenziale Unendliche fallen kann, um darauf einen sogenannten Beweis zu gründen, daß das A. U. in sich widersprechend sei. Er hätte mit demselben Rechte den Kegelschnitt als eine Curve definiren können, deren Puncte von einem Centrum alle gleich weit abstehen, um darauf fußend, gegen Apollonios von Perga den Satz zu vertreten: „Es giebt keine anderen Kegelschnitte als den Kreis und, was Du da Ellipse, Hyperbel und Parabel nennst, sind widerspruchsvolle Begriffe.“ Von solcher Waare sind die Einwände, welche die Herren Herbartianer gegen meine „Grundlagen“ vorgebracht haben. (M. vergl. Zeitschr. f. exakte Philos. von Th. Allihn und A. Flügel, Bd. XII, pag. 389.)

Herr W. Wundt nimmt in zweien seiner Schriften, in seiner „Logik, Bd. II“, sowie in der Abhandlung: „Kant's kosmologische Antinomien und das Problem der Unendlichkeit, Philos. Studien, Bd. II“, wenn auch in eigenartiger Weise Bezug auf meine Arbeiten und es treten bei ihm die von mir eingeführten Worte „transfinit = überendlich“ des öfteren hervor; doch kann ich nicht finden, daß er mich richtig verstanden habe.

In dem ersteren Werke stellt z. B. der ganze Satz, pag. 127, unten, welcher anfängt mit den Worten: „Wenn wir eine ...“ das genaue Gegenteil vom Richtigen dar. Auch werden die Begriffe des potenzialen und actualen Unendlichen (welche ich in meinen „Grundlagen“ Uneigentlich-Unendliches und Eigentlich-Unendliches genannt habe) von ihm ganz falsch bestimmt. Die Zusammenstellung mit Hegel muß gleichfalls als unzutreffend abgelehnt werden. Der pantheistische Hegel kennt keine wesentlichen Unterschiede im A. U., während es doch gerade das mir Eigentümliche ist, solche Unterschiede, die ich fand, scharf hervorgehoben und durch Aufdeckung des fundamentalen Gegensatzes von „Mächtigkeit“ und „Ordnungszahl“ bei Mengen, den Herr Wundt ganz übersehen zu haben scheint, obgleich er fast auf jeder Seite meiner Arbeiten zur Geltung kommt, streng mathematisch ausgebildet zu haben. Ebensowenig Ähnlichkeit haben meine Untersuchungen mit den „metamathematischen", mit denen sie gleichwohl von Herrn Wundt in eine Linie gestellt werden. Die Begriffsschwankungen und die damit zusammenhängende Verwirrung, welche seit ohngefähr hundert Jahren zuerst vom fernen Osten Deutschlands her in die Philosophie hineingetragen wurden, zeigen sich nirgends deuticher, als in den das Unendliche betreffenden Fragen, wie aus unzählig vielen sei es kriticistisch oder positivistisch, psychologistisch oder philologistisch gehaltenen Publicationen unsrer heutigen philosophischen Literatur hervorgeht. Nicht unerwähnt kann es daher bleiben, daß Herr Wundt das Wort: „Infinitum" ausschließlich in der Bedeutung des potenzialen Unendlichen gebrauchen will. Nun ist aber dieses Wort von altersher ganz allgemein auf den positivsten aller Begriffe, den Gottes, bezogen worden; man muß über den sonderlichen Einfall staunen, wonach das Wort „Infinitum" fortan nur in dem allereingeschränktesten, synkategorematischen Sinne verwandt werden solle.

Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten.

Von

Georg Cantor.

In dem vorhergehenden Aufsatze habe ich, veranlaßt durch gewisse, gegen die Möglichkeit der unendlichen Zahlen geschriebene ältere und neuere Arbeiten, den Versuch gemacht, die sich an das actuale Unendliche knüpfenden Fragen nach ihren obersten Scheidungen, von dem allgemeinsten Gesichtspunkte aus abzugrenzen, um auf diese Weise eine Übersicht der hauptsächlichsten Positionen zu gewinnen, welche in Bezug auf diesen Gegenstand eingenommen werden können. Es wurde das A.-U. nach drei Beziehungen unterschieden: erstens sofern es in der höchsten Vollkommenheit, im völlig unabhängigen, außerweltlichen Sein, in Deo realisirt ist, wo ich es Absolutunendliches oder kurzweg Absolutes nenne; zweitens sofern es in der abhängigen, creatürlichen Welt vertreten ist; drittens sofern es als mathematische Größe, Zahl oder Ordnungstypus vom Denken in abstracto aufgefaßt werden kann. In den beiden letzten Beziehungen, wo es offenbar als beschränktes, noch weiterer Vermehrung fähiges und insofern dem Endlichen verwandtes A.-U. sich darstellt, nenne ich es Transfinitum und setze es dem Absoluten strengstens entgegen.

In jeder von den drei Beziehungen kann die Möglichkeit des actualen Unendlichen bejaht oder verneint werden; daraus folgen im Ganzen acht verschiedene Standpunkte, die sämmtlich in der Philosophie vertreten sind und von welchen ich denjenigen einnehme, der unbedingt affirmativ ist, inbezug auf alle drei Rücksichten.

Liegt es besonders der speculativen Theologie ob, den Absolutunendlichen nachzuforschen und Dasjenige zu bestimmen, was menschlicherseits von ihm gesagt werden kann, so fallen andrerseits die auf das Transfinite hingerichteten Fragen hauptsächlich in die Gebiete der Metaphysik und der Mathematik; sie sind es vorzugsweise, mit denen ich mich seit Jahren beschäftige.

Da ich das Glück hatte, darüber mit mehreren Gelehrten, welche meinen Arbeiten ein freundliches Interesse gewidmet, zu correspondiren und mir hierbei Gelegenheit geworden ist, das bisher Veröffentlichte in gemeinverständlicher Weise zu erläutern und aufzuklären, so meine ich in diesem, aus lebendigem Gedankenaustausch hervorgegangenen Material geeignete Anknüpfungspunkte für weitere, ein größeres Publikum interessirende Ausführungen zu besitzen. Ich möchte daher zunächst im Folgenden mehrere dieser von mir geschriebenen Briefe veröffentlichen, ohne wesentliche Änderungen an ihnen vorzunehmen. Wo es jedoch mir nöthig erscheinen wird, will ich in Noten unter dem Text Erklärungen dazu geben.

Zu den Briefen I, III, IV und VIII möchte ich Folgendes als Einleitung vorausschicken.

Ad I und VIII. Hier findet sich die von mir seit etwa vier Jahren vertretene und in meinen Vorlesungen vielfach ausgebildete Auffassungsweise der ganzen Zahlen und Ordnungstypen als Universalien, die sich auf Mengen beziehen und aus ihnen sich ergeben, wenn von der Beschaffenheit der Elemente abstrahirt wird. Jede Menge wohlunterschiedener Dinge kann als ein einheitliches Ding für sich angesehen werden, in welchem jene Dinge Bestandteile oder constitutive Elemente sind. Abstrahirt man sowohl von der Beschaffenheit der Elemente, wie auch von der Ordnung ihres Gegebenseins, so erhält man die Cardinalzahl oder Mächtigkeit der Menge, einen Allgemeinbegriff, in welchem die Elemente, als sogenannte Einsen, gewissermaßen organisch in einander derartig zu einem einheitlichen Ganzen verwachsen sind, daß keine vor den anderen ein bevorzugtes Rangverhältnis hat. Daraus ergiebt sich bei eingehender Erwägung, daß zweien verschiedenen Mengen dann und nur dann eine und dieselbe Cardinalzahl zukommt, wenn sie das zu einander sind, was ich aequivalent nenne und es liegt kein

Widerspruch vor, wenn, wie dies bei unendlichen Mengen häufig eintritt, zwei Mengen, von denen die eine ein Teil oder Bestandteil der andern ist, völlig gleiche Cardinalzahl haben. In dem Verkennen dieser Thatsache sehe ich das Haupthindernis, welches der Einführung unendlicher Zahlen von altersher entgegengebracht worden ist.

Wird jener Abstraktionsakt an einer gegebenen, nach einer oder mehreren Beziehungen (Dimensionen) geordneten Menge nur inbezug auf die Beschaffenheit der Elemente vorgenommen, so daß die Rangordnung, in welcher sie zu einander stehen, auch im Allgemeinbegriff beibehalten bleibt, der auf solche Weise gewissermaßen eine, aus verschiedenen Einsen, welche eine bestimmte Rangordnung, nach einer oder nach mehreren Richtungen, untereinander bewahren, hervorgehende einheitliche organische Bildung wird, so hat man damit ein solches universale, welches von mir im Allgemeinen Ordnungstypus oder Idealzahl, in dem besonderen Falle wohlgeordneter Mengen aber Ordnungszahl genannt wird*); letztere stimmt überein mit dem, was ich früher (Grundl. e. allg. Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883) „Anzahl einer wohlgeordneten Menge“ genannt habe. Zweien geordneten Mengen kommt dann und nur dann ein und derselbe Ordnungstypus zu, wenn sie zu einander im Verhältnis der Aehnlichkeit oder Conformität stehen, welches Verhältnis genau definirt werden wird.

Hier sind die Wurzeln aufgedeckt, aus welchen sich der Organismus der transfiniten Typentheorie oder Theorie der Idealzahlen und im Besondern der transfiniten Ordnungszahlen mit logischer Nothwendigkeit herausentwickelt und den ich, in systematischer Gestalt, bald hoffe publiciren zu können.

In einer Recension, die ich für die „Deutsche Litteraturzeitung“ (v. 16. Mai 1885) zu liefern hatte, habe ich die Bestimmungen über Cardinal- und Ordnungszahl wie folgt for-

---

*) M. v. Gutberlet; das Problem des Unendlichen, diese Zeitschr. Bd. 88, pag. 183.

mulirt: „Ich nenne Mächtigkeit eines Inbegriffs oder einer Menge von Elementen (wobei letztere gleich- oder ungleichartig, einfach oder zusammengesetzt sein können) denjenigen Allgemeinbegriff, unter welchen alle Mengen, welche der gegebenen Menge aequivalent sind, und nur diese fallen. Zwei Mengen werden hierbei aequivalent genannt, wenn sie sich gegenseitig eindeutig, Element für Element, einander zuordnen lassen. Ein Anderes ist, was ich, ‚Anzahl oder Ordnungszahl' nenne; ich schreibe sie nur ‚wohlgeordneten Mengen' zu, und zwar verstehe ich unter der ‚Anzahl oder Ordnungszahl einer gegebenen wohlgeordneten Menge' denjenigen Allgemeinbegriff, unter welchen alle wohlgeordneten Mengen, welche der gegebenen ähnlich sind, und nur diese fallen. ‚Ähnlich' nenne ich zwei wohlgeordnete Mengen, wenn sie sich gegenseitig eindeutig und vollständig, unter Wahrung der gegebenen Elementenfolge auf beiden Seiten, auf einander abbilden lassen. Bei endlichen Mengen fallen die beiden Momente ‚Mächtigkeit' und ‚Anzahl' gewissermaßen zusammen, weil eine endliche Menge in jeder Anordnung ihrer Elemente als ‚wohlgeordnete' Menge eine und dieselbe Ordnungszahl hat; dagegen tritt bei unendlichen Mengen der Unterschied von ‚Mächtigkeit' und ‚Ordnungszahl' aufs stärkste zu Tage, wie dies in meinem Schriftchen ‚Grundl. e. allgem. Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883' gezeigt worden ist."

Die Cardinalzahlen sowohl, wie die Ordnungstypen sind einfache Begriffsbildungen; jede von ihnen ist eine wahre Einheit (μονάς), weil in ihr eine Vielheit und Mannigfaltigkeit von Einsen einheitlich verbunden ist.

Die Elemente der uns gegenüberstehenden Menge M sind getrennt vorzustellen; in dem intellectualen Abbilde $\overline{M}$ derselben (siehe Abschn. VIII, Nr. 9 dieses Aufsatzes) welches ich ihren Ordnungstypus nenne, sind dagegen die Einsen zu einem Organismus vereinigt. In gewissem Sinne läßt sich jeder Ordnungstypus als ein compositum aus Materie und Form ansehen; die darin enthaltenen, begrifflich unterschiedenen Einsen liefern die Materie, während die unter diesen bestehende Ordnung das der Form Entsprechende ist.

Sehen wir uns die Definition bei Euclides für die endliche Cardinalzahl an, so muß zunächst anerkannt werden, daß er die Zahl, ebenso wie wir es thun, ihrem wahren Ursprung gemäß, auf die Menge bezieht und aus der Zahl nicht etwa ein bloßes „Zeichen" macht, das Einzeldingen beim subjectiven Zählprozeß beigelegt wird. Es heißt in seinen Elementen, lib. VII: *Μονάς ἐστιν, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται* und: *Ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.*

Dann scheint es mir aber, daß er die Einsen in der Zahl ebenso getrennt wähnt, wie die Elemente in der discreten Menge, auf welche sie sich bezieht. Wenigstens fehlt in der Euclidischen Definition der ausdrückliche Hinweis auf den einheitlichen Character der Zahl, welcher ihr durchaus wesentlich ist.*)

---

*) Dem hier hervorgehobenen Bedürfnis, den organischen innerlich-einheitlichen Charakter der Zahl betont zu sehen, scheint Nikomachus mehr entgegenzukommen, wenn es bei ihm (Arith. intr. I, 7, 1) heißt: *Ἀριθμός ἐστι πλῆθος ὡρισμένον ἢ μονάδων σύστημα ἢ ποσότητος χύμα* (von *χέω*, gießen) *ἐκ μονάδων συγκείμενον.* Und Boetius, inst. arithm. I, 3 sagt: numerus est unitatum collectio, vel quantitatis acervus ex unitatibus profusus. Leibniz drückt sich im Jahre 1666, in der Schrift: Dissertatio de arte combinatoria, im Prooemium, als er in seinem Entwicklungsgange der Philosophie der Vorzeit noch näher stand, über den Zahlbegriff wie folgt aus: „Omnis relatio aut est unio aut convenientia. In unione autem res, inter quas haec relatio est, dicuntur partes, sumtae cum unione, totum. Hoc contingit quoties plura simul tanquam unum supponimus. Unum autem esse intelligitur quicquid uno actu intellectus, s. simul, cogitamus, v. g. quemadmodum numerum aliquem quantumlibet magnum, saepe caeca quadam cogitatione simul aprehendimus, cyphras nempe in charta legendo, cui explicate intuendo ne Methusalae quidem aetas suffectura sit. Abstractum autem ab uno est unitas, ipsumque totum abstractum ex unitatibus, seu totalitas dicitur numerus." Schon nach drei Jahren findet sich von demselben Autor in einem Brief an Thomasius (Edit. Erdmann p. 53) die bedenkliche Erklärung: „numerum definio unum, et unum, et unum etc., seu unitates." Die Addition von Einsen kann aber niemals zur Definition einer Zahl dienen, weil hier die Angabe der Hauptsache, nämlich wie oft die Einsen addirt werden sollen, nicht ohne die zu definirende Zahl selbst erfolgen kann. Dies beweist, daß die Zahl, durch einen einzigen Abstraktionsakt gewonnen, nur als organische Einheit von Einsen zu erklären ist. Daraus folgt ferner, wie grundfalsch es ist, den Zahlbegriff vom Zeitbegriff oder der sogen. Zeit-

Es ist nicht überflüssig, wenn ich hervorhebe, daß der Begriff der Ordnungszahl, wie er vorhin bestimmt worden ist, in dem Falle endlicher Ordnungszahlen durchaus nicht zusammenfällt mit dem, was man gewöhnlich „Ordinalzahlwörter" (erstes, zweites etc.) nennt; diese sind nichts als Bezeichnungen für den Ordnungsrang der Elemente einer wohlgeordneten Menge und ergeben sich ohne Weiteres durch Anknüpfung an unsere Ordnungszahlen, indem das letzte Element einer endlichen wohlgeordneten Menge als das nte in der vorliegenden Reihenfolge bezeichnet wird, wenn n die derselben wohlgeordneten Menge zukommende Ordnungszahl vorstellt.

Während so von meinem Standpunkte aus die „Ordinalzahlwörter" als das Letzte und Unwesentlichste in der wissenschaftlichen Theorie der Zahlen sich ergeben, werden sie in zwei kürzlich publicirten Arbeiten zum Ausgangspunkt für die Entwickelung des Zahlbegriffs genommen. Es geschieht dies in den zwei Abhandlungen, welche Herr H. v. Helmholtz und Herr L. Kronecker in der Sammlung „Philosophische Aufsätze. Eduard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doktor-Jubiläum gewidmet. Leipzig, bei Fues, 1887" haben drucken lassen*). Sie vertreten den extremen empiristisch-psychologischen Standpunkt mit einer Härte, die man nicht für möglich halten würde, wenn sie nicht, in Fleisch und Blut

---

anschauung abhängig machen zu wollen. Es ist dies in der neueren Philosophie seit ihrer Fortbildung durch Kant vielfach geschehen; Sir William Rowan Hamilton hat beispielsweise die Arithmetik als „The science of pure time" erklärt und viele Andere thun dasselbe. Sie könnten mit genau demselben Rechte jede andere Wissenschaft, z. B. die Geometrie als „the sc. of. pure time" ausgeben, weil wir bei der Bildung geometrischer oder sonstiger Begriffe subjektiv nicht weniger auf die „Zeit", als die Existenzform des diesseitigen Lebens, angewiesen sind, wie bei der Aneignung der arithmetischen Begriffe.

*) Beide Autoren nennen „Ordnungszahl" das, was ich „Ordinalzahlwort" nenne, während bei mir das Wort „Ordnungszahl" eine andere Bedeutung hat. Ich würde meine „Ordnungszahl" mit „numerus ordinarius", dagegen das „Ordinalzahlwort" mit „nota ordinalis" übersetzen. Diese notae ordinales sind es, welche nach den beiden genannten Autoren das Wesen der Zahlen bestimmen sollen.

zweimal verkörpert, hier entgegen träte. Es wäre irrtümlich, wollte man glauben, der Gegensatz dieser Auffassungen und der meinigen wäre etwa der von Nominalismus oder Conceptualismus einerseits, zum maßvollen aristotelischen Realismus andererseits, den ich vertrete; vielmehr ist es höchst instruktiv, sich zu überzeugen, daß bei diesen beiden Forschern die Zahlen in erster Linie Zeichen, aber nicht etwa Zeichen für Begriffe, die sich auf Mengen beziehen, sondern Zeichen für die beim subjektiven Zählprozeß gezählten Einzeldinge sein sollen. Es versteht sich daher von selbst, daß, meinem Standpunkte gegen über, der Gedankengang dieser Arbeiten als ein vollendetes Hysteron-Proteron sich darstellt.

In eben solchem Gegensatz stehen sie aber auch zu den, die Zahlen betreffenden Auffassungen, welche wir im griechischen Altertum, nicht nur bei Philosophen, sondern auch bei Mathematikern finden. Die oben angeführte Definition des Euclides ist ein Beleg hierfür und inbezug auf Platon und Aristoteles bedarf es kaum einer Hervorhebung.

Welche Stellung man nun aber auch zu den Alten einnehmen mag, so dürfte es Jedermann von vornherein höchst unwahrscheinlich vorkommen, daß die Besten unter ihnen sich bei den einfachsten, bestimmtesten und allgemein bekanntesten Dingen von der Wahrheit sehr weit entfernt haben sollten und daß erst im 19. Jahrhundert nach Chr. die richtige Erkenntnis über diesen Gegenstand eingetreten wäre. Und allerdings hat ja auch in der grauen Vorzeit eine Secte bestanden, an welche man durch die Arbeiten der Herren v. Helmholtz und Kronecker lebhaft erinnert wird; es ist die antike Skepsis und ich verweise dazu, was im Besonderen die Zahlen angeht, auf des Sextus Empiricus Pyrrhoniarum Hypotyposeon, Lib. 3, cap. 18. Doch auch aus dem „Jahrhundert der Aufklärung", welches auf den Geist der vornehmen und gelehrten Akademien einen so nachhaltigen, immer noch fortbestehenden Einfluß geübt hat, ist ein vorzüglich gearbeitetes Werk zu verzeichnen, welches sogar von einem Mitgliede der Berliner Akademie der Wissenschaften geschrieben worden ist:

Louis Bertrand, Développement nouveau de la partie élémentaire des Mathématiques; Génève; aux dépens de l'Auteur; 1778.

Das Titelblatt dieser zweibändigen Schrift zeigt einen Kupferstich; im Vordergrunde ein Schäfer, der seine heimkehrende Herde mustert, im Hintergrunde ein Jäger, dessen Pfeil den ausgedehnten Raum durchfliegt; dazu das Motto: Tu Pastor numeros, extensi tu rationes Pandito Venator.

Gleich das erste Kapitel fängt so an: „Dans les commencemens, les hommes furent chasseurs ou bergers. Ces derniers eurent d'abord occassion de compter: il leur importait de ne pas perdre leurs bestiaux; et pour cela il fallait s'assurer le soir si tous étaient revenus du pâturage: celui qui n'en aurait que quatre ou cinq, aurait pu voir d'un coup d'oeil si tous étaient rentrés; mais un coup d'oeil n'aurait pas suffi à celui qui en aurait eu vingt. Considérant donc ces bestiaux revenant les uns après les autres, il aurait imaginé une suite de mots en pareil nombre, et gardant ces mots dans sa mémoire il les aurait répétées le lendemain à mesure que ses bestiaux seraient rentrés; afin d'être sûr, s'ils eussent cessé d'entrer avant qu'il eût achevé ses mots, qu'autant qu'il lui restait de mots à prononcer, autant il lui manquait des bestiaux etc."

Man sieht, es ist, mutatis mutandis, dasselbe Zahlenprinzip, wie bei den Herren v. Helmholtz und Kronecker; es handelt sich also hier nicht um etwas Neues, sondern nur, wie so oft, wieder um „alte, verkannte Wahrheit" (Ben Akiba).

Übrigens tritt auch bei beiden Gelehrten das gegnerische Motiv wider das actuale Unendliche offen zu Tage und da anerkanntermaßen selbst die „endlichen" Irrationalzahlen ohne entschiedene Heranziehung actual-unendlicher Mengen wissenschaftlich-streng nicht zu begründen sind*), so sind die Bestrebungen bei

*) M. vergl. meine „Grundlagen" pag. 21 und den letzten Abschnitt meiner Abh. in: Bihang till K. Svenska Vet.-Akad Handlingar. Bd. 11, No. 19.

beiden, namentlich bei Herrn Kronecker mit unerbittlicher Folgerichtigkeit und Strenge darauf gerichtet, die seit Pythagoras und Platon allgemein anerkannten Irrationalzahlen, mit Hilfe, ihnen geeignet scheinender, künstlich ausgedachter Subsidiärtheorien durchaus „unnötig" und überflüssig zu machen*) — anstatt sie naturgemäß zu erforschen und zu erklären. So sehen wir die in Deutschland, als Reaction gegen den überspannten Kant-Fichte-Hegel-Schelling'schen Idealismus eingetretene, jetzt herrschende und mächtige akademisch-positivistische Skepsis endlich auch bei der Arithmetik angelangt, wo sie, mit der äußersten, für sie selbst vielleicht verhängnisvollsten Consequenz, die letzten, ihr noch möglichen Folgerungen zu ziehen scheint. Denn was sollte ihr, nach Aufgebot solchen Scharfsinns und solcher Kräfte, zu ihrer Vollendung noch fehlen?

Eine eingehende Würdigung der beiden Arbeiten liegt nicht in meiner Absicht; es läßt sich annehmen, daß, entsprechend der Dignität ihrer Verfasser, auch Andere sie berücksichtigen und prüfen werden. Nur wenige Bemerkungen mögen mir noch erlaubt sein.

Die Arbeit des Herrn Kronecker (Philos. Aufsätze, pag. 263) beschränkt sich auf die Elemente der Zahlentheorie, steht aber in engem Zusammenhang mit seinen früheren, algebraischen und zahlentheoretischen Untersuchungen und kann daher wohl auch nur in diesem Zusammenhang vollständig gewürdigt werden. Einige Andeutungen des Aufsatzes geben der Erwartung Raum, daß die Theorie später in extenso weitergeführt werden soll. Man wird erst dann ein abschließendes Urteil über sein System fällen können, wenn die Beziehung seiner Zahlen zu der Geometrie und Mechanik hergestellt erscheinen wird. So lange dies nicht der Fall ist, wird ein Zweifel an der Brauchbarkeit seiner Theorie Jedermann erlaubt sein. Ich glaube sogar ohne jeden Zweifel vorhersagen zu können, daß es ihm nicht möglich sein wird, mit dem „ideellen Vorrat" (pag. 266) seiner „Bezeichnungen" den actual unendlichen

**) M. vergl. Kronecker, Crelle J., Bd. 99, pag. 336 und Molk's Abh. in Acta mathematica, Bd. VI.

Punktvorrat des räumlichen und zeitlichen Continuums „vollständig und auf die einfachste Weise zu beschreiben" (diese Ausdrucksweise bezieht sich auf G. Kirchhoff, Vorl. üb. math. Phys., 1. Vorl.; Kronecker, Crelle J., Bd. 92, pag. 93) und zwar hängt diese meine Überzeugung damit zusammen, daß ich im Jahre 1873 den Satz bewiesen habe: die Mächtigkeit eines Continuums ist höher, als die Mächtigkeit des Inbegriffs aller endlichen, ganzen Zahlen (M. v. Crelle J., Bd. 77, pag. 258 ff.).

In der Einleitung des Kroneckerschen Aufsatzes (Phil. Auff. pag. 264) kommt ein kleines parodirtes Gedicht von Schiller (Archimedes und der Jüngling) zum Abdruck, welches der „ewigen Zahl" gewidmet ist. Wenn, wie hier und in der v. Helmholtzschen Arbeit, die ursprüngliche Bedeutung der Zahlen auf bloße „Zahlzeichen" herabgedrückt werden soll, so will mir ihr Zusammenhang mit der „Ewigkeit" nicht recht einleuchten, weil ich bei diesem Worte stets die unübertroffene Definition des Boetius (De consolatione philosophiae, lib. 5, prosa 6) im Sinne habe.

Zum Schluß hebe ich hervor, daß mir der Beweis des Hauptsatzes (pag. 268) in dem Kroneckerschen Gedankengange nicht stringent zu sein scheint; es soll dort gezeigt werden, daß die „Anzahl" von der beim Zählen befolgten Ordnung unabhängig ist. Wenn man den Beweis genau verfolgt, so findet sich, daß darin, in andrer Form, derselbe Satz vorausgesetzt und gebraucht wird, welcher bewiesen werden soll; es liegt also das Versehen einer petitio principii vor.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich mir erlauben, ein andres Versehen zu berichtigen, welches Herr Kronecker gegenüber meinem verewigten Freunde und Kollegen Eduard Heine begangen hat. Letzterer wird in Crelle J., Bd. 99, pag. 336, Jahrg. 1886 hauptsächlich verantwortlich gemacht für die, von ihm, in der Abhandlung „Elemente der Funktionentheorie", Crelle J., Bd. 74, Jahrg. 1872), auf Grund des Begriffs der „Fundamentalreihe" (welchen Herr Heine „Zahlenreihe" nennt) entwickelte Theorie der Irrationalzahlen, obgleich Herr Heine in der Einleitung seiner Arbeit ausdrücklich gesagt hat, daß er den Grundgedanken von mir „entlehnt" habe, und daß er mir für „mündliche Mitteilungen verpflichtet“ sei, welche einen „bedeutenden Einfluß“ auf die Gestaltung seiner Arbeit ausgeübt hätten. Gleichzeitig erschien von mir in Bd. V der „Mathematischen Annalen“, in demselben Jahre 1872, eine Arbeit unter dem Titel: „Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen“, darin ich die wesentlichen Punkte meiner Theorie der Irrationalzahlen kurz entwickelt habe; auch bin ich später noch einmal in den „Grundlagen“, pag. 23 auf diesen Gegenstand zurückgekommen. Ich muß also die Verantwortung für die, von Herrn Kronecker so schwer angegriffene Theorie für mich in Anspruch nehmen, indem ich den seligen Herrn Heine von der vermeintlichen, seitens des Herrn Kronecker ihm zugeschriebenen Hauptschuld hiermit entlaste.

Ad III und IV. Von theologischer Seite ist mir eingewendet worden, daß dasjenige, was ich Transfinitum in natura naturata nannte, (M. v. diese Z. Bd. 88, pag. 227) „sich nicht verteidigen ließe und in einem gewissen Sinne“, den ich jedoch dem Begriffe „nicht zu geben schiene“, „den Irrtum des Pantheismus enthalten würde.“ Auf dieses Bedenken antwortete ich mit dem Briefe III, auf welchen hin ich die Gunst eines ausführlichen, an mich gerichteten Schreibens erfuhr, welches ich mir erlaube hier wörtlich, unter Weglassung einiger Epitheta höflich-verbindlichen Charakters, abzudrucken.

Es wurde mir auf den Brief III Folgendes geantwortet:

„Aus Ihrem Aufsatze*), „zum Problem des A.-U.“ ersehe ich zu meiner Genugthuung, wie Sie das Absolut Unendliche und das, was Sie das Act. Unendliche im Geschaffenen nennen, sehr wohl unterscheiden. Da Sie das letztere für ein „noch Vermehrbares“ (natürlich in indefinitum, d. h. ohne je ein nicht mehr Vermehrbares werden zu können) ausdrücklich erklären und dem Absoluten als „wesentlich Unvermehrbaren“ entgegenstellen, was

*) Es ist dies ein Separatabdruck der zweiten Hälfte meines in d. Z. Bd. 88 publicirten Aufsatzes, von den Worten an: „Trotz wesentl. Verschiedenheit ꝛc.“, auf pag. 230.

selbstverständlich ebenso von der Möglichkeit und Unmöglichkeit der Verkleinerung oder Abnahme gelten muß; so sind die beiden Begriffe des Absolut-Unendlichen und des Actual-Unendlichen im Geschaffenen oder Transfinitum wesentlich verschieden, so daß man im Vergleiche beider nur das Eine als eigentlich Unendliches, das andere als uneigentlich und aequivoce Unendliches bezeichnen muß. So aufgefaßt liegt, soweit ich bis jetzt sehe, in Ihrem Begriffe des Transfinitum keine Gefahr für religiöse Wahrheiten. Jedoch in einem gehen Sie ganz gewiß irre gegen die unzweifelhafte Wahrheit; dieser Irrtum folgt aber nicht aus Ihrem Begriffe des Transfinitum, sondern aus der mangelhaften Auffassung des Absoluten. In Ihrem werten Schreiben an mich sagen Sie nämlich erstens richtig (vorausgesetzt, daß Ihr Begriff des Transfinitum nicht bloß religiös unverfänglich, sondern auch wahr ist, worüber ich nicht urteile), ein Beweis geht vom Gottesbegriffe aus und schließt zunächst aus der höchsten Vollkommenheit Gottes Wesens auf die Möglichkeit der Schöpfung eines Transfinitum ordinatum. In der Voraussetzung, daß Ihr Transfinitum actuale in sich keinen Widerspruch enthält, ist Ihr Schluß auf die Möglichkeit der Schöpfung eines Transfinitum aus dem Begriffe von Gottes Allmacht ganz richtig. Allein zu meinem Bedauren gehen Sie weiter und schließen ‚aus seiner Allgüte und Herrlichkeit auf die Notwendigkeit einer thatsächlich erfolgten Schöpfung des Transfinitum'. Gerade weil Gott an sich das absolute unendliche Gut und die absolute Herrlichkeit ist, welchem Gute und welcher Herrlichkeit nichts zuwachsen und nichts abgehen kann, ist die Notwendigkeit einer Schöpfung, welche immer diese sein mag, ein Widerspruch, und die Freiheit der Schöpfung eine ebenso notwendige Vollkommenheit Gottes, wie alle seine anderen Vollkommenheiten, oder besser, Gottes unendliche Vollkommenheit ist (nach unseren notwendigen Unterscheidungen) ebenso Freiheit, als Allmacht, Weisheit, Gerechtigkeit 2c. Nach Ihrem Schlusse auf die Notwendigkeit einer Schöpfung des Transfinitum, müßten Sie noch viel weiter gehen. Ihr Transfinitum actuale ist ein Vermehrbares; nun wenn Gottes unendliche Güte und Herrlichkeit die Schöpfung des Transfinitum überhaupt mit Notwendigkeit fordert, so folgt, aus ganz demselben Grunde der Unendlichkeit seiner Güte und Herrlichkeit, die Notwendigkeit der Vermehrung bis es nicht mehr vermehrbar wäre, was Ihrem eigenen Begriffe des Transfinitum widerspricht. Mit andern Worten: wer die Notwendigkeit einer Schöpfung aus der Unendlichkeit der Güte und Herrlichkeit Gottes erschließt, der muß behaupten, daß alles Erschaffenbare wirklich von Ewigkeit erschaffen ist; und daß es vor Gottes Auge kein Mögliches giebt, das seine Allmacht ins Dasein rufen könnte. Diese Ihre unglückliche Meinung von der Notwenwendigkeit der Schöpfung wird Ihnen auch in Ihrer Bekämpfung der Pantheisten sehr hinderlich sein und wenigstens die Überzeugungskraft Ihrer Beweise abschwächen. Ich habe mich bei diesem Punkte so lange aufgehalten, weil ich innigst wünsche, daß Ihr Scharfsinn sich freimachte von einem so verhängnisvollen Irrtum, dem freilich manche Andere, selbst solche, die sich für rechtgläubig halten, verfallen sind."

Mit Allem, was in diesem Schreiben steht, stimme ich vollkommen überein, wie aus den wenigen Zeilen, welche unter V abgedruckt sind, hervorgeht. Denn da für mich die absolute Freiheit Gottes außer Frage stand, so war die „Notwendigkeit" an der betreffenden Stelle des Briefes IV meinerseits nicht so verstanden, wie es hier vorausgesetzt und mit Recht bekämpft wird. Macht man sich aber mit dem richtigen Sinn meiner Argumentation genauer vertraut, so scheint, wie ich bei einer späteren Gelegenheit erklären will, der in IV versuchsweise angedeutete apriorische Beweis für die thatsächlich *erfolgte* Schöpfung einer transfiniten Welt eine weitere Erwägung und Prüfung zu verdienen.

I.*)

Unter *Mächtigkeit* oder *Cardinalzahl* einer Menge M (die aus wohlunterschiedenen, begrifflich getrennten Elementen m, m′, ... besteht und insofern bestimmt und abgegrenzt ist) verstehe

*) Dieser Brief ist vor drei Jahren, am 15. Febr. 1884, an Herrn Prof. Dr *Kurd Laßwitz* in Gotha geschrieben worden. Er giebt im Wesentlichen den Inhalt eines Vortrags wieder, welchen ich im September 1883 in

ich den Allgemeinbegriff oder Gattungsbegriff (universale), welchen man erhält, indem man bei der Menge sowohl von der Beschaffenheit ihrer Elemente, wie auch von allen Beziehungen, welche die Elemente, sei es unter einander, sei es zu anderen Dingen haben, also im Besondern auch von der Ordnung, welche unter den Elementen herrschen mag, abstrahirt und nur auf das reflectirt, was allen Mengen gemeinsam ist, die mit M äquivalent sind. Ich nenne aber zwei Mengen M und N äquivalent, wenn sie sich gegenseitig eindeutig Element für Element einander zuordnen lassen. (M. v. Borchardt's Journal Bd. 84 pag. 242). Daher bediene ich mich auch des kürzeren Ausdrucks Valenz für Mächtigkeit oder Cardinalzahl. Von Mengen gleicher Valenz sage ich sie gehören zu derselben Mächtigkeitsklasse. Valenz einer Menge M ist also der Allgemeinbegriff unter dem alle Mengen derselben Klasse wie M stehen.

Eine der wichtigsten Aufgaben der Mengenlehre, welche ich der Hauptsache nach in der Abhandlung „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883" gelöst zu haben glaube, besteht in der Forderung, die verschiedenen Valenzen oder Mächtigkeiten der, in der Gesamtnatur, soweit sie sich unsrer Erkenntnis aufschließt, vorkommenden Mannigfaltigkeiten zu bestimmen; dazu bin ich durch die Ausbildung des allgemeinen Anzahlbegriffs wohlgeordneter Mengen oder, was dasselbe bedeutet, des Ordnungszahlbegriffs,*) gelangt.

---

der mathematischen Section der Naturforscherversammlung in Freiburg (Baden) gehalten habe. Infolge dieses Vortrags erhielt ich bald darauf einen Brief von Herrn R. Lipschitz (welchen ich in Bd. 88, p. 225 d. Z. erwähnt habe), worin mich dieser ausgezeichnete Mathematiker auf die Correspondenz (v. 12. Juli 1831) zwischen Gauß und Schumacher aufmerksam macht, in welcher sich Gauß gegen jede Hereinziehung des actualen Unendlichen in die Mathematik ausspricht.

*) Der Begriff Ordnungszahl ist ein besonderer Fall des Begriffes Ordnungstypus, welcher sich in derselben Weise auf jede einfach oder mehrfach geordnete Menge bezieht, wie die Ordnungszahl auf eine wohlgeordnete Menge. Herr C. Gutberlet hat, auf meinen Wunsch, hierauf Bezügliches nach einem Manuscript von mir in seinen Aufsatz (d. Z. Bd 88, pag. 183) eingefügt.

Die Definition dessen, was ich unter einer wohlgeordneten Menge M verstehe, findet sich in den „Grundlagen" pag 4.

Zwei wohlgeordnete Mengen M und N nenne ich von gleichem Typus oder auch einander ähnlich, wenn sie sich gegenseitig eindeutig derart auf einander beziehen lassen, daß wenn m und m′ irgend zwei Elemente der ersten, n und n′ die entsprechenden Elemente der anderen sind, alsdann immer das Rangverhältnis von m′ zu m dasselbe ist wie das Rangverhältnis von n′ zu n. Ich sage auch von zwei solchen wohlgeordneten Mengen M und N, daß sie auf einander abzählbar sind.

So sind beispielsweise die wohlgeordneten Mengen:

$$(a, a', a'') \text{ und } (b, b', b'')$$

ebenso aber auch die wohlgeordneten Mengen:

$$(a, a', a'' \ldots . a,^{(\nu)} \ldots .) \text{ und } (b, b', b'' \ldots b,^{(\nu)} \ldots .)$$

und auch

$$(a, a', a'' \ldots a,^{(\nu)} \ldots . c, c', c'') \text{ und } (b, b', b'' \ldots b^{(\nu)} \ldots . d, d', d'')$$

von gleichem Typus oder, was dasselbe heißt, auf einander abzählbar.

Unter Anzahl oder Ordnungszahl einer wohlgeordneten Menge M verstehe ich den Allgemeinbegriff, (Gattungsbegriff, universale) welchen man erhält, indem man bei der wohlgeordneten Menge M von der Beschaffenheit uud Bezeichnung ihrer Elemente abstrahirt und nur auf die Rangordnung reflectirt, durch welche die Elemente in Beziehung zu einander stehen; die Anzahl oder Ordnungszahl von M ist also sämtlichen wohlgeordneten Mengen desselben Typus gemeinsam, gewissermaßen dasjenige, was ihnen allen immanent ist. Hier tritt uns die Aufgabe entgegen, die in der Natur vorkommenden Ordnungszahlen oder Anzahlen wohlgeordneter Mengen zu bestimmen und sachgemäß mit Hilfe geeigneter Zeichen zu unterscheiden. Dazu führen folgende Definitionen und Sätze:

Seien M und N irgend zwei wohlgeordnete Mengen, α und β die zu ihnen gehörigen Ordnungszahlen; es ist immer

M vereinigt mit darauf folgendem N

wieder eine wohlgeordnete Menge von bestimmtem

Typus, die zugehörige Ordnungszahl sei γ. Wir definiren γ als die Summe von α und β, $\gamma = \alpha + \beta$, und nennen α den Augend, β den Addend dieser Summe. Sind α und β irgend zwei verschiedene, d. h. verschiedenen Typen entsprechende Ordnungszahlen, so kann bewiesen werden, daß entweder die Gleichung $\beta = \alpha + \xi$, oder die Gleichung $\alpha = \beta + \xi$ nach ξ (d. h. nach dem Addenden) und zwar nur auf eine Weise auflösbar ist; im ersten Falle nennen wir α kleiner als β, im zweiten α größer als β; ξ wird die Differenz beider Zahlen genannt; im ersteren Falle ist $\xi = \beta - \alpha$, im zweiten $\xi = \alpha - \beta$.

Man beweist leicht, daß wenn $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$ alsdann auch $\alpha < \gamma$. Ferner zeigt man, daß immer das Associationsgesetz besteht: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

Ähnlich wird das Produkt zweier Ordnungszahlen definirt, wobei aber zwischen Multiplikator und Multiplikandus wohl zu unterscheiden ist, denn im Allgemeinen ist $\alpha \cdot \beta$ von $\beta \cdot \alpha$ verschieden. Dagegen beweist man auch hier, ich möchte fast sagen, mit einem Blick, daß:

$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ (Associations-Gesetz.)

sowie auch, daß:

$\alpha . (\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ (Distributions-Gesetz mit α als Multiplicandus.)

Ich habe in den „Grundlagen" den Multiplikator links, den Multiplikandus rechts geschrieben; es hat sich mir aber gezeigt, daß der entgegengesetzte Gebrauch, den Multiplikandus links zuerst und dann rechts den Multiplikator zu schreiben, für die weitere Entwickelung der transfiniten Ordnungszahlenlehre der zweckmäßigere, ja fast unentbehrliche ist; aus diesem Grunde kehre ich also die betreffende Schreibweise der „Grundlagen", soweit sie sich auf Produkte bezieht, von jetzt ab immer um. Von der Wichtigkeit dieser Änderung überzeugt man sich, sobald man transfinite Ordnungszahlen der Form α^β in Betracht zieht, für welche nach dieser Schreibweise das allgemeine Gesetz gilt: $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$. Dieses selbe Gesetz würde aber nach dem Schreibmodus der „Grundlagen“ die abstoßende Form annehmen: $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\gamma + \beta}$.

Ich hebe noch folgendes hervor: wenn in einer wohlgeordneten Menge M irgend zwei Elemente m und m′ ihre Plätze in der gesamten Rangordnung wechseln, so wird dadurch der Typus nicht verändert, also auch nicht die Anzahl oder Ordnungszahl. Daraus folgt, daß solche Umformungen einer wohlgeordneten Menge die Anzahl derselben ungeändert lassen, welche sich auf eine endliche oder unendliche Folge von Transpositionen von je zwei Elementen zurückführen lassen. Da nun bei einer endlichen Menge, wenn der Inbegriff ihrer Elemente derselbe bleibt, jede Umformung sich auf eine Folge von Transpositionen zurückführen läßt, so liegt hierin der Grund, warum bei endlichen Mengen Ordnungszahl und Cardinalzahl gewissermaßen zusammenfallen, indem hier Mengen derselben Valenz in jeder Form, als wohlgeordnete Mengen gedacht, immer eine und dieselbe Ordnungszahl haben. Bei unendlichen Mengen tritt jedoch der Unterschied von Cardinalzahl und Ordnungszahl auf das Entschiedenste alsbald hervor. Ebenso hängen mit jenem Umstande bei endlichen Mengen die Commutationsgesetze der Addition und Multiplikation zusammen, indem daraus sehr leicht bewiesen wird, daß, wenn μ und ν zwei endliche Ordnungszahlen sind, alsdann stets: $\mu + \nu = \nu + \mu$ und $\mu \cdot \nu = \nu \cdot \mu$.

Für die kleinste transfinite Ordnungszahl, es ist diejenige welche den wohlgeordneten Mengen vom Typus:

$$(a, a' \, a'' \ldots, a^{(\nu)}, \ldots)$$

entspricht, muß ein neues Zeichen genommen werden, ich habe dazu den letzten Buchstaben des griechischen Alphabets ω gewählt.

Unter Ordnungszahlen der zweiten Zahlenklasse verstehe ich diejenigen Zahlen, welche zu wohlgeordneten Mengen von der Mächtigkeit der ersten Zahlenklasse 1, 2, 3 .. ν .... gehören; dieser Inbegriff von Ordnungszahlen konstituirt eine neue Valenz und zwar die auf die vorhergehende Valenz nächstfolgende, wie ich streng gezeigt habe (Grundlagen p. 35—38). Und derselbe Gedankengang führt uns zu höheren Zahlenklassen und zu den ihnen zukommenden höheren Valenzen. — Das ist eine wunderbare, ins Große gehende Harmonie, deren genaue Durchführung das Thema der transfiniten Zahlenlehre ist.

Ich glaubte dies Alles, in der gedrängten Kürze freilich, vorausschicken zu müssen, um auf einige Bemerkungen, die ich in Ihrem Schreiben finde, eingehen zu können. Zunächst mache ich auf die Allgemeinheit, Schärfe und Bestimmtheit meiner Zahldefinitionen aufmerksam; sie sind gleichlautend, gleichviel ob sie auf endliche oder auf unendliche Mengen bezogen werden. Jede transfinite Zahl der zweiten Zahlenklasse z. B. hat ihrer Definition nach dieselbe Bestimmtheit, dieselbe Vollendung in sich wie jede endliche Zahl.

Der Begriff ω beispielsweise enthält nichts Schwankendes, nichts Unbestimmtes, nichts veränderliches, nichts potenzielles, er ist kein ἄπειρον, sondern ein ἀφωρισμένον und das Gleiche gilt von allen andern transfiniten Zahlen. Er bildet ebenso wie jede endliche Zahl z. B. 7 oder 3 einen Gegensatz zu den unbestimmten Zeichen x, a, b der Buchstabenrechnung, mit welchen Sie unzutreffenderweise die transfiniten Zahlen in Ihrem Schreiben vergleichen. Sie weichen hierbei von dem Sinn, welchen die transfiniten Zahlen bei mir haben, ebenso ab, wie es Herr Wundt in der Auffassung gethan hat, welche sich über diesen Gegenstand in seiner Methodenlehre, Logik. Bd. II, pag. 126—129 findet. Wundt's Auseinandersetzung zeigt, daß er sich des fundamentalen Unterschieds von Uneigentlichunendlichem = veränderlichem Endlichem = synkategorematice infinitum (ἄπειρον) einerseits und Eigentlichunendlichem = Transfinitum = Vollendetunendlichem = Unendlichseiendem = kategorematice infinitum (ἀφωρισμένον) andrerseits nicht klar und deutlich bewußt ist; sonst würde er nicht jenes ebensowohl, wie dieses als Grenze bezeichnen; Grenze ist immer an sich etwas festes, unveränderliches, daher kann von den beiden Unendlichkeitsbegriffen nur das Transfinitum als seiend und unter Umständen und in gewissem Sinne auch als feste Grenze gedacht werden. Daher irrt Wundt auch darin, wenn er glaubt, das Transfinitum habe keine physikalische Bedeutung, wohl aber das potenziale Unendliche; streng genommen ist das Gegenteil hiervon richtig, weil das potenziale Unendliche nur Hilfs- und Beziehungsbegriff ist und stets auf ein zu Grunde liegendes transfinitum hinweist, ohne welches es weder sein noch gedacht werden kann. Der Unterschied von Uneigentlichunendlichem und Eigentlichunendlichem ist von den Philosophen sehr frühe, d. h. schon von den alten Griechen erkannt worden, freilich nicht überall mit gleicher Klarheit; ebenso findet man ihn bei den Neueren, mit Ausnahme vielleicht von Kant, Herbart und den Materialisten, Empiristen, Positivisten etc. deutlich ausgesprochen. Doch verdient hierbei Hegel nicht, wie Wundt zu meinen scheint, eine besondere Erwähnung, zumal bei Hegel Alles widerspruchsvoll, dunkel und confuse ist, ja sogar der Widerspruch, als hervortretendes Element seiner Philosophie von ihm selbst zum charakteristischen Eigentum seiner Denkweise erhoben worden ist, um welches ich wenigstens ihn nicht beneide. Dazu kommt, daß, was Hegel etwa Zutreffendes über den hier erörterten Unterschied gesagt haben mag, wie so manches andere bei ihm, dem Spinoza entlehnt ist. Bei allen Philosophen fehlt jedoch das Princip des Unterschiedes im Transfinitum, welches zu verschiedenen transfiniten Zahlen und zu verschiedenen Mächtigkeiten führt. Die meisten verwechseln sogar das Transfinitum mit dem unterschiedslosen höchsten Einen, mit dem Absoluten, dem absoluten Maximum, welches natürlich keiner Determination zugänglich und daher der Mathematik nicht unterworfen ist.

Ganz unzutreffend ist in der Wundt'schen Kritik auch die Zusammenstellung der neueren sogen. „metamathematischen" Speculationen mit meinen Arbeiten, sie haben nicht die geringste Ähnlichkeit und keine eigentliche Berührung, auch darf das Transfinitum nicht als „transscendent" (d. h. doch wohl die menschlichen Verstandeskräfte übersteigend) bezeichnet werden.

In der Ballauf'schen Recension*), die namentlich in den Noten der Redaction das Maximum des Unzutreffenden erreicht, ist

*) Zeitschrift f. exacte Philosophie Bd. 12 p. 375. Ich habe von dieser Besprechung den Eindruck gewonnen, daß der Kritiker, welcher in mehreren Beziehungen meine Gedanken sehr gut verstanden hat, durch den Terrorismus der Schul-Führer zu einer viel schärferen Stellungnahme wider mich gezwungen worden ist, als mit seinen eigenen Überzeugungen verträglich scheint. Dies tritt in auffälligster Weise p. 389 hervor, wo die Redaktion (Theod. Allihn und Otto Flügel) seiner freien, unbefangenen Überlegung plötzlich in die Zügel fällt, um die Ärmste in das dunkle, unterirdische Gefängnis der Herbart'schen Dogmatik, wohin kein erlösender Lichtstrahl dringt, zurückzuführen. Dem in dieser Note unter dem Text von der Redaktion Gesagten können zwei Antworten nicht erspart bleiben. Erstens scheint sie meine Arbeit nicht gelesen zu haben, denn sie nimmt nicht Rücksicht darauf, daß ich in den „Grundlagen" das potenziale Unendliche, welches ich Uneigentlich-unendliches, von dem aktualen Unendlichen, welches ich Eigentlich-unendliches dort nannte, strengstens unterscheide. Herbart und seine Schüler erkennen nur das erstere an, geben ihm allein den Namen des Unendlichen und wissen nichts vom Transfiniten. Dagegen wäre formell nichts einzuwenden, non cuivis homini contingit adire Corinthum, und es wäre für ihren Sprachgebrauch allerdings eine contradictio in terminis, dem Unendlichen das Prädikat des Bestimmtseins zu erteilen. Wie läßt sich aber der mir gemachte Vorwurf formell rechtfertigen, wonach ich die Prädikate des Bestimmtseins und des Unbestimmtseins hätte vereinigen wollen, um daraus ein „Unbestimmtes Bestimmtes" zu machen, da ich doch gerade im Gegenteil das Potenzialunendliche vom Transfiniten so streng getrennt habe, daß sie überall als toto genere Verschiedenes bei mir erscheinen? Die andre Antwort ist materieller Art und trifft mehr den Meister, als dessen unglückliche Schüler. Nach Herbart IV, 88 ff. soll der Begriff des Unendlichen „auf einer wandelbaren Grenze, welche in jedem Augenblick weiter fortgeschoben werden kann, bezw. muß" beruhen. „Von dieser Wandelbarkeit der Grenze abgesehen, heißt den Begriff des Unendlichen aufheben, heißt nichts Unendliches, sondern Endliches denken. Von dieser Wandelbarkeit der Grenze oder der beständigen Möglichkeit des Fortschreitens sieht man aber ab, sobald man das Unendliche als fertig oder als real vorhanden setzt, man setzt dann eben nicht mehr eine unendliche, sondern eine endliche Menge. Es handelt sich hierbei gar nicht um die subjektive Unfähigkeit, die außerstande ist, jemals mit dem Geschäft des Zählens oder Setzens zu Ende zu kommen, sondern um den Begriff des Unendlichen selbst, dessen wesentliches, nicht wegzudenkendes Merkmal eben jene wandelbare Grenze, jenseits deren immer noch etwas zu finden ist. Inbetreff des Zählens läßt sich das eben Gesagte auch dahin aussprechen: bei jeder endlichen Menge von Dingen, wie groß dieselbe auch sein mag, bietet sich sofort die Möglich-

nicht einmal die letzte, witzig sein sollende Wendung am Schlusse richtig, sondern beruht auf einem offenbaren Irrtum. Wenn wir eine, von A anfangende unendliche Grade AO haben und wir setzen an ihren Anfang A die endliche Strecke BA, so erhalten wir wieder eine unendliche von B ausgehende Grade BO, in welcher das hinzukommende gerade Stück nicht die geringste Änderung in Bezug auf die „Größe" hervorgebracht hat, was daraus erkannt wird, daß man die neue Grade zur völligen Congruenz mit der

---

keit des objektiven Zählens dar [wenn die Menge etwa tausendmalmillionen Gegenstände umfaßt, so möchte ich bezweifeln, daß es den Herren Redakteuren möglich sein wird, die objektive Zählung sofort auszuführen; Anm. d. Verf.]. Hingegen ist bei einer unendlichen Menge [also doch eine gewisse Anerkennung der unendlichen Menge!] die Möglichkeit des Zählens schlechthin ausgeschlossen [was in dem hier gemeinten Sinne von Niemandem bezweifelt wird], weil eben das wahrhaft Unendliche nur als ein Unbestimmtes, Unfertiges gefaßt werden kann. [Also das „wahrhaft Unendliche" soll schlechter sein, als das Endliche!?] U. s. w." Ist es den Herren gänzlich aus der Erinnerung gekommen, daß, von den Reisen abgesehen, die in der Phantasie oder im Traume ausgeführt zu werden pflegen, daß, sage ich, zum sichern Wandeln oder Wandern fester Grund und Boden sowie ein geebneter Weg unbedingt erforderlich sind, ein Weg, der nirgends abbricht, sondern überall, wohin die Reise führt, gangbar sein und bleiben muß? Ist denn die Mahnung, welche Heinrich Hoffmann in seinem „Struwelpeter" (Frankfurt a/Main, bei Loening) mit dem „Hans Guck in die Luft" so deutlich uns Allen zu Gemüte geführt hat, nur an den Herren Herbartianern ohne jeden Eindruck geblieben? Die weite Reise, welche Herbart seiner „wandelbaren Grenze" vorschreibt, ist eingestandenermaßen nicht auf einen endlichen Weg beschränkt; so muß denn ihr Weg ein unendlicher, und zwar, weil er seinerseits nichts Wandelndes, sondern überall fest ist, ein aktualunendlicher Weg sein. Es fordert also jedes potenziale Unendliche (die wandelnde Grenze) ein Transfinitum (den sichern Weg zum Wandeln) und kann ohne letzteres nicht gedacht werden (M. vergl. hiermit Abschn. V und VII dieser Abhandlung). Da wir uns aber durch unsre Arbeiten der breiten Heerstraße des Transfiniten versichert, sie wohl fundirt und sorgsam gepflastert haben, so öffnen wir sie dem Verkehr und stellen sie, als eiserne Grundlage, nutzbar allen Freunden des potenzialen Unendlichen, im Besondern aber der wanderlustigen Herbart'schen „Grenze" bereitwilligst zur Verfügung; gern und ruhig überlassen wir die Rastlose der Eintönigkeit ihres durchaus nicht beneidenswerten Geschicks; wandle sie nur immer weiter, es wird ihr von nun an nie mehr der Boden unter den Füßen schwinden. Glück auf die Reise!

alten bringen kann; der Gewinn, den sie durch das hinzugekommene Stück BA erhalten hat, ist zwar real vorhanden und unbestreitbar, verschwindet aber völlig wenn man blos auf das den beiden Linien AO und BO anhaftende Accidens der Größe achtet. Wer hier wie überhaupt bei actual unendlichen Quantitäten einen Verstoß gegen das Widerspruchsprincip findet, irrt durchaus, indem er den abstractiven Character der „Größe" aus dem Auge verliert und sie fälschlich mit der substanziellen Entität des vorliegenden Quantums identificirt*). In ein ähnliches Versehen scheint aber auch Wundt

*) Auf diesen Irrtum gründen viele ihre sogenannten Beweise für die Unmöglichkeit actual unendlicher Quantitäten oder Zahlen; man vergleiche beispielsweise: Ch. Renouvier, Esquisse d'une classification systematique des doctrines philosophiques t. I. p. 100. Paris 1885. Salv. Tongiorgi. Inst. philos. ed. X, t. II. ontol. § 350; 3°. T. Pesch. Inst. phil nat. § 412; 1°, 2°, 3°, 4°. Bei dieser Gelegenheit erlaube ich mir noch auf andere Versehen aufmerksam zu machen, welche sich bei letzteren beiden Autoren, sowie auch bei vielen Anderen finden. Tongiorgi sagt in ontol. § 349, prop. 9: „Danturne in eadem linea puncta, quae ab X actu infinite distent, an non? Si non dantur haec puncta, linea est finita." Ebenso behauptet Pesch, § 425, arg. 3, 1°; „Linea autem cujus omnia puncta inter se distantiam habent finitam, ipsa finita est." Während im Vordersatz das Endlichsein in distributiver Bedeutung secundum partes vorausgesetzt wird, schließt man im Nachsatz, ohne jede Berechtigung, auf das Endlichsein im kollektiven Sinne quoad totum; was sich, nach S. Th. Aq. Opusc. de fallaciis, cap. XI., als fallacia secundum quid et simpliciter zu erkennen giebt.

Betrachten wir ferner bei Tongiorgi § 350; 2° (Pesch, § 412, 3°, 4°) folgende Argumentation: „Supponatur ex unitatum accumulatione multitudo infinita. Haec erit numerus infinitus, aequabitque numerum qui ipsum immediate praecedit, unitate adjecta. Iam numerus praecedens eratne infinitus, an vero non erat? Infinitum illum dicere non potes; nam crescere adhuc poterat, ac reipsa crevit additione unitatis. Erat ergo finitus, et unitate addita, factus est infinitus. Nimirum ex duobus finitis infinitum emersit; id quod absurdum est."

Hier wird fälschlich vorausgesetzt, eine aktualunendliche Zahl müsse notwendig (weil man bei endlichen Zahlen daran gewöhnt ist) eine ihr zunächst vorhergehende ganze Zahl haben, aus welcher sie durch Hinzufügung einer Eins hervorginge. Diese Voraussetzung ist beispielsweise weder an der kleinsten Kardinalzahl $\overline{\omega}$, noch an der kleinsten Ordnungszahl ω erfüllt; ihnen gehen resp. die endlichen Kardinalzahlen, von denen keine die größte ist und die endlichen Ordnungszahlen, welche auch kein Maximum haben, voran; es wäre also eine widersinnige Annahme, von einer der Kardinalzahl $\overline{\omega}$ nächst pag. 128 geraten zu sein. Es bedarf also keiner weiteren Rechtfertigung, daß ich in den „Grundlagen" gleich im Anfang zwei toto genere von einander verschiedene Begriffe unterscheide, welche ich das Uneigentlichunendliche und das Eigentlichunendliche nenne;

---

vorhergehenden Kardinalzahl oder von einer der Ordnungszahl ω zunächst kleineren Ordnungszahl zu reden. Von falschen Prämissen kann aber keine wahre Folge erwartet werden. Die ganze Argumentation muß also für immer verworfen werden.

Herr Gutberlet sucht in seinem Werke „das Unendliche metaph. und mathem. betrachtet, Mainz 1878" p. 18 dieselbe Beweisführung dadurch zu widerlegen, daß er, ähnlich wie es schon Leibnitz gethan, die unendliche „Zahl" preisgiebt, dagegen die unendliche „Menge" zu retten sucht. Es kann aber, m. E., den Gegnern des Transfiniten kein größerer Gefallen geschehen, als mit dieser Wendung; denn unendliche Zahl und Menge sind unlösbar mit einander verknüpft; giebt man die eine auf, so hat man kein Recht mehr auf die andere. Ebensowenig kann ich mich damit einverstanden erklären, daß Gutberlet, verleitet durch zweideutige Erklärungen bei Leibniz und Newton und unter Berufung auf neuere „mathematische Autoritäten", wie Lübsen, Klügel, R. Hoppe, aus den „Differentialen" (welche nur als beliebig klein werdende Größen aufzufassen sind und die alle die Null zur gemeinschaftlichen Grenze haben; m. vergl. die Abschnitte VI und VII dieses Aufsatzes), indem er unzulässige Divisionen fingirt, Stützen für das A.-U. zu gewinnen sucht. Er wird in dieser Beziehung von dem R. P. T. Pesch (Inst. phil. nat. §§ 421, 422) mit den zutreffendsten Gründen widerlegt.

Umsomehr muß rühmend hervorgehoben werden, daß Herr Prof. Gutberlet mit Nachdruck und Erfolg (1. Abth. 1 Abschn. §§ 3, 5 und 6 seines Werkes) auf die Abhängigkeit des potenzialen Unendlichen von einem zu Grunde liegenden A.-U. hinweist; mit Recht wird von ihm betont, daß a parte rei eigentlich gar kein potenziales Unendliches existirt; was auch von Stöckl, der das P.-U. für ein ens rationis erklärt, anerkannt worden ist.

Dagegen finde ich aber an verschiedenen Stellen bei Gutberlet (z. B. p. 45 seines Werkes) die durchaus unhaltbare Thesis ausgesprochen, daß „im Begriffe der unendlich gedachten Größe der Ausschluß aller Möglichkeit der Vermehrung" liege. Dies kann nur in Bezug auf das Absolutunendliche zugestanden werden, das Transfinite, obgleich als bestimmt und größer als jedes Endliche gefaßt, teilt mit dem Endlichen den Charakter unbeschränkter Vermehrbarkeit.

Das durch Gelehrsamkeit und Scharfsinn ausgezeichnete Werk des R. P. Tilm. Pesch veranlaßt mich, was seinen dem Unendlichen gewidmeten Abschnitt betrifft, zu noch einer Bemerkung.

Der Verfasser legt in § 403 seiner Untersuchung zwei verschiedene Definitionen des Unendlichen zu Grunde, die er promiscue in seinen Beweisen sie müssen als in *keiner* Weise vereinbar oder verwandt angesehen werden. Die so oft zu allen Zeiten zugelassene Vereinigung oder Vermengung dieser beiden völlig disparaten Begriffe enthält meiner festen Überzeugung nach die Ursache unzähliger Irrtümer; im Besonderen sehe ich aber hier den Grund, warum man nicht schon früher die *transfiniten Zahlen entdeckt hat*.

Um diese Verwechselung von vornherein auszuschließen, bezeichne ich die kleinste transfinite Zahl mit einem, von dem gewöhnlichen, dem Sinne des Uneigentlichunendlichen entsprechenden Zeichen ∞, verschiedenen Zeichen, nämlich mit ω.

Allerdings kann ω gewissermaßen als die Grenze angesehen werden, welcher die veränderliche endliche ganze Zahl ν zustrebt, doch nur in dem Sinne, daß ω die *kleinste* transfinite Ordnungszahl d. h. die kleinste *festbestimmte* Zahl ist, welche größer ist, als *alle* endlichen Zahlen ν; ganz ebenso wie $\sqrt{2}$ die Grenze von gewissen veränderlichen, wachsenden, rationalen Zahlen ist, nur daß hier noch dies hinzukommt, daß die Differenz von $\sqrt{2}$ und diesen Nährungsbrüchen beliebig klein wird, wogegen $\omega - \nu$ immer gleich ω ist; dieser Unterschied ändert aber *nichts* daran, daß ω als ebenso bestimmt und vollendet anzusehn ist, wie $\sqrt{2}$, und ändert auch nichts daran, daß ω ebensowenig Spuren der ihm zustrebenden Zahlen ν an sich hat, wie $\sqrt{2}$ irgend etwas von den rationalen Näherungsbrüchen.

Die transfiniten Zahlen sind in gewissem Sinne selbst *neue Irrationalitäten* und in der That ist die in meinen Augen

---

benutzt, ohne den Nachweis geführt zu haben, daß sie sich auf Wechselbegriffe bezögen. Dies ist sicherlich schon formell unzulässig; im vorliegenden Fall würde aber sogar der Versuch eines Beweises für die Korrelation der beiden Begriffe zur Überzeugung geführt haben, daß es sich dabei um zwei toto genere verschiedene Dinge handelt. Die *erste* Definition: „infinitum illud dicitur, cujus aliquid semper est extra“ (Aristoteles phys. l. 3, c. 4, 203a 20) paßt eigentlich nur auf das ἄπειρον oder potenziale Unendliche; die *zweite* Definition: „infinitum id est, quo non sit majus, nec esse possit“ (welche sich übrigens in dem von Pesch angeführten Arist. l. 1 de coelo c. 5 *nicht* findet) entspricht dagegen nur dem Absolutunendlichen. Das Transfinitum ist also in diesem Werke ganz unberücksichtigt geblieben.

beste Methode die endlichen Irrationalzahlen zu definiren, ganz ähnlich, ja ich möchte sogar sagen im Princip dieselbe, wie meine oben beschriebene Methode der Einführung transfiniter Zahlen. Man kann unbedingt sagen: die transfiniten Zahlen stehen oder fallen mit den endlichen Irrationalzahlen; sie gleichen einander ihrem innersten Wesen nach; denn jene, wie diese, sind bestimmt abgegrenzte Gestaltungen oder Modificationen (*ἀφωρισμένα*) *) des actualen Unendlichen.

II. **)

So wenig es meinen Neigungen entspricht, Anderer Ansichten zu kritisiren, habe ich doch, in Anbetracht der Wichtigkeit des Gegenstandes und auf Ihren ausdrücklichen, wiederholt kundgegebenen Wunsch hin, mir die, in Ihrem Aufsatze ***) „Das Problem des Unendlichen" angegebenen Gründe gegen das „Infinitum actuale existens seu in concreto", welche Ihrer Meinung nach nicht gleichermaßen gegen das „Inf. act. possibile" anwendbar wären, genau angesehen und gefunden, daß auch hier wieder, wie in allen dasselbe Ziel verfolgenden Beweisen, ein versteckter Zirkelschluß zu Grunde liegt. In meinem Briefe an Herrn G. Eneström habe ich gesagt, daß alle sogen. Beweise gegen die act. unendl. Zahlen auf einem *πρῶτον ψεῦδος* beruhen, über das man sich nicht volle Rechenschaft giebt, welches aber, in jedem mir

*) V. v. Conimbricenses Phys. Lib. III, cap. 8, quaest. 1, art. 1. Diese Stelle bezieht sich auf Aristoteles *Φυ* 8 · 208ᵃ 6, wo dem *ἄπειρον δυνάμει* ein *ἄπειρον ὡς ἀφωρισμένον* entgegengestellt und, wie ich gelegentlich in extenso beweisen werde, mit gänzlich unzureichenden Gründen bekämpft wird. V. v. auch S. Thomas in phys. III, lectio 13. Die Gründe des Stagiriten beweisen nichts Anderes, als daß die Argumente, welche die alten Naturphilosophen für die notwendige Existenz eines *ἄπειρον ἀφωρισμένον* vorgebracht haben, nicht zwingend sind; er beweist aber nicht die Unmöglichkeit eines existirenden *ἄπειρον ἀφωρισμένον*; mit anderen Worten, er beweist nicht, daß letzterer Begriff, wenn man ihn als Transfinitum faßt, ein widersprechender sei und es würde ihm solches auch schwer, oder, richtiger gesagt, unmöglich gewesen sein.

**) Dieses Schreiben ist an Herrn Prof. Gutberlet in Fulda gerichtet worden und trägt das Datum v. 24. Januar 1886.

***) Zeitschr. für Philos. u. philos. Kritik von Fichte u. Ulrici. 88. Bd., S. 199.

chung $1 + \omega = \omega$ wiederfinden, wo auf der linken Seite $1 = A'A$ die Bedeutung des Augendus, $\omega = AO$ die des Addendus hat. Dagegen ist allerdings $\omega + 1$, wo ω als Augendus, 1 als Addendus figuriren, wie aus den Principien meiner „Grundlagen" geschlossen wird, eine von ω verschiedene transfinite Zahl, nämlich die auf die kleinste ω nächstfolgende ganze transfinite Ordnungszahl; letzteres hat aber auf Ihr Exempel keine Anwendung, da bei Ihnen der Augendus eine endliche und im Endlichen liegende Größe $A'A = 1$, der Addendus $AO = \omega$ eine act. unendliche ist.

Da ich denselben Gegenstand von anderen Gesichtspunkten aus in einem dieser Tage von mir geschriebenen Briefe besprochen habe, so möchte ich Ihnen beifolgende Abschrift eines Auszuges*) davon verehren, mit dem Wunsche, daß Sie mir sowohl über das Vorliegende, wie auch über das in dem soeben erwähnten Briefe Gesagte Ihre Meinung gefälligst schreiben mögen.**)

*) Siehe unten III.

**) Inbetreff vorstehender Ausführung läßt sich, wie es scheint, Folgendes bemerken. Eben weil die zu verrückende Linie als starr vorausgesetzt ist, so muß mit Verschiebung von A nach A' jeder Punkt der Linie um ebensoviel verschoben werden, und somit auch der unendlich ferne Endpunkt O. Die Unendlichkeit könnte nur dann eine Unmöglichkeit des Verschiebens bedingen, wenn die ziehende Kraft wohl zur Verschiebung eines endlichen, nicht aber eines unendlichen Drahtes ausreichte. Aber darum können wir eine unendliche Zugkraft voraussetzen.

Nun kann man allerdings dagegen einwenden, daß wegen der metaphysischen Unmöglichkeit, eine unendliche Linie in die Endlichkeit hereinzuziehen, die Ausführung trotz der Erfüllung aller physischen Bedingungen, selbst unter Voraussetzung eines unendlich starken Einflusses, doch nicht möglich wird. Wir befinden uns hier in demselben Falle, den Suarez bei der Annahme einer ewigen (unveränderlichen) Welt voraussetzt. Feuer, so meint er, in Ewigkeit an Werg angelegt, würde dieses trotz seiner großen Verbrennbarkeit, nicht entzünden können. Denn der Verbrennungsprozeß von einigen Minuten müßte ein Stück von der Ewigkeit abschneiden und so dieselbe endlich machen.

Ich glaube aber kaum, daß Jemand sich dazu verstehen wird, zu denken, daß das Feuer das Werg ewig unversehrt lasse. Darum muß eben die Annahme einer ewigen mit Veränderungen verbundenen Welt als unstatthaft bezeichnet werden. Ähnliches scheint auch von dem unendlichen Draht zu gelten. (Anm. des Herrn Prof. Gutberlet.)

Es war meine Absicht, diesem heutigen Schreiben noch einige andere Erinnerungen und Bedenken sowohl mit Bezug auf die in Ihrem Aufsatz vorkommenden Schlüsse, wie auch über Verschiedenes in Ihrer Schrift: „Das Unendliche mathem. und metaph. betrachtet" beizufügen; doch halten mich andere Obliegenheiten davon ab, so daß ich mir diese Aufgabe für das nächste Mal zurücklege . . . .

III.*)

Die Zeilen, welche Ew. . . . . am 25. Dezember 1885 an mich zu richten die Güte hatten, enthalten einige Zweifel in Bezug auf die philosophische Grundlage meiner, Ihnen zur Prüfung übersandten Arbeiten; vermutlich sind es gewisse von mir gebrauchte Worte, deren Bedeutung ich nicht genauer erklärt habe, welche meine Meinung nicht ganz bestimmt erscheinen lassen, und ich möchte mir daher erlauben, mich in Kürze genauer auszusprechen.

Die in meinem kleinen Aufsatze: „Über die verschiedenen Standpunkte inbezug auf das actuale Unendliche" vorkommenden Ausdrücke „Natura naturans" und „Natura naturata" gebrauche ich in derselben Bedeutung, welche ihnen die Thomisten gegeben haben, so daß der erstere Ausdruck Gott als den, außerhalb der aus Nichts von ihm geschaffenen Substanzen stehenden Schöpfer und Erhalter derselben, der letztere aber die durch ihn geschaffene Welt bezeichnet. Dementsprechend unterscheide ich ein „Infinitum aeternum increatum sive Absolutum", das sich auf Gott und seine Attribute bezieht, und ein „Infinitum creatum sive Transfinitum", das überall dort ausgesagt wird, wo in der Natura creata ein actual Unendliches constatirt werden muß, wie beispielsweise in Beziehung auf die, meiner festen Überzeugung nach, actual unendliche Zahl der geschaffenen Einzelwesen, sowohl im Weltall, wie auch schon auf unserer Erde und, aller Wahrscheinlichkeit nach, selbst in

*) Die folgenden zwei Briefe (III und IV) v. 22. und 29. Januar 1886 waren an einen großen Theologen gerichtet; derselbe ist, wie ich mit Schmerz erwähne, am 11. December 1886 in die Ewigkeit abgerufen.

jedem noch so kleinen, ausgedehnten Theil des Raumes, worin ich mit Leibnitz ganz übereinstimme (Epistola ad Foucher, t. 2 operum ed. Dutens, p. I pag. 243).

Obwohl ich weiß, daß die Lehre vom „Infinitum creatum", zwar nicht von allen, doch von den meisten Kirchenlehrern bekämpft wird und im Besonderen auch vom großen S. Thomas Aquinatus in seiner S. theol. p. 1. q 7. a. 4 gewisse Meinungen dagegen angeführt werden, so sind doch die Gründe, welche in dieser Frage im Verlauf zwanzigjähriger Forschung, ich kann sagen wider Willen, weil im Gegensatz zu von mir stets hochgehaltener Tradition, von Innen her sich mir aufgedrängt und mich gewissermaßen gefangen genommen haben, stärker als Alles, was ich bisher dagegen gesagt fand, obgleich ich es in weitem Umfange geprüft habe. Auch glaube ich, daß die Worte der heil. Schrift, wie z. B. Sap. c. 11. v. 21: „Omnia in pondere, numero et mensura disposuisti.", in denen ein Widerspruch gegen die actual unendlichen Zahlen vermutet wurde, diesen Sinn nicht haben; denn, gesetzt den Fall, es gäbe, wie ich bewiesen zu haben glaube, actual unendliche „Mächtigkeiten", d. h. Cardinalzahlen und actual unendliche „Anzahlen wohlgeordneter Mengen" d. h. Ordnungszahlen (welche zwei Begriffe, wie ich gefunden habe, bei actual unendlichen Mengen außerordentlich verschieden sind, während bei endlichen Mengen ihr Unterschied kaum bemerkbar ist), so würden ganz sicherlich auch diese transfiniten Zahlen in jenem heiligen Ausspruche mitgemeint sein und es darf daher, meines Erachtens, derselbe nicht als Argument gegen die actual unendlichen Zahlen genommen werden, wenn ein Cirkelschluß vermieden werden soll.

Daß aber ein „Infinitum creatum" als existent angenommen werden muß, läßt sich mehrfach beweisen. Um Ew. . . . nicht zu lange aufzuhalten, möchte ich mich in dieser Sache auf zwei kurze Andeutungen beschränken.

Ein Beweis geht vom Gottesbegriff aus und schließt zunächst aus der höchsten Vollkommenheit Gottes Wesens auf die Möglichkeit der Schöpfung eines Transfinitum ordinatum, sodann aus seiner Allgüte und Herrlichkeit auf die Notwendigkeit der thatsäch-

lich erfolgten Schöpfung eines Transfinitum. Ein anderer Beweis zeigt a posteriori, daß die Annahme eines Transfinitum in natura naturata eine bessere, weil vollkommnere Erklärung der Phänomene, im Besondern der Organismen und der psychischen Erscheinungen ermöglicht, als die entgegengesetzte Hypothese. . . . . . .
. . . .

IV.

. . . . Ew. . . sage ich meinen herzlichsten Dank für die Ausführungen des gütigen Schreibens vom 26. Januar 1886, denen ich mit voller Überzeugung zustimme; denn in der kurzen Andeutung meines Briefes vom 22. ds. war es an der betreffenden Stelle nicht meine Meinung, von einer objektiven, metaphysischen Notwendigkeit zum Schöpfungsakt, welcher Gott, der absolut Freie unterworfen gewesen wäre, zu sprechen, sondern ich wollte nur auf eine gewisse subjektive Notwendigkeit für uns hinweisen, aus Gottes Allgüte und Herrlichkeit auf die thatsächlich erfolgte (nicht a parte Dei zu erfolgende) Schöpfung, nicht blos eines Finitum ordinatum, sondern eines Transfinitum ordinatum zu schließen. . . . .

V.*)

Mit Vergnügen entnehme ich Ihrem Schreiben vom 23. ds., daß Sie dem Gegenstand meiner Untersuchungen ein Interesse zuwenden, für welches mein Dank um so größer ist, je seltener es mir von namhaften Naturforschern und Ärzten entgegengebracht wird; denn in diesen Kreisen ist das, was ich „horror infiniti“ nenne, nach den verschiedensten Beziehungen und aus den mannigfaltigsten Ursachen, im Allgemeinen ein tief eingewurzeltes Übel.

Fassen wir die Definitionen des potenzialen und actualen Unendlichen scharf ins Auge, so dürften die Schwierigkeiten, von denen Sie mir schreiben, bald beseitigt sein.

---

*) Dieser Brief, datirt v. 28. Febr. 1886, ist an Prof. Dr. med. A. Eulenburg in Berlin gerichtet.

I. Das P.-U.*) wird vorzugsweise dort ausgesagt, wo eine unbestimmte, veränderliche endliche Größe vorkommt, die entweder über alle endlichen Grenzen hinaus wächst (unter diesem Bilde denken wir uns z. B. die sogenannte Zeit, von einem bestimmten Anfangsmomente an gezählt) oder unter jede endliche Grenze der Kleinheit abnimmt (was z. B. die legitime Vorstellung eines sogenannten Differentials ist); allgemeiner spreche ich von einem P.-U. überall da, wo eine unbestimmte Größe in Betracht kommt, die unzählig vieler Bestimmungen fähig ist.

II. Unter einem A.-U.**) ist dagegen ein Quantum zu verstehen, das einerseits nicht veränderlich, sondern vielmehr in allen seinen Teilen fest und bestimmt, eine richtige Constante ist, zugleich aber andrerseits jede endliche Größe derselben Art an Größe übertrifft. Als Beispiel führe ich die Gesamtheit, den Inbegriff aller endlichen ganzen positiven Zahlen an; diese Menge ist ein Ding für sich und bildet, ganz abgesehen von der natürlichen Folge der dazu gehörigen Zahlen, ein in allen Teilen festes, bestimmtes Quantum, ein *ἀφωρισμένον*, das offenbar größer zu nennen ist, als jede endliche Anzahl.***) Ein anderes

---

*) d. h. das potenziale Unendliche (*ἄπειρον*).

**) d. h. das actuale Unendliche (*ἀφωρισμένον*).

***) Man vergleiche die hiermit übereinstimmende Auffassung der ganzen Zahlenreihe als actual unendliches Quantum bei S. Augustin, De civitate Dei, lib. XII, cap. 19: Contra eos, qui dicunt ea, quae infinita sunt, nec Dei posse scientia conprehendi. Wegen der großen Bedeutung, welche diese Stelle für meinen Standpunkt hat, will ich sie wörtlich hier aufnehmen und behalte mir vor, dieselbe bei einer späteren Gelegenheit ausführlich zu besprechen. Das Kapitel lautet: „Illud autem aliud quod dicunt, nec Dei scientia quae infinita sunt posse conprehendi: restat eis, ut dicere audeant atque huic se voragini profundae inpietatis inmergant, quod non omnes numeros Deus noverit. Eos quippe infinitos esse, certissimum est; quoniam in quocumque numero finem faciendum putaveris, idem ipse, non dico uno addito augeri, sed quamlibet sit magnus et quamlibet ingentem multitudinem continens, in ipsa ratione atque scientia numerorum non solum duplicari, verum etiam multiplicari potest. Ita vero suis quisque numerus proprietatibus terminatur, ut nullus eorum par esse cuicumque alteri possit. Ergo et dispares inter se atque diversi sunt, et singuli quique finiti sunt, et om-

Beispiel ist die Gesamtheit aller Punkte, die auf einem gegebenen Kreise (oder irgend einer andern bestimmten Curve) liegen. Ein drittes Beispiel ist die Gesamtheit aller streng punktartig vorzustellender Monaden, welche zum Phänomen eines vorliegenden Naturkörpers als constitutive Bestandteile beitragen.

---

nes infiniti sunt. Itane numeros propter infinitatem nescit omnes Deus, et usque ad quandam summam numerorum scientia Dei pervenit, ceteros ignorat? Quis hoc etiam dementissimus discerit? Nec audebunt isti contemnere numeros et eos dicere ad Dei scientiam non pertinere, apud quos Plato Deum magna auctoritate commendat numeris mundum fabricantem. Et apud nos Deo dictum legitur: Omnia in mensura et numero et pondere disposuisti (Sap. 11, 21); de quo et propheta dicit: Qui profert numerose saeculum (Esai. 40, 26) et Salvator in evangelio: Capilli, inquit, vestri omnes numerati sunt (Mt. 10, 30). Absit itaque ut dubitemus, quod ei notus sit omnis numerus, cujus intelligentiae [absolutae], sicut in psalmo canitur, non est numerus (Ps. 147, 5). Infinitas itaque numeri, quamvis infinitorum numerorum nullus sit numerus [finitus], non est tamen inconprehensibilis ei, cujus intelligentiae [absolutae] non est numerus. Quapropter si, quidquid scientia conprehenditur, scientis conprehensione finitur: profecto et omnis infinitas quodam ineffabili modo Deo [de] finita [ἀφωρισμένον] est, quia scientiae ipsius inconprehensibilis non est. Quare si infinitas numerorum scientiae Dei, qua conprehenditur, esse non potest in [de] finita: qui tandem nos sumus homunculi, qui ejus scientiae limites figere praesumamus, dicentes quod, nisi eisdem circuitibus temporum eadem temporalia repetantur, non potest Deus cuncta quae facit vel praescire ut faciat, vel scire cum fecerit? cujus sapientia simpliciter multiplex et uniformiter multiformis tam inconprehensibili conprehensione omnia inconprehensibilia conprehendit, ut, quaecumque nova et dissimilia consequentia praecedentibus si semper facere vellet, inordinata et inprovisa habere non posset, nec ea provideret ex proximo tempore, sed aeterna praescientia contineret." An einzelnen Stellen habe ich, durch Klammern erkenntliche, Einschaltungen zu machen mir erlaubt, die den Sinn, welchen die betreffenden Worte an den betreffenden Stellen bei S. Augustin m. Erachtens nach haben, deutlicher hervortreten lassen. Energischer, als dies hier von S. Augustin geschieht, kann das Transfinitum nicht verlangt, vollkommener nicht begründet und verteidigt werden. Denn, daß es sich bei der unendlichen Menge (ν) aller endlichen ganzen Zahlen ν nicht um das Absolutunendliche (IIb) handelt, wird wohl von Niemandem in Zweifel gezogen werden.

Indem nun der h. Augustin die totale, intuitive Perception der Menge (ν), „quodam ineffabili modo", a parte Dei behauptet, erkennt er zugleich

Aus der Definition I folgt, daß Sie vollkommen Recht haben, wenn Sie fragen: „wäre es nicht besser, für das P.-U. den Ausdruck Unendliches ganz fallen zu lassen?“

---

diese Menge formaliter als ein aktual-unendliches Ganzes, als ein Transfinitum an und wir sind gezwungen, ihm darin zu folgen. An dieser Stelle wird nun aber möglicherweise der Einwand erhoben werden, daß, wenn wir auch genötiget sind, die Menge (ν) als ein kategorematisches Unendliches anzusehen, es uns andrerseits nicht erlaubt ist, die dieser Menge entsprechende Ordnungszahl ω, oder die ihr zukommende Kardinalzahl $\overline{\omega}$ in Betracht zu ziehen und zwar sei uns dies aus dem Grunde nicht erlaubt, weil wir, bei der Beschränktheit unsres Wesens, nicht im Stande sind, alle die unendlich vielen zur Menge (ν) gehörigen Zahlindividuen ν uno intuitu aktuell zu denken. Ich möchte nun aber Denjenigen sehen, der etwa bei der endlichen Zahl „Tausendmal Million“, oder selbst bei noch viel kleineren Zahlen alle darin vorkommenden Einheiten uno intuitu, distinkt und präzise sich vorstellen kann. Ein Solcher lebt heutiges Tages unter uns ganz sicherlich nicht. Und trotzdem haben wir das Recht, die endlichen Zahlen, auch wenn sie noch so groß sind, als Gegenstände der diskursiven, menschlichen Erkenntnis anzusehen und sie wissenschaftlich nach ihrer Beschaffenheit zu untersuchen; dasselbe Recht steht uns auch in Bezug auf die transfiniten Zahlen zu. Jenem Einwand gegenüber giebt es also nur eine Antwort: die Bedingung, welche Ihr selbst, sogar an den kleinen, endlichen Zahlen, nicht zu erfüllen und zu leisten im Stande seid, dieselbe mutet Ihr uns zu, in Bezug auf die unendlichen Zahlen! Ist ein unbilligeres Verlangen von Menschen an Menschen jemals gestellt worden? Nach unsrer Organisation sind wir nur selten im Besitz eines Begriffes, von dem wir sagen könnten, daß er ein „conceptus rei proprius ex propriis“ wäre, indem wir durch ihn eine Sache adäquat, ohne Hülfe einer Negation, eines Symbols oder Beispiels, so auffassen und erkennen, wie sie an und für sich ist. Vielmehr sind wir beim Erkennen zumeist auf einen „conceptus proprius ex communibus“ angewiesen, welcher uns befähigt ein Ding aus allgemeinen Prädikaten und mit Hülfe von Vergleichungen, Ausschließungen, Symbolen oder Beispielen derartig zu bestimmen, daß es von jedem andern Ding wohlunterschieden ist. Man vergleiche z. B. die Methode, nach welcher ich in den „Grundlagen“ (1883) und schon früher in den „Mathem. Annalen, Bd. V“ (1871) die irrationalen Zahlgrößen definirt habe. Ich gehe nun so weit, unbedingt zu behaupten, daß diese zweite Art der Bestimmung und Abgränzung von Dingen für die kleineren transfiniten Zahlen (z. B. für ω oder $\omega + 1$ oder ω^{ν}, bei kleiner endlicher ganzer Zahl ν) eine unvergleichlich einfachere, bequemere und leichtere ist, als für sehr große endliche Zahlen, bei denen wir gleichwohl auch nur auf dasselbe, unserer unvollkommenen Natur entsprechende Hülfsmittel angewiesen sind.

Im Gegensatz zu Augustin findet sich bei Origenes eine entschiedene Stellungnahme gegen das Aktualunendliche und er geht

Allerdings ist das P.-U. eigentlich kein Unendliches, darum habe ich es in meinen „Grundlagen“ uneigentliches Unendliches genannt. Doch wird es schwer sein, den betreffenden Gebrauch

---

hierin so weit, daß es fast scheinen möchte, er wolle selbst die Unendlichkeit Gottes nicht behauptet wissen. Denn er sagt, man dürfe nicht durch einen falschen Euphemismus (εὐφημίας χάριν) die Begrenzung (circumscriptio = περιγραφή) der göttlichen Kraft leugnen. Ich erinnere daran, daß πέρας im Griechischen Ziel, Grenze und Vollendung zugleich bedeutet: mit dem ἄπειρον verbindet sich daher eigentlich der Begriff des Unbestimmten, Unvollkommenen. Auch im Lateinischen kommt infinitum in dem Sinne „unbestimmt“ bei Cicero und Quintilian vor (z. B. infinitior distributio partium, ein logischer Fehler in der Rede; infinitas quaestiones, ungenau bestimmte Fragen &c.). Auch finis bezeichnet, wie πέρας, die Vollendung, so in dem bekannten Titel des Ciceron. Werkes de finibus bonorum, bei Tacitus finis aequi juris etc.

In Origenes, de principiis (περὶ ἀρχῶν), ed. Redepenning (In den griechisch erhaltenen Fragmenten p. 10, in der Übersetzung des Rufinus p. 214) heißt es wörtlich: „— intueamur creaturae initium, quodcunque illud initium creantis Dei mens potuerit intueri. In illo ergo initio putandum est tantum numerum rationabilium creaturarum, vel intellectualium, vel quoquomodo appellandae sunt, quas mentes superius diximus, fecisse Deum quantum sufficere posse prospexit. Certum est quippe quod praefinito aliquo apud se numero eas fecit: non enim, ut quidam volunt, finem putandum est non habere creaturas; quia ubi finis non est, nec conprehensio ulla nec circumscriptio esse potest. [Es ist höchst wahrscheinlich, daß jene Auseinandersetzung bei Augustin im durchaus bewußten Gegensatz zu dieser Stelle bei Origenes geschrieben worden ist.] Quod si fuerit, utique nec contineri vel dispensari a Deo, quae facta sunt, poterunt. Naturaliter nempe quidquid infinitum [Origenes hat immer nur das ἄπειρον im Auge und sagt, wenn die göttliche Kraft ἄπειρος wäre, könnte Gott sich selbst nicht erkennen] fuerit, et incomprehensibile erit. Porro autem, sicut scriptura dicit: ‚In numero et mensura universa‘ (Sap. 11, 21) condidit Deus, et idcirco numerus quidem recte adaptabitur rationabilibus creaturis, vel mentibus, ut tantae sint, quantae a providentia Dei dispensari, regi et contineri possint. Mensura vero materiae corporali consequenter aptabitur: quam utique tantam a Deo esse creatam credendum est, quantum sibi sciret ad ornatum mundi posset sufficere (gr. τοσαύτην ὕλην ὅσην ἠδύνατο κατακοσμῆσαι).“ Ich habe diese tiefsinnige Betrachtung des Origenes vollständig reproduzirt, weil ich in ihr den Ursprung für die, wie ich anerkennen muß, bedeutendsten und inhaltvollsten Argumente erblicke, welche gegen das Transfinitum zur Geltung gebracht worden sind. Man findet dieselben oft wiederholt; ich will sie in der vollendetsten Form, die ihnen zu beseitigen, um so schwerer, als das P.-U. der leichtere, angenehmere, oberflächlichere, unselbständigere Begriff und die schmeichlerische Illusion zumeist mit ihm verknüpft ist, als hätte man daran was Rechtes, was richtig Unendliches; während doch in Wahrheit das P.-U. nur eine geborgte Realität hat, indem es stets

---

gegeben worden ist, hier anführen. In der S. Thomas'schen Summa theol. I, q. 7, a. 4 heißt es: „1) Multitudinem actu infinitam dari, impossibile est, quia omnem multitudinem oportet esse in aliqua specie multitudinis. Species autem multitudinis sunt secundum species numerorum. Nulla autem species numeri est infinita; quia quilibet numerus est multitudo mensurata per unum. Unde impossibile est esse multitudinem infinitam actu; sive per se, sive per accidens. 2) Item omnis multitudo in rerum natura existens est creata; et omne creatum sub aliqua certa intentione creantis comprehenditur, non enim in vanum agens aliquod operatur. Unde necesse est quod sub certo numero omnia creata comprehendantur. Impossibile est ergo esse multitudinem infinitam in actu, etiam per accidens."

Dies sind die beiden gewichtigsten Gründe, welche im Lauf der Zeiten gegen das Transfinitum vorgeführt worden sind; alle anderen Argumente, die man ausgesprochen findet, lassen sich verhältnismäßig leicht negativ entkräften, indem man bemerkt, daß sie auf einem Fehler im Schließen beruhen. Diese beiden Gründe dagegen, sind sehr wohl fundirt und konnten nur positiv gelöst und erledigt werden, indem man bewies und zeigte, daß die transfiniten Zahlen und Ordnungstypen im Reiche des Möglichen ebensowohl existiren, wie die endlichen Zahlen und daß im Transfiniten sogar ein weitaus größerer Reichtum an Formen und an „species numerorum" vorhanden und gewissermaßen aufgespeichert ist, als in dem verhältnismäßig kleinen Felde des unbeschränkten Endlichen. Daher standen die transfiniten Species den Intentionen des Schöpfers und seiner absolut unermeßlichen Willenskraft ganz ebenso verfügbar zu Gebote, wie die endlichen Zahlen. Man möchte glauben, daß S. Thomas diesen Zusammenhang geahnt oder sogar gekannt und durchschaut und eben darum es verschmäht hat, die anderen, federleichten Argumente gegen die aktualunendlichen Größen und Zahlen, welche sich u. A. auch in den Schriften seines Lehrers Albertus Magnus finden, zu reproduziren. Er blieb und bestand mit großem Recht auf jenen inhaltsvollen und gewichtigen zwei Gründen, die nur positiv gelöst werden konnten; gab aber die übrigen Gründe durchaus gern auf, in dem berühmten Ausruf gegen die Murmurantes: „Praeterea adhuc non est demonstratum, quod Deus non possit facere ut sint infinita actu". (Opusc. de aeternitate mundi).

auf ein A.-U. hinweist, durch welches es erst möglich wird. Daher das dem P.-U. von den Scholastikern zutreffend gegebene Epitheton: συνκατηγορηματικως.

Sehen wir uns ferner die Definition II an, so folgt zunächst, daß daraus mit nichten geschlossen werden kann, als ob das A.-U seiner Größe nach unvermehrbar sein müsse; eine irrige Annahme, die nicht nur in der alten und in der sich an sie anschließenden scholastischen, sondern auch in der neueren und neuesten Philosophie, man kann fast sagen, allgemein verbreitet ist.*) Vielmehr sind wir hier genötigt, eine fundamentale Distinction zu machen, indem wir unterscheiden:

II^a Vermehrbares A.-U. oder Transfinitum.

II^b Unvermehrbares A.-U. oder Absolutum.

Die vorhin für das A.-U. angeführten drei Beispiele gehören sämtlich in die Klasse II^a des Transfiniten. Ebenso gehört hierher die kleinste überendliche Ordnungszahl, welche ich mit ω bezeichne; denn sie kann zur nächst größeren Ordnungszahl $\omega + 1$, diese wieder zu $\omega + 2$ u. s. w. vergrößert resp. vermehrt werden. Aber auch die kleinste actual unendliche Mäch-

*) Da ich seit vier Jahren, nach Publikation der „Grundlagen", Zeit gefunden habe, mich in der Literatur der alten und der scholastischen Philosophie etwas genauer umzusehen, so weiß ich nun auch, daß das A.-U. in natura creata zu allen Zeiten seine Verteidiger innerhalb der christlichen Spekulation gehabt hat. Durch Bayle's Diktionnaire bin ich vor etwa drei Jahren u. A. auf den hervorragenden Franziskanermönch R. P. Emanuel Maignan aus Toulouse (Cursus philosophicus, Lugduni, 1673) aufmerksam geworden, der dem kategorematischen Unendlichen eine sehr weite Sphäre zuweist. Darin schließt sich ihm an sein Schüler, der Franziskaner R. P. Joh. Saguens (M. v. dessen Werk: De perfectionibus divinis, Coloniae 1718). Von den Nominalisten (im Anschluß an Avicenna) soll der weitaus größte Teil die „unendliche Zahl" behauptet haben. Dasselbe wird den Scotisten nachgesagt. Der R. P. T. Pesch führt in seinen inst. phil. nat. § 409 unter den Verteidigern der Möglichkeit der unendlichen Zahlen auch folgende Autoren an: Gabriel Vasquez (Comm. in Summ. p. 1, d. 26, c. 1), Hurtado (Phys. d. 13, § 16), Arriaga (Phys. d. 13. n. 32) und Oviedo (Phys. controv. 14, punct. 4, n. 6; punct. 5). Einen vermittelnden Standpunkt findet man bei den Conimbricenses (Phys. l. 3, c. 8, q. 2) und bei Amicus (Phys. tr. 18, q. 6, dub. 2).

tigkeit oder Cardinalzahl ist ein Transfinitum, und das gleiche gilt von der nächst größeren Cardinalzahl u. s. w.

Das Transfinite mit seiner Fülle von Gestaltungen und Gestalten weist mit Notwendigkeit auf ein Absolutes hin, auf das „wahrhaft Unendliche", an dessen Größe keinerlei Hinzufügung oder Abnahme statt haben kann und welches daher quantitativ als absolutes Maximum anzusehen ist. Letzteres übersteigt gewissermaßen die menschliche Fassungskraft und entzieht sich namentlich mathematischer Determination; wogegen das Transfinite nicht nur das weite Gebiet des Möglichen in Gottes Erkenntnis erfüllt, sondern auch ein reiches, stets zunehmendes Feld idealer Forschung darbietet und meiner Überzeugung nach auch in der Welt des Geschaffenen bis zu einem gewissen Grade und in verschiedenen Beziehungen zur Wirklichkeit und Existenz gelangt, um die Herrlichkeit des Schöpfers, nach dessen absolut freiem Ratschluß, stärker zum Ausdrucke zu bringen, als es durch eine bloß „endliche Welt" hätte geschehen können. Dies wird aber auf allgemeine Anerkennung noch lange zu warten haben, zumal bei den Theologen, so wertvoll auch diese Erkenntnis als Hilfsmittel zur Förderung der von ihnen vertretenen Sache (der Religion) sich erweisen würde.

Endlich habe ich Ihnen noch zu erklären, in welchem Sinne ich das Minimum des Transfiniten als Grenze des wachsenden Endlichen auffasse Dazu beachte man, daß der Begriff „Grenze" im Gebiete endlicher Zahlen zwei wesentliche Merkmale hat, welche hier reciprok auseinander folgen. Die Zahl 1 z. B. ist die Grenze der Zahlen $z_\nu = 1 - \frac{1}{\nu}$ (wo ν eine veränderliche endliche ganze, über alle endliche Grenzen hinaus wachsende Zahl bedeutet) und bietet als Grenze folgende zwei auseinander ableitbare Merkmale dar.

Erstens ist die Differenz $1 - z_\nu = \frac{1}{\nu}$ eine unendlich klein werdende Größe, d. h. die Zahlen z_ν nähern sich der Grenze 1 bis zu beliebiger Nähe.

Zweitens ist 1 die kleinste von allen Zahlgrößen, welche größer sind, als alle Größen z_ν; denn nimmt man irgend eine Größe $1-\varepsilon$, die kleiner ist als 1, so wird $1-\varepsilon$ zwar größer sein, als einige der z_ν; aber von einem gewissen ν an, nämlich für $\nu > \frac{1}{\varepsilon}$, wird immer $z_\nu > 1-\varepsilon$ sein; es ist also 1 das Minimum aller Zahlgrößen, die größer sind als alle z_ν.

Von diesen zwei Merkmalen charakterisirt, wie gesagt, jedes für sich vollständig die endliche Zahl 1 als Grenze der veränderlichen Größe $z_\nu = 1 - \frac{1}{\nu}$.

Will man nun den Begriff der Grenze auch auf transfinite Grenzen ausdehnen, so dient dazu nur das zweite der soeben angeführten Merkmale, das erste muß hier fallen gelassen werden, weil es nur für endliche Grenzen Bedeutung, für transfinite aber keinen Sinn hat.

Darnach nenne ich beispielsweise ω die Grenze der endlichen wachsenden ganzen Zahlen ν, weil ω die kleinste von allen Zahlen ist, die größer sind, als alle endlichen Zahlen ν; genau ebenso wie 1 als die kleinste von allen Zahlen gefunden wird, die größer sind als alle Größen $z_\nu = 1 - \frac{1}{\nu}$; jede kleinere Zahl, als ω, ist eine endliche Zahl und wird von anderen endlichen Zahlen ν der Größe nach übertroffen. Dagegen ist hier $\omega - \nu$ stets gleich ω und man kann also nicht sagen, daß die wachsenden endlichen Zahlen ν ihrem Ziele ω beliebig nahe kommen; vielmehr bleibt jede noch so große Zahl ν von ω ebensoweit entfernt wie die kleinste endliche Zahl.

Es tritt hier besonders deutlich der überaus wichtige und entscheidende Umstand hervor, daß meine kleinste transfinite Ordnungszahl ω und folglich auch alle größeren Ordnungszahlen gänzlich außerhalb der endlosen Zahlenreihe 1, 2, 3 u. s. w liegen. Das ω ist nicht etwa Maximum der endlichen Zahlen (ein solches giebt es ja nicht) sondern ω ist das Minimum aller unendlichen Ordnungszahlen. Es war das unglückliche Versehen Fontenelle's*), das Transfinite innerhalb der Zahlenreihe 1, 2, 3, .. ν, ..., wenn auch gewissermaßen am Schluß derselben (der ihr aber ja fehlt) zu suchen; indem er auf diese Weise seinen unendlichen Zahlen von vornherein einen unlöslichen Widerspruch mitgab, war das Schicksal seiner unfruchtbaren Theorie entschieden; sie mußte vor einer durchaus berechtigten Kritik**) das Feld räumen. Wenn aber letztere durch die Todtgeburt der Fontenelleschen unendlichen Zahlen sich außerdem verleiten ließ, über die actual unendlichen Zahlen ganz allgemein den Stab zu brechen, so weiß ich, daß sie ihrerseits durch die Thatsache meiner, von der Fontenelleschen total verschiedenen, vollständig widerspruchsfreien Theorie widerlegt ist.

VI.***)

Sie erwähnen in Ihrem Schreiben die Frage über die actual unendlich kleinen Größen. An mehreren Stellen meiner Arbeiten werden Sie die Ansicht ausgesprochen finden, daß dies unmögliche, d. h. in sich widersprechende Gedankendinge sind und ich habe schon in meinem Schriftchen „Grundlagen e. allg. Mannigfaltigkeitslehre" pag. 8 im § 4, wenn auch damals noch mit einer gewissen Reserve, angedeutet, daß die strenge Begründung dieser Position aus der Theorie der transfiniten Zahlen herzuleiten wäre. Erst in diesem Winter fand sich die Zeit dazu, meine diesen Gegenstand betreffenden Ideen in die Gestalt eines förmlichen Beweises zu bringen. Es handelt sich um den Satz:

„Von Null verschiedene lineare Zahlgrößen ζ (d. h. kurz gesagt, solche Zahlgrößen, welche sich unter

*) Man vergl. Fontenelle, Élémens de la Géometrie de l'infini. Paris 1727.

**) Man vergl. Maclaurin, Traité des Fluxions. Traduction du R. P. Pezenas, Paris 1749; t. I introduction pag. XLI; ferner: Gerdil, opere edite ed ined. Rome 1806. t. IV, pag. 261; t. V, p. 1.

***) Das Folgende findet sich fast übereinstimmend in zwei Briefen; der eine vom 13. Mai 1887 ist an Herrn Gymnasiallehrer F. Goldscheider in Berlin, der andere v. 16. Mai 1887 an Herrn Professor Dr. K. Weierstraß von mir geschrieben worden.

dem Bilde begrenzter geradliniger stetiger Strecken vorstellen lassen), welche kleiner wären, als jede noch so kleine endliche Zahlgröße, giebt es nicht, d. h. sie widersprechen dem Begriff der linearen Zahlgröße."
Der Gedankengang meines Beweises ist einfach folgender: ich gehe von der Voraussetzung einer linearen Größe ζ aus, die so klein sei, daß ihr n-faches:

$$\zeta \cdot n$$

für jede noch so große endliche ganze Zahl n kleiner ist als die Einheit und beweise nun aus dem Begriff der linearen Größe und mit Hilfe gewisser Sätze der transfiniten Zahlenlehre, daß alsdann auch:

$$\zeta \cdot \nu$$

kleiner ist, als jede noch so kleine endliche Größe, wenn ν irgend eine noch so große transfinite Ordnungszahl (d. h. Anzahl oder Typus einer wohlgeordneten Menge) aus irgend einer noch so hohen Zahlenklasse bedeutet. Dies heißt aber doch, daß ζ auch durch keine noch so kräftige actual unendliche Vervielfachung endlich gemacht werden, also sicherlich nicht Element endlicher Größen sein kann. Somit widerspricht die gemachte Voraussetzung dem Begriff linearer Größen, welcher derartig ist, daß nach ihm jede lineare Größe als integrirender Teil von anderen, im besonderen von endlichen linearen Größen gedacht werden muß. Es bleibt also nichts übrig, als die Voraussetzung fallen zu lassen, wonach es eine Größe ζ gäbe, die für jede endliche ganze Zahl n kleiner wäre als $\frac{1}{n}$ und hiermit ist unser Satz bewiesen.

Es scheint mir dies eine wichtige Anwendung der transfiniten Zahlenlehre zu sein, ein Resultat, welches alte, weit verbreitete und tiefwurzelnde Vorurteile zu beseitigen geeignet ist.

Die Thatsache der actual unendlich großen Zahlen ist also so wenig ein Grund für die Existenz actual unendlich kleiner Größen, daß vielmehr gerade mit

Hülfe der ersteren die Unmöglichkeit der letzteren bewiesen wird.

Ich glaube auch nicht, daß man dieses Resultat auf anderem Wege voll und streng zu erreichen im Stande ist.

Das Bedürfnis unseres Satzes ist besonders einleuchtend gegenüber neueren Versuchen von O. Stolz und P. Dubois-Reymond, welche darauf ausgehen, die Berechtigung actual unendlich kleiner Größen aus dem sogenannten „Archimedischen Axiom" abzuleiten. (M. v. O. Stolz, Math. Annalen Bd. XVIII, pag. 269; ferner seine Aufsätze in den Berichten des naturw. medizin. Vereines in Innsbruck, Jahrgänge 1881—82 und 1884; sie sind betitelt: „Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes" und: „Die unendlich kleinen Größen"; endlich vergleiche man desselben Autors: „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik", Leipzig 1885, I. Theil, pag. 205.)

Archimedes scheint nämlich zuerst darauf aufmerksam geworden zu sein, daß der in Euclid's Elementen gebrauchte Satz, wonach aus jeder noch so kleinen begrenzten geradlinigen Strecke durch endliche, hinreichend große Vervielfachung beliebig große endliche Strecken erzeugt werden können, eines Beweises bedürftig sei und er glaubte darum diesen Satz als „Annahme" (λαμβανόμενον) bezeichnen zu sollen.

(M. v. Eucl. Elem. lib. V, def. 4: λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν; ferner insbesondere Elem. lib. X, pr. 1. Archimedes: de sphaera et cylindro I, postul. 5 und die Vorrede zu seiner Schrift: de quadratura parabolae.)

Nun ist der Gedankengang jener Autoren (O. Stolz a. a. O.) der, daß wenn man dieses vermeintliche „Axiom" fallen ließe, daraus ein Recht auf actual unendlichkleine Größen, welche dort „Momente" genannt werden, hervorgehen würde. Aber aus dem oben von mir angeführten Satze folgt, wenn er auf geradlinige stetige Strecken angewandt wird, unmittelbar die Nothwendigkeit der Euclidischen Annahme. Also ist das sogenannte

„Archimedische Axiom" gar kein Axiom, sondern ein, aus dem linearen Größenbegriff mit logischem Zwang folgender Satz.

VII.*)

Wenn man sich über den Ursprung des weitverbreiteten Vorurteils gegen das actuale Unendliche, des horror infiniti in der Mathematik volle Rechenschaft geben will, so muß man vor Allem den Gegensatz scharf in's Auge fassen, der zwischen dem actualen und potenzialen Unendlichen besteht. Während das potenziale Unendliche nichts anderes bedeutet, als eine unbestimmte, stets endlich bleibende, veränderliche Größe, die Werte anzunehmen hat, welche entweder kleiner werden, als jede noch so kleine, oder größer werden, als jede noch so große endliche Grenze, bezieht sich das actuale Unendliche auf ein in sich festes, constantes Quantum, das größer ist, als jede endliche Größe derselben Art. So stellt uns beispielsweise eine veränderliche Größe x, die nacheinander die verschiedenen endlichen ganzen Zahlwerthe 1, 2, 3, $\ldots, \nu, \ldots$ anzunehmen hat, ein potenziales Unendliches vor, wogegen die durch ein Gesetz begrifflich durchaus bestimmte Menge (ν) aller ganzen endlichen Zahlen ν das einfachste Beispiel eines actualunendlichen Quantums darbietet.

Die wesentliche Verschiedenheit, welche hiernach zwischen den Begriffen des potenzialen und actualen Unendlichen besteht, hat es merkwürdigerweise nicht verhindert, daß in der Entwickelung der neueren Mathematik mehrfach Verwechselungen beider Ideen vorgekommen sind, derart, daß in Fällen, wo nur ein potenziales Unendliches vorliegt, fälschlich ein Actualunendliches angenommen wird oder daß umgekehrt, Begriffe, welche nur vom Gesichtspunkte

---

*) Dieser Brief ist im Mai 1886 an Herrn Guilio Vivanti in Mantua gerichtet worden. Sein Inhalt ist in den letzten Abschnitt des Aufsatzes: Über die verschiedenen Ansichten inbezug auf die actualunendlichen Zahlen in Bihang till. K. Svenska Vet. Akad. Handlingar, Bd. 11, No. 19 aufgenommen worden.

des actualen Unendlichen einen Sinn haben, für ein potenziales Unendliches gehalten werden.

Beide Arten der Verwechselung müssen als Irrtümer betrachtet werden.

Die erste tritt unter Anderem dort auf, wo man, wie es z. B. Poisson (Traité de Mécanique, 2:e édit. t. I, p. 14) gethan hat, die sogenannten Differentiale als actualunendlichkleine Größen auffaßt, obgleich sie nur die Deutung veränderlicher, beliebig klein anzunehmender Hülfsgrößen zulassen, wie schon von beiden Entdeckern der Infinitesimalrechnung, Newton und Leibniz bestimmt ausgesprochen worden ist. Dieser Irrtum kann, Dank Ausbildung der sogenannten Grenzmethode, an welcher die französischen Mathematiker, unter Führung des großen Cauchy, so ruhmvoll beteiligt sind, wohl als überwunden angesehen werden.

Umsomehr scheint mir aber in der Gegenwart die Gefahr des andern Fehlers zu drohen, welcher darin besteht, von dem Actualunendlichen nichts wissen zu wollen und es auch dort zu verläugnen, wo keine Möglichkeit vorhanden ist, ohne einen richtigen Gebrauch desselben den Dingen auf den Grund zu kommen.

Hier ist in erster Linie die Theorie der irrationalen Zahlgrößen anzuführen, deren Begründung nicht durchführbar ist, ohne daß das A.-U. in irgend einer Form herangezogen wird. Daß diese Heranziehung auf mehreren Wegen geschehen kann, findet sich in § 9 der „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre" kurz auseinander gesetzt. Ich habe mich dazu schon früher (Math. Annalen, Bd. 5, p. 123) besonderer actualunendlicher Mengen rationaler Zahlen bedient, welche ich Fundamentalreihen nenne. Herr E. Heine ist mir darin gefolgt (Borchardts Journ. Bd. 74, p. 172); seine Abweichungen beziehen sich nur auf die Ausdrucksweise, in der Sache stimmt er mit mir ganz überein. Ich erwähne hier den eigentümlichen, meines Erachtens rückschrittlichen Versuch des Herrn Molk (Acta math. t. VI), die irrationalen Zahlen gänzlich aus dem Gebiet der höheren Arithmetik zu vertreiben; Herr Kronecker geht sogar noch weiter und will diese

Zahlen auch in der Functionentheorie nicht dulden, aus welcher er sie durch *höchst künstliche Subsidiärtheorien* zu verdrängen sucht; es bleibt abzuwarten, welchen Erfolg und welche Dauer diese „unnötigen" Bemühungen haben werden. (M. v. Crelle J. Bd. 99, pag. 336.)

Man kann aber noch aus einem andern Gesichtspunkte das Vorkommen des Actualunendlichen und seine Unentbehrlichkeit sowohl in der Analysis, wie auch in der Zahlentheorie und Algebra unwiderleglich darthun. Unterliegt es nämlich keinem Zweifel, daß wir die *veränderlichen* Größen im Sinne des potenzialen Unendlichen nicht missen können, so läßt sich daraus auch die Notwendigkeit des actualen Unendlichen folgendermaßen beweisen. Damit eine solche veränderliche Größe in einer mathematischen Betrachtung verwertbar sei, muß strenggenommen das „Gebiet" ihrer Veränderlichkeit durch eine Definition vorher bekannt sein; dieses „Gebiet" kann aber nicht selbst wieder etwas Veränderliches sein, da sonst jede feste Unterlage der Betrachtung fehlen würde; also ist dieses „Gebiet" eine bestimmte actualunendliche Wertmenge.

So setzt jedes potenziale Unendliche, soll es streng mathematisch verwendbar sein, ein Actualunendliches voraus.

Diese „Gebiete der Veränderlichkeit" sind die eigentlichen Grundlagen der Analysis sowohl, wie der Arithmetik und sie verdienen es daher in hohem Grade, selbst zum Gegenstand von Untersuchungen genommen zu werden, wie dies von mir in der „Mengenlehre" (théorie des ensembles) geschehen ist.

Hat aber hiermit das Actualunendliche in Form actualunendlicher *Mengen* sein Bürgerrecht in der Mathematik geltend gemacht, so ist die Forderung eine unabweisliche geworden, auch den actualunendlichen *Zahlbegriff* durch geeignete *naturgemäße Abstractionen* auszubilden, ähnlich wie die endlichen Zahlbegriffe, das Material der bisherigen Arithmetik, durch Abstraction aus endlichen Mengen gewonnen worden sind. Dieser Gedankengang hat mich auf die *transfinite Zahlenlehre* geführt, deren Anfänge sich in den „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre" vorfinden.

VIII.*)

1. Abstrahiren wir bei einer gegebenen Menge M, welche aus bestimmten, wohlunterschiedenen concreten Dingen oder abstracten Begriffen, welche Elemente der Menge genannt werden, besteht und als ein Ding für sich gedacht wird, sowohl von der Beschaffenheit der Elemente, wie auch von der Ordnung ihres Gegebenseins, so entsteht in uns ein bestimmter Allgemeinbegriff (universale, unum versus alia, in der Bedeutung: unum aptum inesse multis)**), den ich die Mächtigkeit von M oder die der Menge M zukommende *Cardinalzahl* nenne. Ich setze fest, daß $\overline{\overline{M}}$ ein Zeichen für die Mächtigkeit von M sei. Die *zwei* Striche über dem M sollen andeuten, daß an M ein *zweifacher* Abstraktionsact vollzogen ist, sowohl in Bezug auf die Beschaffenheit der Elemente, wie auch in Bezug auf ihre Ordnung zu einander. In No. 9 wird uns die Bezeichnung $\overline{M}$ mit *nur* einem Strich für dasjenige universale begegnen, welches aus M hervorgeht, wenn daran nur die erstere Art der Abstraction ausgeübt wird. Die Elemente behalten hierbei auch im Begriff diejenige Ordnung zu einander, mit welcher sie in concreto in M gedacht werden; so wird dasjenige gewonnen werden, was ich den *Ordnungstypus* von M nenne. Zunächst bleiben wir jedoch bei den *Cardinalzahlen*.

---

*) Dieser Abschnitt VIII giebt einen kurzen Abriß der Fundamente der *Theorie der Ordnungstypen*; er ist der Hauptsache nach vor bald drei Jahren verfaßt worden und schon damals zur Aufnahme in ein andres Journal bestimmt gewesen. Nachdem der erste Bogen bereits gesetzt war, machten sich, zu meiner Überraschung, Opportunitätsrücksichten geltend, die mich bestimmten, den Aufsatz zurückzuziehen. Habent sua fata libelli.

**) M. v. P. *Matth. Liberatore* S. J., Inst. philos., 2a ed. novae formae, Prati 1883; vol. 1, Logica pars II, 104. Allen welche, gern oder ungern, sich ein getreues Bild von der thomistischen Philosophie verschaffen wollen, kann ich dieses billige Werk (2 vol. 8 frcs., 50 cent.) als die, m. E., vorzüglichste Einführung in dieses System empfehlen. Von demselben Autor existiren noch: ein kürzeres einbändiges Handbuch: Comp. Logicae et Metaphysicae, 2a ed., Napoli 1869 (4 frcs., 30 Cent.) und andere geistvolle, sorgfältigst gearbeitete Schriften, unter denen ich noch das Werk: Della Conoscenza intellettuale, 3a ed. hervorhebe.

2. Zwei bestimmte Mengen M und M_1 nennen wir aequivalent (in Zeichen: $M \sim M_1$), wenn es möglich ist, dieselben gesetzmäßig, gegenseitig eindeutig und vollständig, Element für Element, einander zuzuordnen. (M. v. Crelle J. Bd. 84, pag. 242; Math. Ann. Bd. 15, pag. 3; Acta math. Bd. 2, pag. 311.)

Ist $M \sim M_1$ und $M_1 \sim M_2$, so ist auch $M \sim M_2$.

Beispiele. a) Die Menge der Regenbogenfarben (Roth, Orange, Gelb, Grün, Blau, Indigo, Violett,) und die Menge der Tonstufen (C, D, E, F, G, A, H) sind aequivalente Mengen und stehen beide unter dem Allgemeinbegriff Sieben.

b) Die Menge der Finger meiner beiden Hände und die Menge der Punkte in dem sogen. arithmetischen Dreieck ∴ (M. v. Pascal, Oeuvres compl. Paris, 1877, Hachette & Cie., tom. III, pag. 243: Traité du triangle arithmetique) sind aequivalent; ihnen kommt die Cardinalzahl Zehn zu.

c) Die actual unendliche Menge (ν) aller positiven, endlichen ganzen Zahlen ν ist aeq. der Menge $(\mu + \nu i)$ aller complexen ganzen Zahlen von der Form $\mu + \nu i$, wo μ und ν unabhängig von einander alle ganzzahligen positiven Werthe erhalten; diese beiden Mengen sind aeq. der Menge $\left(\frac{\mu}{\nu}\right)$ aller positiven reellen Zahlen $\frac{\mu}{\nu}$, wo μ und ν relativ prim zu einander seien; letzteres erscheint um so merkwürdiger, als die den rationalen Zahlen entsprechenden sog. rationalen Punkte einer Geraden in dieser „überalldicht" liegen (M. v. Math. Ann. Bd. 15 pag. 2), während die den ganzen Zahlen ν entsprechenden Punkte der Geraden in Abständen von der Größe der zu Grunde gelegten Längeneinheit auf einander folgen. Aber auch der Inbegriff aller sog. algebraischen Zahlen hat, wie ich bewiesen habe, nur die Mächtigkeit des Inbegriffs (ν), welches die kleinste Mächtigkeit ist von allen, die bei actual unendlichen Mengen überhaupt vorkommen. (M. v. Crelle J. Bd. 77, pag. 258; Bd. 84, pag. 243, 250; Math. Ann. Bd.

15, pag. 3 und 4; Bd. 20, pag. 114; Acta math. Bd. 2, pag. 312, 319.)

d) Dagegen ist die Menge aller reellen (d. h. der rationalen und irrationalen, der algebraischen und transcendenten) Zahlgrößen nicht aeq. der Menge (ν), wie ich zuerst in Bd. 77 von Crelle's J., pag. 259, f. f. und später noch einmal in Bd. 15 der Math. Ann. pag. 5 und in Acta math. Bd. 2, pag. 306, f. f. bewiesen habe. Wohl ist aber auch der nicht weniger merkwürdige Satz von mir bewiesen worden, daß sogen. n-dimensionale stetige Gebilde hinsichtlich ihres Punktbestandes aequivalent sind dem Linearcontinuum, also mit diesem gleiche, von $\overline{\overline{(\nu)}}$ verschiedene Mächtigkeit haben. (M. v. Crelle J. Bd. 84, pag. 254, f. f., Acta math. Bd. 2, pag. 314, f. f.)

3. Aus No. 1 und 2 wird bewiesen, daß aequivalente Mengen immer eine und dieselbe Mächtigkeit oder Cardinalzahl haben und daß auch umgekehrt Mengen von derselben Cardinalzahl aequivalent sind. In Zeichen können wir diesen Doppelsatz so formuliren: Ist $M \backsim M_1$, so ist auch $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{M}}_1$ und umgekehrt.*)

Die Kenntnis nur eines Zuordnungsgesetzes für zwei Mengen M und M_1 genügt, um die Aequivalenz derselben zu constatiren; doch giebt es immer viele, im Allgemeinen sogar un-

---

*) Die Kardinalzahl $\overline{\overline{M}}$ einer Menge M bleibt nach 1. ungeändert dieselbe, wenn an Stelle der Elemente m, m′, m″, ... von M andere Dinge substituirt werden. Ist nun $M \backsim M_1$, so existirt ein Zuordnungsgesetz, durch welches den Elementen m, m′, m″, ... von M die Elemente m_1, m'_1, m''_1, ... von M_1 entsprechen; man kann sich an die Stelle der Elemente m, m′, m″, ... in M mit einem Male die Elemente m_1, m'_1, m''_1, ... von M_1 substituirt denken; dadurch geht die Menge M in M_1 über und da bei diesem Übergange an der Kardinalzahl nichts geändert wird, so ist: $\overline{\overline{M}}_1 = \overline{\overline{M}}$.

Die Umkehrung dieses Satzes ergiebt sich aus der Bemerkung, daß zwischen den Elementen einer Menge M und den Einsen ihrer Kardinalzahl $\overline{\overline{M}}$ ein gegenseitig eindeutiges und vollständiges Zuordnungsverhältnis besteht; so daß wir sagen können, es ist: $M \backsim \overline{\overline{M}}$. Hat man daher zwei Mengen M und M_1 mit gleicher Kardinalzahl, so ist letztere sowohl der Menge M wie auch der Menge M_1 äquivalent; folglich sind auch M und M_1 äquivalent; denn es besteht der Satz: sind zwei Mengen einer dritten äquivalent, so sind sie auch unter einander äquivalent.

zählig viele Zuordnungsgesetze, durch welche zwei aequivalente Mengen in gegenseitig eindeutige und vollständige Beziehung zu einander gebracht werden können.

4. Steht es nach irgend einem Beweise fest, daß zwei gegebene Mengen M und N *nicht* aequivalent sind, so tritt einer von folgenden zwei Fällen ein; *entweder* es läßt sich aus N ein Bestandteil N' absondern, so daß $M \sim N'$ oder es läßt sich aus M ein Bestandteil M' absondern, so daß $M' \sim N$. Im *ersten* Falle heißt $\overline{\overline{M}}$ kleiner als $\overline{\overline{N}}$, im *zweiten* nennen wir $\overline{\overline{M}}$ größer als $\overline{\overline{N}}$.

Hier kann nicht genug betont werden, daß das exclusive Verhalten der beiden Fälle, welches der Definition des Größer- und Kleinerseins bei *Cardinalzahlen* zu Grunde liegt, wesentlich von der gemachten Voraussetzung abhängt, daß M und N *nicht* gleiche Mächtigkeit haben. Sind nämlich die beiden Mengen aequivalent, dann kann es sehr wohl vorkommen, daß Bestandteile M' und N' derselben existiren, für welche sowohl $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N'}}$, wie auch $\overline{\overline{M'}} = \overline{\overline{N}}$. Man hat den Satz: sind M und N zwei solche Mengen, daß Bestandteile M' und N' von ihnen abgesondert werden können, von denen sich zeigen läßt, daß $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N'}}$ und $\overline{\overline{M'}} = \overline{\overline{N}}$, so sind M und N aequivalente Mengen.

5. Die durch Vereinigung zweier Mengen M und N hervorgehende Menge werde mit $M + N$ bezeichnet, wo später das Nähere über die Ordnung der Elemente in dieser neuen Menge gesagt werden wird, auf welche Ordnung es ja hier, bei den Cardinalzahlen, nicht ankommt. Hat man zwei andere Mengen M' und N', so daß $M \sim M'$ und $N \sim N'$, so sieht man leicht, daß auch $M + N \sim M' + N'$.

Auf diesen Satz wird die Definition der *Summe* zweier und folglich auch mehrerer *Cardinalzahlen* oder *Mächtigkeiten* gegründet: ist $a = \overline{\overline{M}}$ und $b = \overline{\overline{N}}$, so versteht man unter $a + b$ diejenige Cardinalzahl, welche der Menge $M + N$ zukommt, d. h. man definirt:

$$a + b = \overline{\overline{M + N}}.$$

Das *commutative* Gesetz $(a + b = b + a)$ und das *associative* Gesetz $(a + (b + c) = (a + b) + c)$ bedürfen, wie man sich leicht überzeugt, hier bei den Cardinalzahlen keiner weitläufigen Beweise, weil die Cardinalzahl durch den Abstractionsakt, welcher sie liefert (m. v. No. 1), von vornherein von der Ordnung ihrer Elemente unabhängig ist.

6. Sind M und N zwei Mengen, so verstehe man unter M.N irgend eine dritte Menge, die dadurch aus N hervorgeht, daß man an Stelle jedes einzelnen Elementes von N je eine Menge setzt, die aequivalent ist der Menge M; über die Ordnung der Elemente dieser neuen Menge wird erst in No. 11. eine Bestimmung getroffen werden; hier kommt es darauf nicht an. Man beweist nun sehr leicht, daß alle nach dem bezeichneten Modus zu gewinnenden Mengen M.N untereinander aequivalent sind und gründet hierauf die Definition des Produkts zweier Cardinalzahlen. Ist a die Mächtigkeit von M, b die von N, so definirt man:

$$a \, . \, b = \overline{\overline{M \, . \, N}}.$$

a heißt der Multiplicandus, b der Multiplicator in diesem Produkt.

Auch hier wird leicht bewiesen, daß das commutative Gesetz: $a \, . \, b = b \, . \, a$ und das associative Gesetz: $a \, . \, (b \, . \, c) = (a \, . \, b) \, . \, c$ für Mächtigkeiten oder Cardinalzahlen allgemeine Gültigkeit haben. Ebenso besteht, wie man leicht zeigen kann, das distributive Gesetz: $a \, (b + c) = ab + ac$.

7. Alles Vorangehende bezieht sich gleichmäßig auf endliche sowohl, wie auch auf actual unendliche Mengen und Cardinalzahlen.

Für endliche Mengen läßt sich nun weiter beweisen, daß, wenn von drei endlichen Cardinalzahlen a, b und c die letztere gleich ist der Summe der beiden ersteren, $a + b = c$, alsdann niemals c gleich einem der Summanden a und b sein kann.*)

---

*) Der Beweis dieses Satzes muß sorgfältigst geführt werden; denn gerade wegen seiner fundamentalen Einfachheit und weil er für selbstverständlich gehalten wird, liegt hier die Gefahr einer Erschleichung besonders nahe.

Die Bedeutung des Satzes ist diese: ist M eine endliche Menge, M' ein Bestandteil von M, so sind M und M' nicht äquivalent.

Wenn aber von der Voraussetzung der *Endlichkeit* bei den drei Zahlen a, b, c abgesehen wird, so hört dieser Satz auf richtig zu sein und darin liegt der *tiefste* Grund der *wesentlichen*

Unter einer *endlichen* Menge verstehen wir eine solche M, welche aus *einem* ursprünglichen Element durch successive Hinzufügung neuer Elemente derartig hervorgeht, daß auch *rückwärts* aus M durch *successive* Entfernung der Elemente *in umgekehrter Ordnung* das ursprüngliche Element gewonnen werden kann.

Ich schicke folgenden allgemeinen, höchst einleuchtenden *Hülfssatz* voraus: sind irgend zwei Mengen M und N äquivalent, so können sie (im Allgemeinen auf viele Weisen) so in gegenseitig eindeutige und vollständige Zuordnung gebracht werden, daß bei *dieser* Zuordnung einem beliebig vorgegebenen Elemente m von M ein ebenso beliebig gewähltes Element n von N entspricht.

Und nun wird zum Beweise des in Rede stehenden Satzes ein *vollständiges Induktionsverfahren* eingeleitet.

Man setze eine Menge M voraus, welche keinem ihrer Bestandteile äquivalent ist; ich will zeigen, daß alsdann auch die aus M durch Hinzufügung *eines* neuen Elementes 1 hervorgehende Menge $M+1$ *dieselbe Eigenschaft* hat, mit keinem *ihrer* Bestandteile äquivalent zu sein. Sei N irgend ein Bestandteil von $M+1$, so kann er zwei Fälle darbieten. 1) Es gehört das Element 1 mit zu N, so daß $N = N' + 1$. N' ist dann offenbar auch Bestandteil von M. Wäre nun $N \sim M+1$, so könnte nach obigem *Hülfssatze* zwischen den Mengen N und $M+1$ eine solche gegenseitig eindeutige und vollständige Korrespondenz hergestellt werden, daß das Element 1 von N dem Element 1 von $M+1$ entspricht; durch diese Zuordnung würde auch eine Zuordnung zwischen N' und M hergestellt sein und es wäre M seinem Bestandteil N' äquivalent, gegen unsre Voraussetzung. 2) Es gehört 1 nicht mit zu N; dann ist N nicht nur Bestandteil von $M+1$, sondern auch von M. Wäre in diesem Falle $N \sim M+1$, so nehme man *irgend eine* gegenseitig eindeutige und vollständige Zuordnung der beiden Mengen $M+1$ und N und es möge bei derselben dem Elemente 1 von $M+1$ das Element n von N entsprechen. Ist $N = N' + n$, so wäre durch diese Zuordnung auch eine gegenseitig eindeutige und vollständige Korrespondenz zwischen N' und M hergestellt, was, da auch hier N' Bestandteil von M ist, gegen die gemachte Voraussetzung streitet, wonach M keinem ihrer Bestandteile äquivalent ist.

Der in Rede stehende Satz ist unmittelbar einleuchtend für den Fall einer aus zwei Elementen bestehenden Menge. Vermöge des so eben Bewiesenen wird die Richtigkeit desselben auf *jede endliche* Menge übertragen,

Als durchaus wesentliches Merkmal *endlicher* Mengen muß es angesehen werden, daß eine solche *keinem ihrer Bestandteile* äquivalent ist. Denn eine aktual unendliche Menge ist *immer* so beschaffen, daß auf mehrfache Weise ein Bestandteil von ihr bezeichnet werden kann, der ihr äquivalent ist.

Verschiedenheit zwischen endlichen und actual unendlichen Zahlen und Mengen, einer Verschiedenheit, welche so groß ist, daß man die Berechtigung hat, die unendlichen Zahlen ein ganz neues Zahlengeschlecht zu nennen.

Hier liegt nun der große Stein des Anstoßes, den von Alters her Philosophen und Mathematiker nicht haben wegräumen können und der die meisten von ihnen bestimmt hat, allen Versuchen, die Lehre vom Unendlichen einen weiteren Schritt vorwärts zu bringen, standhaft und hartnäckig, mit aller Zähigkeit eines uralten und, wenn auch falschen, doch darum nicht weniger fest eingewurzelten Prinzips entgegenzutreten. Man täuschte sich mit der Annahme, es sei ein Widerspruch, wenn einer unendlichen Menge M dieselbe Zahl zukommt, wie einem Bestandteil M' von M. Daß diese Annahme auf einem Trugschluß beruht, kann wie folgt bewiesen werden. Ist etwa $M = M' + M''$, so ist die Behauptung, der Menge M komme dieselbe Cardinalzahl zu, wie der Menge M', nach Nr. 1 gleichbedeutend mit dem Satze: die Mengen M und M' stehen unter einem und demselben Allgemeinbegriff, der durch Abstraction von der Beschaffenheit und der Anordnung ihrer Elemente gewonnen wird; mit anderen Worten, es wird mit jener Behauptung gesagt, daß $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{M'}}$ ist. Seit wann wäre aber ein Widerspruch darin zu sehen, daß der Bestandteil eines Ganzen, nach irgend einer Hinsicht, unter einem und demselben „universale" steht, wie das Ganze? Man erwidert vielleicht hierauf, es sei wohl im Allgemeinen zuzugeben, daß ein Ganzes und sein Bestandteil unter einem und demselben „universale" stehen können, allein hier handle es sich um eine besondere Art von Allgemeinbegriffen, um Zahlen und bei Zahlen treffe dies nicht zu. Dann könnte meinerseits verlangt werden, daß für letztere Behauptung, wonach bei den Zahlen in der bezeichneten Richtung ein Ausnahmefall stattfände, der Beweis gebracht werde. Es mag ja sein, daß man ihn hier und da versuchen wird. Gelingen wird er aber nur dann, wenn stillschweigend die Voraussetzung hinzugenommen wird, daß es sich um endliche Mengen handle; und diese Voraussetzung ist es ja gerade, welche hier vermieden werden muß. Um aber nach meinen Kräften unnützen Bemühungen, die sich nur im Kreise bewegen würden, vorzubeugen, will ich die Sache noch stärker beleuchten und bemerke: die Behauptung, der Menge M komme dieselbe Cardinalzahl zu, wie ihrem Bestandteil M′, ist nicht gleichbedeutend mit der Aussage, daß den concreten Mengen M und M′ eine und dieselbe Realität zukomme; denn wenn auch an den zugehörigen Allgemeinbegriffen $\overline{\overline{M}}$ und $\overline{\overline{M'}}$ die Bedingung des Gleichseins erfüllt ist, so ist damit schlechterdings nicht der vorausgesetzten Thatsache widersprochen, daß die Menge M sowohl die Realität von M′, wie auch diejenige von M″ umfaßt. Sind nicht eine Menge und die zu ihr gehörige Cardinalzahl ganz verschiedene Dinge? Steht uns nicht erstere als Objekt gegenüber, wogegen letztere ein abstractes Bild davon in unserm Geiste ist? Der alte, so oft wiederholte Satz: „Totum est majus sua parte“ darf ohne Beweis nur inbezug auf die, dem Ganzen und dem Teile zugrunde liegenden Entitäten zugestanden werden; dann und nur dann ist er eine unmittelbare Folge aus den Begriffen „totum“ und „pars“. Leider ist jedoch dieses „Axiom“ unzählig oft*), ohne jede

---

*) Ich führe im Folgenden eine, im Verhältnis zum vorhandenen Material, verschwindende Zahl von Autoren an, welche das hier charakterisirte Versehen begangen zu haben scheinen und infolge dessen als Gegner der act. unendl. Zahlen zu bezeichnen sind:

Fullerton, the conception of the infinite, Philadelphia, 1887 chap. 2.

Renouvier, Esq. d'une classif. syst. d. doctr. philos., Paris 1885, t. 1, pag. 100.

Moigno, Imposs. d. nombre act. inf., Paris 1884. Hier werden Galilei, Gerdil, Toricelli, Guldin, Cavalieri, Newton, Leibniz als solche angeführt, welche sogen. Beweise gegen die Möglichkeit act. unendl. Zahlen geführt hätten.

Cauchy, Sept leçons d. phys. gén. Paris 1868, pag. 23.

Salv. Tongiorgi, S. J. Inst. phil. Paris. ed. 10a, t. 2, Ont. § 350 ff.

Sanseverino, Él. d. l. phil. chrétienne, Avignon 1876, t. 2e, Ontol. § 252.

Tilm. Pesch, S. J. Inst, phil. nat. Freiburg 1880, § 412.

Begründung und unter Vernachlässigung der notwendigen Distinction zwischen „Realität“ und „Größe resp. Zahl“ einer Menge, gerade in derjenigen Bedeutung gebraucht worden, in welcher es im Allgemeinen falsch wird, sobald es sich um actual unendliche Mengen handelt und in welcher es für endliche Mengen nur aus dem Grunde richtig ist, weil man hier im Stande ist, es als richtig zu beweisen. Ein Beispiel möge Alles erläutern.

Sei M die Gesamtheit (ν) aller endlichen Zahlen ν, M′ die Gesamtheit (2ν) aller geraden Zahlen 2ν. Hier ist unbedingt richtig, daß M seiner Entität nach reicher ist, als M′; enthält doch M außer den geraden Zahlen, aus welchen M′ besteht, noch außerdem alle ungeraden Zahlen M″. Andererseits ist ebenso unbedingt richtig, daß den beiden Mengen M und M′ nach Nr. 2 und 3 dieselbe Cardinalzahl zukommt. Beides ist sicher und keines steht dem andern im Wege, wenn man nur auf die Distinction von Realität und Zahl achtet. Man muß also sagen: die Menge M hat mehr Realität wie M′, weil sie M′ und außerdem M″ als Bestandteile enthält; die den beiden Mengen M und M′ zukommenden Cardinalzahlen sind aber gleich. Wann endlich werden alle Denker diese so einfachen und einleuchtenden Wahrheiten (gewiß nicht zu ihrem Nachteile) anerkennen?

8. Nach den Auseinandersetzungen und Erklärungen der vorigen Nummer wird man an Sätzen, wie etwa die folgenden:

$$a + \bar{\nu} = a; \; a \cdot \bar{\nu} = a; \; a^{\bar{\nu}} = a$$

(wo $\bar{\nu}$ die Bedeutung irgend einer endlichen, a die Bedeutung irgend einer transfiniten Cardinalzahl hat), ich sage, man

---

Card. Th. Maria Zigliara, O. P. Summa phil. Ed. 5a. Vol. 1, Ont. Lib. 2, cap. 3, art. 5, II, III.

Card. Gerdil, Op. ed. et ined. Rom 1806, t. 4, pag. 261; t. 5, p. 1.

Leibniz, Ed. Erdmann, pag. 138, 244, 236.

Goudin, O. P. Phil. juxta D. Thomae dogm. Paris 1851, t. 2, pag. 189.

Bened. Pererius, S. J., De comm. omn. rer. nat. princ. et affect. Lugduni, 1585, lib. 10, cap. 9.

wird an solchen Sätzen keinen Anstoß mehr nehmen können, falls man gegen sie nichts Anderes vorzubringen findet, alsdaß sie mit den hergebrachten Sätzen für nur endliche Zahlen nicht übereinstimmen. Denn, wie schon gesagt, es handelt sich bei unsern transfiniten Zahlen um ein neues Zahlengeschlecht, dessen Beschaffenheit man zu erforschen, nicht aber nach dem Recept von Vorurteilen eigenmächtig zu präpariren hat. Jene Sätze, sowie alle anderen, die ich in diesem kurzen Abriß nicht anführen kann, haben ihren festen Bestand durch die logische Kraft von Beweisen, die, von den vorher gegebenen, nicht willkürlichen oder gekünstelten, sondern aus dem Quell naturgemäßer Abstraction entsprungenen Definitionen ausgehend, mit Hilfe von Syllogismen zum Ziele gelangen. Es empfiehlt sich dabei namentlich, diejenigen Methoden weiter auszubilden, welche in Crelle J. Bd. 84, pag. 253, Acta math. Bd. 4, pag. 381, Bd. 7, pag. 105, Math. Ann. Bd. 23, pag. 453 eingeführt worden sind.*)

*) In den Nummern 1—8 dieses Abschnitts sind die Fundamente der allgemeinen, finiten sowohl wie transfiniten, Kardinalzahlenlehre in möglichster Kürze gelegt. Zur Vervollständigung will ich noch Einiges in Bezug auf die endlichen Kardinalzahlen hinzufügen. Unter einer endlichen Kardinalzahl verstehe ich eine solche, welche einer endlichen Menge in der Weise entspricht, wie dies in den Nummern 1—3 erklärt worden ist. Was hierbei unter einer endlichen Menge verstanden werden muß, findet sich in der Note zu Nr. 7, pag. 51. Hiernach hebe ich zunächst hervor, daß jede endliche (ebenso wie jede transfinite) Kardinalzahl für sich eine durchaus unabhängige ideale Existenz und Stellung hat mit Bezug auf alle die anderen Kardinalzahlen. Zur Bildung des Allgemeinbegriffs „fünf" bedarf es nun einer Menge (z. B. der vollzähligen Finger meiner rechten Hand), welche diese Kardinalzahl zukommt; der Abstraktionsakt mit Bezug auf die Beschaffenheit und Ordnung, in welcher diese wohlunterschiedenen Dinge mir entgegentreten, bewirkt oder vielmehr weckt in meinem Geiste den Begriff „fünf". Es ist also die „fünf" an und für sich unabhängig von der „vier" oder „drei" und von irgend welcher andern Zahl. Jede Zahl ist ihrem Wesen nach ein einfacher Begriff, in welchem eine Mannigfaltigkeit von Einsen organisch-einheitlich in specieller Weise zusammengefaßt ist, so daß darin die verschiedenen Einsen, so wie auch die aus ihrer teilweisen Zusammenfassung hervorgehenden Zahlen virtuelle Bestandteile sind. Der Umstand, daß, nach der in Nr. 5 gegebenen Summendefinition, die Gleichung:

$$\overline{\overline{5}} = \overline{\overline{2}} + \overline{\overline{3}}$$

Um die Kardinalzahlenlehre, für welche in den acht ersten Nummern dieses Abschnitts VIII die obersten Begriffs-

---

besteht, darf uns nicht zu der Annahme verleiten, als seien in dem Begriff $\overline{5}$ die Begriffe $\overline{2}$ und $\overline{3}$ als Teile real enthaiten; wäre dies der Fall, so würde nimmermehr $\overline{5}$ auch $= \overline{1} + \overline{4}$ sein können. Wohl aber lassen sich $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$ und $\overline{4}$ als virtuelle Bestandteile von $\overline{5}$ bezeichnen, wenn hierunter nichts Anderes verstanden wird, als daß in jeder konkreten Menge M von der Kardinalzahl $\overline{5}$ sich Teilmengen M' vorfinden, denen die Kardinalzahlen $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$ oder $\overline{4}$ entsprechen. Jene Gleichung hat also die Bedeutung einer bestimmten idealen Beziehung der drei für sich bestehenden Kardinalzahlen $\overline{2}$, $\overline{3}$ und $\overline{5}$ und dieser idealen Beziehung entspricht als Korrelat die Thatsache, daß jede konkrete Menge von der Kardinalzahl $\overline{5}$ aus zwei Teilmengen real zusammengesetzt werden kann, welchen die Kardinalzahlen $\overline{2}$ und $\overline{3}$ entsprechen.

Analog sind alle zwischen Kardinalzahlen bestehenden, auf Grund der Definitionen in Nr. 1—6 aufgebauten Gleichungen und Ungleichheiten zu deuten; sie stellen feste ideale Beziehungen und Gesetze unter Zahlbegriffen dar, die ihr Korrelat und in gewissem Sinne, nämlich für unsre menschliche Erkenntnisweise, ihr Fundament in bestimmten Beziehungen konkreter Mengen haben.

Unter den gesetzmäßigen Beziehungen, welche, in mannichfaltigst umschlungener Verkettung, das Reich der endlichen Kardinalzahlen zu einem idealen, organischen Ganzen verbinden, verdient diejenige zunächst hervorgehoben werden, durch welche wir, nach der in Nr. 4 gegebenen Definition (man berücksichtige hierbei auch die Note, pag. 50, zu Nr. 7), von je zwei verschiedenen Kardinalzahlen a und b die eine als die kleinere, die andre als die größere zu bezeichnen haben. Hat man noch eine dritte c, so beweist man leicht, daß, wenn: $a < b$ und $b < c$, alsdann auch immer $a < c$ ist.

Die Gesamtheit aller endlichen Kardinalzahlen bildet also, wenn in ihr die kleineren Zahlen einen niedrigeren Rang erhalten, als die größeren, in dieser Rangordnung das, was ich eine einfach geordnete Menge nenne. Doch noch mehr; sie stellt sich uns in dieser Rangordnung als eine wohlgeordnete Menge (M. v. Grundlagen e. allg. Mannigfaltigkeitslehre, pag. 4) vor. Denn wir haben hier ein dem Rang nach niedrigstes Element, die kleinste Kardinalzahl $\overline{1}$ und eine, auf jede endliche Kardinalzahl ν, dem Range, d. h. hier der Größe nach, nächstfolgende endliche Kardinalzahl $\overline{\nu + 1}$. So erhalten wir die Gesamtheit aller endlichen Kardinalzahlen in der sogenannten natürlichen endlosen Folge: $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \ldots, \nu, \ldots\ldots\ldots,$
in welcher Folge sie eine wohlgeordnete Menge vom Ordnungstypus ω darstellt.

Die Endlosigkeit dieser Folge giebt den Beweis, daß die Gesamtheit aller endlichen Zahlen, als ein Ding für sich betrachtet, eine aktual bestimmungen gegeben worden sind, in das Gebiet des Transfiniten sicher hinüberzuführen und dort zu strenger Ausbildung zu bringen, ist man, wie ich im Abschnitt I angedeutet habe, auf die Heranziehung der transfiniten Ordnungszahlen angewiesen, welche selbst nur spezielle Formen der Ordnungstypen oder Idealzahlen (ἀριθμοὶ νοητοὶ oder εἰδητικοὶ) sind. Die transfiniten Ordnungszahlen sind nämlich nichts Anderes, als Typen derjenigen unendlichen einfach geordneten Mengen, welche von mir wohlgeordnete Mengen genannt worden sind. (M. v. Grundlagen e. allg. Mannigfaltigkeitsl. p. 4.) In den folgenden

---

unendliche Menge, ein Transfinitum, ist. Denn für die Behauptung, daß eine Menge aktual unendlich sei, ist die Bestimmtheit aller ihrer Elemente, sowie das Größersein der Anzahl derselben im Vergleich mit jeder endlichen Zahl das allein Wesentliche; nicht aber ist erforderlich, daß die Menge in irgend einer Form durch ein letztes, zu ihr gehöriges Glied begrenzt sei. Abgegrenzt ist eine Menge vollkommen schon dadurch, daß alles zu ihr Gehörige in sich bestimmt und von allem nicht zu ihr Gehörigen wohl unterschieden ist. Dies stimmt vollkommen mit demjenigen überein, was S. Augustin, in dem, pag. 32 abgedruckten Kapitel seiner Hauptschrift de Civitate Dei, lib. XII, cap. 19 sagt: „Ita vero suis quisque numerus proprietatibus terminatur, ut nullus eorum par esse cuicumque alteri possit. Ergo et dispares inter se atque diversi sunt, et singuli quique finiti sunt, et omnes infiniti sunt.“

Bietet sich solcherweise die Anordnung: $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, . . ., $\overline{\nu}$, ... der endlichen Kardinalzahlen wie von selbst dar und ist dies der Grund, warum sie allgemein die Benennung der „natürlichen Folge der ganzen Zahlen“ erhalten hat, so darf darum nicht übersehen werden, daß diese gesetzmäßige Repräsentation der Menge ($\overline{\nu}$), bei der vorhin hervorgehobenen idealen Unabhängigkeit jeder Zahl von allen anderen und wegen der Mannichfaltigkeit von Beziehungen der Zahlen untereinander, nur eine von unzählig vielen möglichen gesetzmäßigen Zusammenfassungen und Anordnungen aller endlichen Kardinalzahlen ist; so daß es in gewissem Sinne wohl als willkürlich bezeichnet werden muß, wenn gerade diese, auf die Größenbeziehung basirende Rangordnung der endlichen Kardinalzahlen die „natürliche Folge“ derselben genannt worden ist. Später werden wir sehen, daß auch die Gesamtheit aller Kardinalzahlen oder Mächtigkeiten (der endlichen und der überendlichen), wenn man sie sich nach ihrer Größe geordnet denkt, eine wohlgeordnete Menge bildet.

Nummern dieses Abschnittes VIII. entwickele ich daher zunächst die Prinzipien der allgemeinen Theorie der Ordnungstypen und es sollen alsdann in einem spätern Aufsatze die Grundzüge der speziellen Theorie der Ordnungszahlen, nebst ihrer Anwendung auf die Kardinalzahlenlehre folgen.

---

9. Stellen wir uns, wie in Nr. 1 dieses Abschnitts, eine bestimmte Menge M vor, die aus gegebenen, wohlunterschiedenen Elementen E, E′, E″, ... besteht, welche konkrete Dinge oder abstrakte Begriffe (letztere aber, ebenso wie jene, im Sinne von uns gegenüberstehenden Objekten gedacht) sein können; sie mögen nach n*) von einander unabhängigen Beziehungen, welche ich Richtungen (dieses Wort nicht bloß im geometrischen, sondern in allgemeinerem Sinne verstanden) nennen will, geordnet sein. Diese n Richtungen mögen als 1te., 2te., ..., νte., ... nte. Richtung unterschieden werden. Eine solche Menge M nennen wir eine n-fach geordnete Menge.

Zum genauen Verständnis dieses Begriffs heben wir die folgenden Eigenschaften und Bestimmungen desselben hervor.

Sind E und E′ irgend zwei Elemente von M, so besteht unter ihnen nach jeder der n Richtungen ein bestimmtes Verhältnis des niederen, gleichen oder höheren Ranges (des *πρότερον καὶ ὕστερον κατά τάξιν*). Bedienen wir uns der gebräuchlichen Bezeichnungen $<, =, >$ für das Kleiner-, Gleich- und Größersein zur Andeutung dieser drei Rangverhältnisse, so wird also, wenn ν eine der Zahlen 1, 2, 3, ... n bedeutet, nach der νten Richtung E entweder $<$, oder $=$, oder $>$ als E′ sein. Für verschiedene Richtungen kann das Rangverhältnis von E zu E′ übereinstimmen oder differiren.

Sind E, E′ und E″ irgend welche drei Elemente von M und bestehen nach der νten Richtung die Beziehungen:

$$E \leqq E' \text{ und } E' \leqq E'',$$

---

*) n hat hier die Bedeutung einer endlichen Kardinalzahl, mit Einschluß von $n = 1$.

so ist nach derselben $\nu^{\underline{\underline{\text{ten}}}}$ Richtung auch immer:

$$E \leqq E'',$$

wobei hier das Zeichen $=$, dann und nur dann gültig ist, wenn es in den beiden vorangehenden Relationen Geltung hat.

Dies sind die Voraussetzungen, unter denen ich eine gegebene Menge M eine n-fach geordnete Menge mit Bezug auf jene n Ordnungsrichtungen, letztere in einer bestimmten Reihenfolge als $1^{\underline{\underline{\text{te}}}}$, $2^{\underline{\underline{\text{te}}}}$, ... $n^{\underline{\underline{\text{te}}}}$ Richtung gedacht, nenne.

Zur Erläuterung führe ich einige Beispiele von mehrfach geordneten Mengen an, bei denen die Rangordnung der Elemente nach mehreren Richtungen durch Natur oder Kunst gegeben ist.

Erstes Beispiel. Im Raume seien m bestimmte Punkte irgend wie gelegen. Bezieht man sie in der üblichen Weise auf ein dreiaxiges, orthogonales Koordinatensystem, setzt die x-axe als erste, die y-axe als zweite und die z-axe als dritte Ordnungsrichtung fest und läßt demgemäß das Rangverhältnis von je zwei Punkten E und E′ nach der $1^{\underline{\underline{\text{ten}}}}$, $2^{\underline{\underline{\text{ten}}}}$ und $3^{\underline{\underline{\text{ten}}}}$ Richtung durch die Größenbeziehung resp. ihrer Koordinaten x und x′, y und y′, z und z′ bestimmt sein, so ist hiermit unser aus m Punkten bestehendes Punktsystem als eine dreifach geordnete Menge aufgefaßt. Auf die Entfernungen und sonstigen geometrischen Beziehungen der m Punkte kommt es bei dieser Auffassung gar nicht an; nur die gegenseitige Rangordnung der m Punkte nach den drei Ordnungsrichtungen ist hier wesentlich.

Zweites Beispiel. Ebenso lassen sich m Punkte in einer Ebene, unter Zugrundelegung eines zweiaxigen orthogonalen Koordinatensystems als eine zweifach geordnete Menge auffassen, wobei wiederum die Entfernungen und sonstigen geometrischen Beziehungen der m Punkte nicht in Betracht kommen.

Drittes Beispiel. Man nehme ein Tonstück, sei es eine einfache Melodie oder ein kompliziertes musikalisches Kunstwerk, etwa eine Symphonie oder ein Oratorium. Dasselbe setzt sich aus einer bestimmten Zahl m verschiedener Töne zusammen, die nach vier von einander unabhängigen Richtungen geordnet sind.

Als erste Richtung nehme man die Folge der Töne in der Zeit; in dieser Beziehung erhalten die beiden Töne E und E′ gleichen Rang, wenn sie gleichzeitig erfolgen oder, wie man sich ausdrückt, einem Akkord angehören, andernfalls E einen niederen oder höheren Rang als E′ hat, je nachdem E früher oder später als E′ eintritt.

Die zweite Richtung werde von der Dauer, welche jeder Ton für sich in der Zeit hat, bestimmt, so daß in dieser Beziehung zwei Töne E und E′ gleichen Rang erhalten, wenn sie gleiche Dauer haben, wogegen der Rang von E hier niedriger oder höher ist, als der von E′, je nachdem die Dauer von E kleiner oder größer ist, als die von E′.

Die dritte Richtung sei durch die Höhe der Töne gegeben, so daß hier E und E′ gleichen Rang haben, wenn sie von gleicher Höhe sind, hingegen E niederen oder höheren Rang als E′ erhält, je nachdem E tiefer oder höher ist als E′.

Endlich werde die vierte Ordnungsrichtung in analogem Sinne durch die Intensität der Töne bestimmt. So aufgefaßt stellt demnach jedes Tonstück eine vierfach geordnete Menge vor.

Viertes Beispiel. Betrachten wir ein Gemälde und fassen darin m bestimmte Punkte ins Auge, etwa so viele und solche, daß sie in der Entfernung, von welcher aus das Bild gesehen wird, den Eindruck des kontinuirlichen Ganzen hervorbringen. Beziehen wir das Bild auf eine horizontale und vertikale Richtung, als auf ein zweiaxiges Koordinatensystem, so läßt es sich nach folgenden Gesichtspunkten als eine vierfach geordnete Menge auffassen.

Die x-koordinaten mögen zur Bestimmung der ersten, die y-koordinaten zur Bestimmung der zweiten Ordnungsrichtung dienen. Die dritte Richtung werde durch die Farbe der Punkte gegeben, so daß zwei Punkte E und E′ in dieser Richtung gleichen Rang haben, wenn sie von gleicher Farbe sind, dagegen E niedrigeren oder höheren Rang als E′ einnimmt, je nachdem der Farbe von E eine kleinere oder größere Wellenlänge entspricht, als derjenigen von E′. Endlich bestimme die Farbenintensität der m Punkte die vierte Ordnungsrichtung.

In diesen vier Beispielen haben wir endliche, d. h. aus einer endlichen Zahl von Elementen zusammengesetzte mehrfach geordnete Mengen in Betracht gezogen. Unser Begriff bezieht sich aber auch auf Mengen mit einer unendlichen Zahl von Elementen; es handelt sich dann jedoch immer nur um Aktualunendliches, da nur solche Mengen ein Interesse für uns haben, die in sich bestimmt sind und von welchen daher sämtliche Elemente als fertig zusammen bestehend gedacht werden müssen. Das potenziale Unendliche kommt hier nicht zur Geltung, weil es, seinem Begriffe nach, nur auf unbestimmte, resp. veränderliche Dinge bezogen werden kann.

So können wir beispielsweise alle diejenigen Punkte des Raumes in's Auge fassen, bei denen, unter Zugrundelegung eines dreiaxigen, orthogonalen Koordinatensystems, alle drei Koordinaten rationales Verhältnis zur Längeneinheit haben; sie bilden, wenn, wie im ersten Beispiel, die Größe ihrer Koordinaten zur Bestimmung ihrer Rangordnung verwendet wird, eine bestimmte dreifach geordnete aktualunendliche Punktmenge.

Nach diesen Erläuterungen gehe ich ohne Weiteres zur Erklärung dessen über, was ich den Ordnungstypus oder die Idealzahl einer geordneten Menge nenne.

Sei M irgend eine bestimmte, aus einer endlichen oder aktual unendlichen Zahl von Elementen E, E′, E″,..... bestehende n-fach geordnete Menge. Abstrahiren wir an ihr von der Beschaffenheit der Elemente, unter Beibehaltung ihrer Rangordnung nach den n verschiedenen Richtungen, so wird in uns ein intellektuales Bild, ein Allgemeinbegriff (universale) erzeugt, welchen ich den der Menge M zukommenden n-fachen Ordnungstypus oder auch die der Menge M entsprechende Idealzahl nenne und mit $\overline{M}$ bezeichne.

Es entspricht also jedem Punktsystem im Raume (im Sinne des 1. Beispiels) ein dreifacher, jedem Punktsystem in der Ebene (im Sinne des 2. Beispiels) ein zweifacher, jeder Punktmenge in der geraden Linie ein einfacher bestimmter Ordnungstypus, während einem Tonstück (unserm 3. Beispiel gemäß) und einem Gemälde (in der Auffassung unseres 4. Beispiels) bestimmte vierfache Ordnungstypen zukommen. Ist es daher nicht undenkbar, daß einem Tonstück und einem Gemälde zufällig ein und derselbe Ordnungstypus zu Grunde liege, so sieht man hieraus, wie unter Umständen die heterogensten Dinge durch das gemeinsame Band der Idealzahlen verbunden sein können.

10. Fassen wir den aus einer geordneten Menge M vermöge des beschriebenen Abstraktionsakts gewonnenen Ordnungstypus $\overline{M}$ genauer in's Auge.

Den einzelnen Elementen E, E′, E″, ... der Menge M entsprechen in ihrem Ordnungstypus $\overline{M}$ lauter Einsen $e = 1$, $e' = 1$, $e'' = 1$, ..., die als solche zwar alle gleich sind, sich aber durch ihre Stellung innerhalb des Ordnungstypus $\overline{M}$ von einander unterscheiden; es herrscht unter ihnen dieselbe Rangordnung wie unter den Elementen der Menge M.

Wir haben uns daher unter einem n-fachen Ordnungstypus das ideale Paradigma einer n-fach geordneten Menge, gewissermaßen eine n-dimensionale ganze reale Zahl, d. h. eine begriffliche, organisch-einheitliche Zusammenfassung von Einsen $e = 1$, $e' = 1$, $e'' = 1$, ... zu denken, die nach n verschiedenen und von einander unabhängigen Beziehungen, welche auch hier Richtungen genannt werden sollen, geordnet sind. Nimmt man irgend welche zwei von diesen Einsen e und e′, so hat nach der ν^{ten} Richtung (für $\nu = 1, 2, \ldots. n$) e entweder gleichen Rang mit e′, oder es ist der Rang von e niedriger, oder er ist höher, wie derjenige von e′. Das Rangverhältnis derselben zwei Einsen e und e′ kann nach der ν^{ten} und nach einer andern μ^{ten} Richtung übereinstimmen oder differiren. Sind e, e′, e″ irgend welche drei jener Einsen und hat man nach der ν^{ten} Richtung:

$$e \underset{\nu}{\leq} e' \text{ und } e' \underset{\nu}{\leq} e'',$$

so ist nach derselben $\nu^{\underline{\text{ten}}}$ Richtung:

$$e \leqq e'',$$

wo das Zeichen $=$ dann und nur dann gilt, wenn in beiden vorangehenden Relationen das Zeichen $=$ Geltung hat.*)

Ich nenne den Ordnungstypus einen reinen Ordnungstypus, wenn je zwei seiner Einsen e und e' zum wenigsten nach einer der n Richtungen verschiedenen Rang haben.

Andernfalls nenne ich ihn einen gemischten Ordnungstypus; bei diesem vereinigen sich die Einsen zu bestimmten Gruppen, so daß die einer und derselben Gruppe angehörigen Einsen nach allen n Richtungen gleichen Rang haben und daher zu einer bestimmten Kardinalzahl zusammenfließen, während die, verschiedenen Gruppen angehörigen Einsen zum wenigsten nach einer der n Richtungen verschiedenen Rang haben.

Jeder gemischte Ordnungstypus geht folglich aus einem bestimmten reinen Ordnungstypus dadurch hervor, daß in letzteren an Stelle der Einsen gewisse Kardinalzahlen substituirt werden.

Es erhebt sich nun die Frage, wann zwei verschiedene n-fach geordnete Mengen M und N einen und denselben Ordnungstypus haben und wann nicht? Zur Beantwortung derselben bedienen wir uns des Beziehungsbegriffs der Ähnlichkeit geordneter Mengen.

Zwei n-fach geordnete Mengen M und N werden ähnlich genannt, wenn es möglich ist, sie gegenseitig eindeutig und vollständig, Element für Element, einander so zuzuordnen, daß, wenn E und E' irgend zwei Elemente von M, F und F' die beiden entsprechenden Elemente von N sind, alsdann für $\nu = 1, 2, \ldots n$ das Rangverhältnis von E zu E' nach der $\nu^{\underline{\text{ten}}}$ Richtung innerhalb der Menge M genau dasselbe ist, wie das Rangverhältnis von F zu F' nach der

*) Ich erinnere daran, daß hier (M. v. Nr. 9) die Zeichen $<, =$ und $>$ zur Angabe von Rangverhältnissen verwandt werden.

ν^{ten} *Richtung innerhalb der Menge* N. *Wir wollen eine derartige Zuordnung von zwei einander ähnlichen Mengen eine Abbildung der einen auf die andere nennen.*

Die Ähnlichkeit zweier Mengen M und N werde durch folgende Formel ausgedrückt:

$$M \simeq N$$

Wir können nun die aufgeworfene Frage durch folgenden Satz beantworten:

Zwei n-fach geordnete Mengen M *und* N *haben dann und nur dann einen und denselben Ordnungstypus, wenn sie ähnlich sind; in Zeichen: wenn* $M \simeq N$, *so ist* $\overline{M} = \overline{N}$ *und umgekehrt: wenn* $\overline{M} = \overline{N}$, *so ist* $M \simeq N$.

Beide Teile dieses Doppelsatzes ergeben sich leicht durch Zurückgehen auf die Begriffe des Ordnungstypus und der Ähnlichkeit geordneter Mengen in analoger Weise, wie wir in Nr. 3 dieses Abschnitts VIII den Satz bewiesen haben, daß zwei Mengen dann und nur dann gleiche Kardinalzahl haben, wenn sie äquivalent sind.

Der Ordnungstypus einer gegebenen n-fach geordneten Menge M *ist also derjenige Allgemeinbegriff, unter welchem die Menge* M *und alle ihr ähnlichen Mengen stehen, der aber sonst keine anderen Dinge unter sich begreift, so daß sein Umfang durch* M *und die* M *ähnlichen Mengen genau bestimmt ist.*

Die Ähnlichkeit zweier Mengen M und N begründet, wie man unmittelbar sieht (V. Nr. 2) auch ihre Äquivalenz, während umgekehrt äquivalente Mengen nicht ähnlich zu sein brauchen.

Wir können daher sagen:

Haben zwei geordnete Mengen M *und* N *einen und denselben Ordnungstypus, so kommt ihnen auch immer eine und dieselbe Kardinalzahl zu; in Zeichen: ist* $\overline{M} = \overline{N}$, *so hat man auch:* $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$.

Die Kardinalzahl einer geordneten Menge M ist daher immer auch die Kardinalzahl ihres Ordnungstypus $\overline{M}$ und geht aus letzterem durch die Abstraktion von der eigentümlichen Rangordnung seiner Einsen hervor. Ist α ein Zeichen für den Ordnungstypus $\overline{M}$, so sei $\overline{\alpha}$ ein Zeichen für die Kardinalzahl $\overline{\overline{M}}$. In diesem Sinne haben wir in den Nummern 1—8 dieses Abschnitts die Zeichen 1, 2, 3, . . ., ν, . . . für die endlichen Ordnungszahlen, dagegen die Zeichen $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, . . ., $\overline{\nu}$, ... für die endlichen Kardinalzahlen gebraucht.

Je nachdem die Kardinalzahl einer Menge endlich oder transfinit ist, nennen wir die Menge selbst und ihren Ordnungstypus endlich oder transfinit.

Bei zwei transfiniten n-fach geordneten Mengen kann es, wenn sie ähnlich sind, vorkommen, daß es nicht bloß eine Abbildung der einen auf die andere, sondern deren mehrere, ja sogar unendlich viele Abbildungen derselben zwei ähnlichen Mengen auf einander giebt; in diesen Fällen läßt jede Menge des entsprechenden Ordnungstypus sich in mehrfacher Weise auf sich selbst abbilden und ebenso können wir von dem betreffenden Ordnungstypus sagen, daß er sich selbst auf mehrfache Weise ähnlich ist. Hat man es mit endlichen n-fach geordneten Mengen von reinem Ordnungstypus zu thun, so existirt für je zwei ähnliche Mengen immer nur eine einzige Abbildung. Diese Eigenschaft ist jedoch nicht auf endliche Mengen beschränkt; es giebt auch Klassen von transfiniten geordneten Mengen, die nur eine Abbildung von zwei ähnlichen Mengen zulassen und dazu gehören beispielsweise alle diejenigen einfach geordneten Mengen, welche ich wohlgeordnete Mengen*) genannt habe.

11. Ein n-facher Typus α setzt sich, wie wir in Nr. 10 sahen, aus gewissen Einsen e, e′, e″, ... zusammen, die nach n Richtungen ein bestimmtes Rangverhältnis zu einander haben. Faßt man nicht alle, sondern nur einen gewissen Teil von diesen Einsen in's Auge, so bestimmt derselbe für sich in der vorliegenden Rangordnung ebenfalls einen Typus γ, den wir als Teil von α (allerdings nur im virtuellen Sinne verstanden) ansehen können. So

*) M. v. Grundlagen e. allg. Mannigfaltigkeitslehre, p. 4.

enthält also jeder Typus α andere Typen $\gamma, \gamma', \gamma'', \ldots$ als virtuelle Teile, welche gewissermaßen teils aus einander fallen, teils in einander eindringen. Die Mannigfaltigkeit von Beziehungen zwischen dem Ganzen und den Teilen ist bei den Typen eine so große, daß es gerathen scheint, sich zunächst auf die Betrachtung der einfachsten Verhältnisse zu beschränken; sie hängen mit den Operationen des Addirens und Multiplicirens von zwei n-fachen Typen α und β zusammen und diese will ich jetzt mit der unerläßlichen Ausführlichkeit erklären.

a) Definition von $\alpha + \beta$. Wir denken uns zwei Mengen M und N, denen die Typen $\overline{\mathrm{M}} = \alpha$, $\overline{\mathrm{N}} = \beta$ zukommen und setzen aus ihnen eine neue geordnete Menge, die wir mit $\mathrm{M} + \mathrm{N}$ bezeichnen, zusammen, und zwar mit folgenden Bestimmungen über die Rangordnung der Elemente. Die Elemente von M mögen innerhalb $\mathrm{M} + \mathrm{N}$ unter einander dieselbe Rangordnung nach allen n Richtungen behalten, welche sie in M hatten; ebenso mögen die Elemente von N innerhalb $\mathrm{M} + \mathrm{N}$ unter einander dieselbe Rangordnung nach allen n Richtungen bewahren, welche ihnen in N zukam; endlich mögen in $\mathrm{M} + \mathrm{N}$ alle Elemente von N nach jeder der n Richtungen höheren Rang haben, als alle Elemente von M.

Alle Mengen $\mathrm{M} + \mathrm{N}$, welche diesen Anforderungen genügen, sind offenbar unter einander ähnliche n-fach geordnete Mengen, und bestimmen denjenigen Typus, den wir als die Summe $\alpha + \beta$ betrachten wollen. Wir haben also folgende Definitionsgleichung:

$$\alpha + \beta = \overline{\mathrm{M} + \mathrm{N}},$$

und es heißt hier α der Augendus, β der Addendus.

Darnach beweist man leicht die Gültigkeit des associativen Gesetzes: $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

Das kommutative Gesetz hat dagegen hier keine allgemeine Herrschaft; abgesehen von Ausnahmen, sind $\alpha + \beta$ und $\beta + \alpha$ verschiedene Typen.

Man bemerke noch, daß die Kardinalzahl von $\alpha + \beta$ gleich ist der Summe der Kardinalzahlen von α und β (M. v. Nr. 5); in Zeichen: $\overline{\overline{\alpha + \beta}} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$.

b) Definition von $\alpha \cdot \beta$. Man lege eine Menge N vom Typus β zu Grunde, so daß $\overline{N} = \beta$, und bezeichne die Elemente, aus denen N besteht, mit $F_1, F_2, \ldots, F_\lambda, \ldots\ldots$

Ferner seien $M_1, M_2, \ldots, M_\lambda, \ldots\ldots$ lauter Mengen vom Typus α, so daß:

$$\overline{M}_1 = \overline{M}_2 = \ldots = \overline{M}_\lambda = \ldots = \alpha.$$

Diese einander ähnlichen Mengen denken wir uns auf einander abgebildet; es seien:

$E_{1,1}, E_{1,2}, \ldots, E_{1,\mu}, \ldots\ldots$ die Elemente von M_1
$E_{2,1}, E_{2,2}, \ldots, E_{2,\mu}, \ldots$ die Elemente von M_2
. . . .
$E_{\lambda,1}, E_{\lambda,2}, \ldots, E_{\lambda,\mu}, \ldots$ die Elemente von $M_\lambda, \ldots$

und zwar mögen $E_{1,\mu}, E_{2,\mu}, \ldots, E_{\lambda,\mu}, \ldots\ldots$ bei den zu Grunde gelegten Abbildungen einander entsprechende Elemente von $M_1, M_2, \ldots, M_\lambda, \ldots\ldots$ sein.

Es werde nun eine neue Menge, die ich mit $M \cdot N$ bezeichne, aus N dadurch gebildet, daß darin an Stelle der Elemente $F_1, F_2, \ldots, F_\lambda, \ldots\ldots$ resp. die Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_\lambda, \ldots$ substituirt werden, wobei die Rangordnung folgenden Bestimmungen unterworfen sei. Alle Elemente $E_{\lambda,\mu}, E_{\lambda,\mu'}$ einer und derselben Menge M_λ mögen innerhalb $M \cdot N$ unter einander nach allen n Richtungen dasselbe Rangverhältnis behalten, welches sie in M_λ hatten. Für zwei Elemente $E_{\varkappa,\mu}$ und $E_{\lambda,\mu'}$, welche zwei verschiedenen Mengen $M_\varkappa$ und M_λ angehören, muß dagegen eine Unterscheidung gemacht werden: 1) Haben $F_\varkappa$ und F_λ innerhalb N nach der ν^{ten} Richtung verschiedenen Rang, so sei die Rangbeziehung von $E_{\varkappa,\mu}$ zu $E_{\lambda,\mu'}$ innerhalb $M \cdot N$ in der ν^{ten} Richtung dieselbe, wie die von $F_\varkappa$ zu F_λ innerhalb N nach der ν^{ten} Richtung. 2) Haben $F_\varkappa$ und F_λ innerhalb N nach der ν^{ten} Richtung gleichen Rang, so sei das Rangverhältnis von $E_{\varkappa,\mu}$ zu $E_{\lambda,\mu'}$ innerhalb $M \cdot N$ in der ν^{ten} Richtung dasselbe, wie das von $E_{\varkappa,\mu}$ zu $E_{\varkappa,\mu'}$ innerhalb $M_\varkappa$ oder, was wegen der Abbildung von $M_\varkappa$ auf M_λ dasselbe bedeutet, wie das von $E_{\lambda,\mu}$ zu $E_{\lambda,\mu'}$ innerhalb M_λ nach der ν^{ten} Richtung.

Man überzeugt sich leicht, daß alle nach dieser Vorschrift gebildeten n-fach geordneten Mengen M · N unter einander ähnlich sind, und es gilt dies im Besondern auch, wenn statt der zu Grunde gelegten Abbildungen der Mengen M_1, M_2, . ., M_{λ}, ... andere Abbildungen derselben vorausgesetzt werden, falls deren mehrere möglich sind.

Mit der Menge M · N ist also ein bestimmter Typus gegeben und dieser ist es, der das Produkt aus dem Multiplikandus α in den Multiplikator β genannt werden soll. Wir haben also folgende Definition:

$$\alpha \cdot \beta = \overline{\overline{M \cdot N}}.$$

Man beweist auch hier das associative Gesetz:

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma,$$

während $\alpha \cdot \beta$ im Allgemeinen von $\beta \cdot \alpha$ verschieden ist.

Auch hat man das distributive Gesetz:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

mit α als Multiplikandus.

Ferner sieht man, im Hinblick auf Nr. 6, daß die Kardinalzahl des Produkts zweier Typen gleich ist dem Produkt aus den Kardinalzahlen der beiden Faktoren; in Zeichen:

$$\overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}.$$

Ist ein Typus π nicht anders als Produkt zweier Typen α und β darstellbar, als daß der Multiplikator β dem Typus π selbst oder der Eins im n-fachen Ordnungssystem gleich ist, so nennen wir π einen Primtypus.

12. Mit einem gegebenen n-fachen Typus α hängen gewisse andere Typen eng zusammen, welche ich die mit α konjugirten Typen nenne.

Man kann die dem Typus α eigene Rangordnung so verändern, daß sämtliche Rangbeziehungen der Einsen e, e′, e″, ... mit Bezug auf die $\mu^{\underline{\underline{te}}}$ und $\nu^{\underline{\underline{te}}}$ Richtung mit einander vertauscht, nach allen anderen Richtungen aber erhalten bleiben.

Zwei Einsen e und e′ haben demnach im transformirten Typus nach der $\mu^{\underline{\underline{ten}}}$ und $\nu^{\underline{\underline{ten}}}$ Richtung dieselben Rangbeziehungen, welche ihnen in α resp. nach der ν^{ten} und μ^{ten} Richtung zukommen, während nach den anderen $n-2$ Richtungen keine Änderung in der Rangordnung der Einsen eintritt. Diese Transformation nennen wir die Vertauschungstransformation mit Bezug auf die μ^{te} und ν^{te} Richtung.

Solcher Vertauschungstransformationen giebt es $\frac{n(n-1)}{2}$; ihre wiederholte Anwendung liefert, wenn der Typus α mitgezählt wird, im Ganzen $\Pi n = 1 . 2 . 3 \ldots n$ im Allgemeinen verschiedene konjugirte Typen.

Es läßt sich aber auch aus α dadurch ein im Allgemeinen neuer Typus herstellen, daß alle Rangverhältnisse mit Bezug auf die ν^{te} Richtung umgekehrt, mit Bezug auf die anderen Richtungen aber konservirt werden. Zwei Einsen e und e' haben hier im transformirten Typus mit Bezug auf die ν^{te} Richtung das entgegengesetzte Rangverhältnis von demjenigen, welches sie nach derselben ν^{ten} Richtung in α haben; kommt den Einsen e und e' in α gleicher Rang in der ν^{ten} Richtung zu, so bleibt er natürlich bei der Transformation erhalten; nach allen übrigen Richtungen sind die Rangbeziehungen von e und e' in beiden Typen dieselben. Diese Transformation nennen wir Umkehrtransformation mit Bezug auf die ν^{te} Richtung. Solcher Umkehrtransformationen giebt es n; ihre successive Anwendung liefert, wenn α mitgezählt wird, im Ganzen 2^n verschiedene konjugirte Typen.

Setzt man die Vertauschungstransformationen und die Umkehrtransformationen beliebig zusammen, so erhält man, mit Einschluß von α, im Ganzen $2^n \cdot \Pi n$ im Allgemeinen verschiedene konjugirte Typen. In besonderen Fällen reduziren sich dieselben auf eine geringere Zahl, unter Umständen sind sie sogar alle gleich.

13. Beschränken wir unsere weiteren Betrachtungen zunächst auf endliche n-fache Typen, d. h. auf solche, bei denen die zugehörige Kardinalzahl m endlich ist.

Die reinen einfachen Typen ($n = 1$) fallen hier mit den endlichen Ordnungszahlen 1, 2, 3, 4, ... zusammen, weil die endlichen einfach geordneten Mengen von reinem Typus zugleich immer wohlgeordnete Mengen (M. v. über diesen Begriff; Grundl. e. allg. Mannigfaltigkeit. p. 4.) sind, deren Typen ich allgemein Ordnungszahlen nenne. Zu jeder endlichen Kardinalzahl m giebt es nur einen einzigen reinen einfachen Typus, d. h. nur eine Ordnungszahl; es hängt dies unmittelbar mit dem in Nr. 7 bewiesenen Satz zusammen, wonach eine endliche Menge niemals einem ihrer Bestandteile äquivalent ist.

Die Anzahl aller einfachen Typen ($n = 1$), d. h. der reinen und der gemischten, von gegebener Kardinalzahl m ist hingegen, wie man sich leicht überzeugt, gleich 2^{m-1}.

Fassen wir jetzt die zweifachen Typen ($n = 2$) von endlicher Kardinalzahl m näher in's Auge.

Ein solcher Typus α besteht (M. v. Nr. 10) aus m Einsen, die nach zwei von einander unabhängigen Richtungen eine bestimmte Rangordnung haben.

Es mögen diese m Einsen im Ganzen s verschiedene Rangstufen nach der ersten Richtung haben und t sei die Anzahl der verschiedenen Rangstufen nach der zweiten Richtung.

Die verschiedenen Rangstufen erster Richtung wollen wir als 1te, 2te, ... ste Rangstufe unterscheiden und zwar so, daß die 1te Rangstufe alle Einsen von α umfaßt, welche den niedrigsten Rang nach der ersten Richtung haben, die zweite alle Einsen enthält, welche den nächst höheren Rang nach der ersten Richtung haben u. s. w.; auch werde mit g_1 die Anzahl der verschiedenen Einsen bezeichnet, welche nach der ersten Richtung den ersten Rang haben, mit g_2 die Anzahl der Einsen zweiten Ranges u. s. w., mit g_s die Anzahl der Einsen sten Ranges in Bezug auf die erste Richtung.

Ganz analog unterscheiden wir 1te, 2te, ... tte Rangstufe zweiter Richtung und bezeichnen mit $h_1, h_2, \ldots h_t$ die Anzahlen der Einsen, welche resp. den 1ten, 2ten, ... tten Rang nach der zweiten Richtung haben.

So entsprechen jedem Typus α gewisse positive ganze Zahlen $s, t, g_1, g_2, \ldots g_s, h_1, h_2, \ldots h_t$. Ihrer Bedeutung nach sind sie alle $\leqq m$ und man hat immer:

$$g_1 + g_2 + \cdots + g_s = h_1 + h_2 + \cdots + h_t = m \ldots\ldots (1)$$

Zur vollständigen Bestimmung des zweifachen Typus α führen wir ein System von s. t Größen $k_{\mu,\nu}$ ein, wo der Index μ die Werte 1, 2, 3, . . . s, der Index ν die Werte 1, 2, 3, ... t erhält und zwar habe $k_{\mu,\nu}$ die Bedeutung der Anzahl derjenigen Einsen in α, welche den μ^{ten} Rang nach der ersten und den ν^{ten} Rang nach der zweiten Richtung haben; falls solche Einsen in α nicht vorhanden sind, habe $k_{\mu,\nu}$ den Wert Null.

Wir wollen das so bestimmte System:

$$\left|\begin{array}{l} k_{1,t},\ k_{2,t}, \dots\dots\dots, k_{s,t} \\ k_{1,t-1},\ k_{2,t-1}, \dots\dots, k_{s,t-1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ k_{1,2},\ k_{2,2}, \dots\dots\dots, k_{s,2} \\ k_{1,1},\ k_{2,1}, \dots\dots\dots, k_{s,1} \end{array}\right| \quad \dots\dots (2)$$

die Charakteristik von α nennen.

Ist α ein reiner Typus, so haben die Größen $k_{\mu,\nu}$ nur die Werte 0 und 1; bei gemischten Typen α kommt unter den Größen $k_{\mu,\nu}$ wenigstens eine vor, die größer ist als 1.

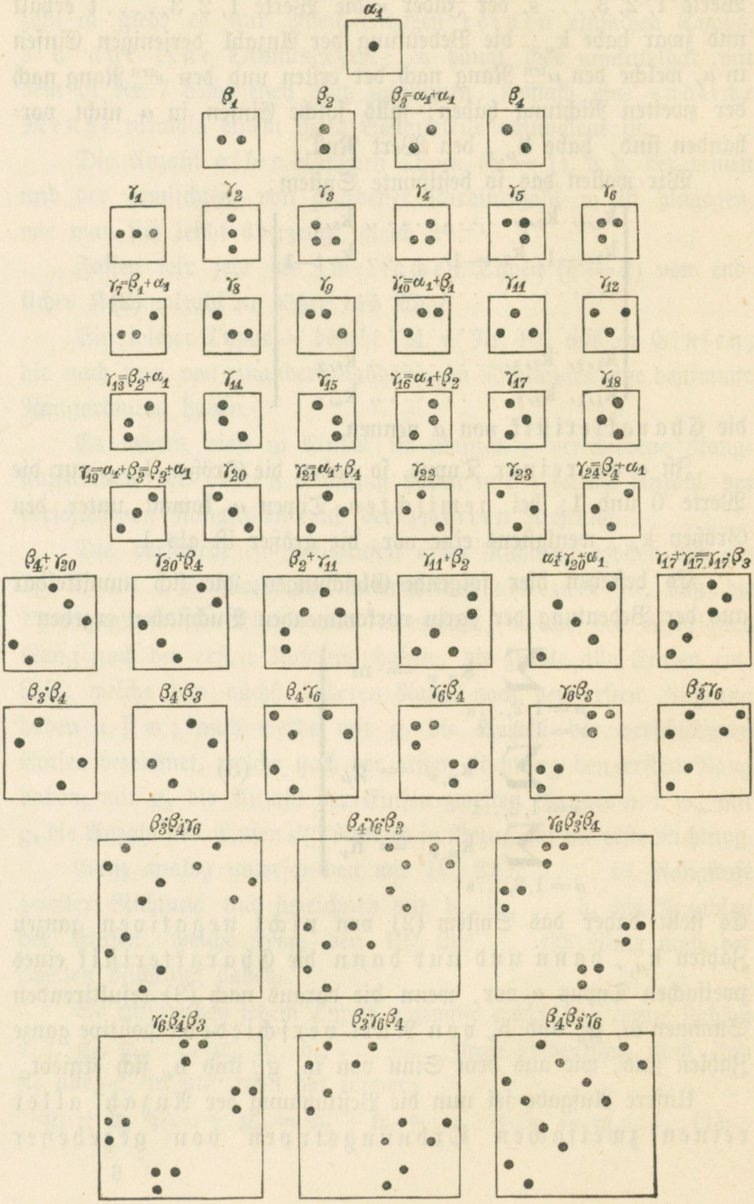
Es bestehen hier folgende Gleichungen, die sich unmittelbar aus der Bedeutung der darin vorkommenden Buchstaben ergeben:

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{\substack{\mu=1,2,\dots s \\ \nu=1,2,\dots t}} k_{\mu,\nu} = m \\ \sum\limits_{\nu=1,2,\dots t} k_{\mu,\nu} = g_\mu \\ \sum\limits_{\mu=1,2,\dots s} k_{\mu,\nu} = h_\nu \end{array}\right\} \dots (3)$$

Es stellt daher das System (2) von nicht negativen ganzen Zahlen $k_{\mu,\nu}$ dann und nur dann die Charakteristik eines zweifachen Typus α vor, wenn die daraus nach (3) resultirenden Summen m, g_μ und h_ν von Null verschiedene positive ganze Zahlen sind, wie aus dem Sinn von m, g_μ und h_ν sich ergiebt.

Unsere Aufgabe sei nun die Bestimmung der Anzahl aller reinen zweifachen Ordnungstypen von gegebener

Kardinalzahl m; diese Anzahl, als Funktion von m gedacht, werde mit $\Phi(m)$ bezeichnet.



Bevor ich die Lösung entwickele, möchte ich in der nebenstehenden Tafel*) die verschiedenen zweifachen **reinen** Typen für m = 1, 2 und 3 veranschaulichen, deren es für m = 1 **einen**: α_1, für m = 2 **vier**: β_1, β_2, β_3, β_4, für m = 3 **vierundzwanzig**: γ_1 bis γ_{24} giebt. Sie sind durch **Punktmengen** in der Ebene dargestellt, welche wir in dem Sinne als zweifach geordnete Mengen aufzufassen haben, daß die erste Ordnungsrichtung durch die horizontale Richtung von links nach rechts, die zweite Ordnungsrichtnng durch die vertikale Richtung von unten nach oben bestimmt sind. Jeder **Punkt** repräsentirt eine **Eins** in dem betreffenden Ordnungstypus. Punkten, welche auf einer und derselben Vertikalen liegen, entsprechen im Typus Einsen, die nach der ersten Richtung gleichen Rang haben; liegen aber zwei Punkte nicht auf einer Vertikalen, so hat von den beiden durch sie dargestellten Einsen diejenige den niedrigeren Rang in der ersten Ordnungsrichtung, welche dem, links vom andern gelegenen Punkte entspricht. Ebenso haben Einsen, denen Punkte auf einer und derselben Horizontalen entsprechen, im Typus gleichen Rang nach der zweiten Ordnungsrichtung, wogegen von zwei Einsen, deren entsprechende Punkte nicht auf einer und derselben Horizontalen liegen, diejenige den niedrigeren Rang nach der zweiten Ordnungsrichtung hat, für welche der entsprechende Punkt der niedriger in der Ebene gelegene ist.

Zur Erläuterung der Zahlen s, t, g, h bemerke ich, daß: in α_1: s = 1, t = 1, in β_1: s = 2, t = 1, in β_2: s = 1, t = 2, in β_3 und β_4: s = 2, t = 2, in γ_1: s = 3, t = 1, in γ_2: s = 1, t = 3, in γ_3 bis γ_6: s = 2, t = 2, in γ_7 bis γ_{12}: s = 3, t = 2, in γ_{13} bis γ_{18}: s = 2, t = 3, in γ_{19} bis γ_{24}: s = 3, t = 3 ist. Ferner hat man beispielsweise in γ_6: $g_1 = 2$, $g_2 = 1$, $h_1 = 1$, $h_2 = 2$, in γ_{19} bis γ_{24}: $g_1 = g_2 = g_3 = h_1 = h_2 = h_3 = 1$.

Die vier letzten Reihen in unsrer Tafel mögen die in Nr. 11 erklärten Operationen der **Addition** und **Multiplikation** von Typen veranschaulichen.

*) Ich verdanke die zweckmäßige Herstellung derselben Herrn Dr. H. Wiener, Privatdocenten der Mathematik an der Universität in Halle.

Es werde nun mit $\varphi'(g_1, g_2, \ldots, g_s, t)$ die Anzahl der reinen zweifachen Typen bezeichnet, in welchen s und t (beide $\leqq m$) sowohl, wie auch $g_1, g_2, \ldots g_s$ gegebene positive Werte haben, bei denen die Bedingungsgleichung (1) erfüllt sei. Dann setzt sich offenbar $\Phi(m)$ nach folgender Formel zusammen:

$$\Phi(m) = \sum_{\substack{g_1+g_2+\cdots+g_s=m \\ s=1,2,\ldots m \\ t=1,2,\ldots m}} \varphi'(g_1, g_2, \ldots, g_s, t) \quad \ldots\ldots (4)$$

Die Summation ist hier so zu verstehen, daß den Buchstaben s und t alle Werte von 1 bis m beizulegen sind und bei jedem Wertepaar s, t die Buchstaben $g_1, g_2, \ldots g_s$ alle positiven Wertsysteme zu durchlaufen haben, die der Bedingungsgleichung (1) genügen.

$\varphi'(g_1, g_2, \ldots g_s, t)$ ist nach (3) die Anzahl der Lösungssysteme $(k_{\mu,\nu})$, welche folgenden s Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} k_{1,1} + k_{1,2} + \cdots\cdots + k_{1,t} = g_1 \\ k_{2,1} + k_{2,2} + \cdots \quad + k_{2,t} = g_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_{s,1} + k_{s,2} + \cdots \quad + k_{s,t} = g_s \end{array}\right\} \ldots (5)$$

sowie auch den t Nebenbedingungen:

$$h_1 > 0, h_2 > 0, \ldots\ldots h_t > 0 \ldots (6)$$

genügen, wobei die s . t Unbekannten $k_{\mu,\nu}$ nur die Werte 0 und 1 erhalten dürfen und wo die h_ν die Bedeutung der in (3) geschriebenen Summen haben.

Sei $\varphi(g_1, g_2, \ldots g_s, t)$ die Anzahl der Lösungssysteme $(k_{\mu,\nu})$ für dasselbe Gleichungssystem (5), wenn die Nebenbedingungen (6) fallen gelassen werden; diese Anzahl ist, weil hier die Gleichungen (5) unabhängig von einander aufzulösen sind, gleich dem Produkt aus den Anzahlen der Lösungen, welche die einzelnen Gleichungen (5), jede für sich, haben.

Die Anzahl der Lösungssysteme einer Gleichung von der Form:

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_t = g$$

in ganzen Zahlen $k_1, k_2, \ldots k_t$, welche nur die Werte 0 und 1 annehmen dürfen, ist gleich dem Binomialcoefficienten:

$$\binom{t}{g} = \frac{t\,(t-1)\,(t-2)\ldots(t-g+1)}{1.\;\;2.\;\;3.\;\;\ldots\;\;g.} \ldots\ldots (7)$$

Man hat folglich:

$$\varphi\,(g_1, g_2, \ldots g_s, t) = \binom{t}{g_1}.\binom{t}{g_2}\ldots\ldots\binom{t}{g_s}\ldots\ldots (8)$$

Zwischen den Functionen φ und φ' besteht aber folgende Beziehung:

$$\varphi\,(g_1, g_2, \ldots g_s, t) = \sum_{\nu=0,1,2,\ldots,t-1} \binom{t}{\nu} \cdot \varphi'\,(g_1, g_2, \ldots g_s, t-\nu) \ldots (9)$$

Das allgemeine Glied dieser Summe ist nämlich gleich der Anzahl derjenigen Lösungssysteme von (5), für welche ν der Summen $h_1, h_2, \ldots h_t$ den Wert Null, die übrigen $t-\nu$ dieser Summen aber von Null verschiedene Werte haben; summirt man daher von $\nu = 0$ bis $\nu = t-1$, so erhält man als Resultat die Anzahl $\varphi\,(g_1, g_2, \ldots g_s, t)$.

Aus (9) ergiebt sich leicht, wenn man darin $t = 1, 2, 3, \ldots m$ setzt und diese m Gleichungen nach den Werten der Function φ' auflöst, folgende Umkehrung:

$$\varphi'\,(g_1, g_2, \ldots g_s, t) = \sum_{\nu=0,1,\ldots t-1} (-1)^{\nu} \binom{t}{\nu} \cdot \varphi\,(g_1, g_2, \ldots g_s, t-\nu) \ldots (10)$$

Wird dieser Wert von φ' in die Formel (4) eingesetzt, nachdem vorher der Buchstabe t in t' verwandelt worden ist, so erhält man:

$$\Phi\,(m) = \sum_{\substack{\nu=0,1,2,\ldots t'-1 \\ g_1+g_2+\ldots+g_s=m \\ s=1,2,\ldots\ldots m \\ t'=1,2,\ldots\ldots m}} (-1)^{\nu} \binom{t'}{\nu} \cdot \varphi\,(g_1, g_2, \ldots g_s, t'-\nu)$$

Fassen wir hier diejenigen Glieder zusammen, in denen $t' - \nu$ einen und denselben Wert t hat, so erhält der Coefficient von $\varphi\,(g_1, g_2, \ldots g_s, t)$ folgenden Wert:

$$\sum_{\nu=0,1,2,\ldots\, m-t} (-1)^{\nu} \binom{t+\nu}{\nu} = (-1)^{m-t}\, C\,(m, t),$$

wo demnach wegen $\binom{t+\nu}{\nu} = \binom{t+\nu}{t}$ die hier eingeführte Function $C\,(m, t)$ durch folgende Gleichung definirt ist:

$$C\,(m, t) = \binom{m}{t} - \binom{m-1}{t} + \binom{m-2}{t} - \ldots (-1)^{m-t} \binom{t}{t} \ldots \quad (11)$$

Wir haben daher:

$$\Phi\,(m) = \sum_{\substack{g_1+g_2+\ldots g_s = m\\ s=1,2,\ldots m\\ t=1,2,\ldots m}} (-1)^{m-t}\, C\,(m, t)\,.\,\varphi\,(g_1, g_2, \ldots g_s, t)$$

Wird also folgende Function:

$$D\,(m, t) = \sum_{\substack{g_1+g_2+\ldots+g_s = m\\ s=1,2,\ldots m}} \varphi\,(g_1, g_2, \ldots g_s, t) \;\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

in die Betrachtung eingeführt, so haben wir:

$$\Phi\,(m) = \sum_{t=1,2,\ldots m} (-1)^{m-t}\, C\,(m, t)\,.\,D\,(m, t) \;\ldots\ldots \quad (13)$$

Hiermit ist die gesuchte Function $\Phi\,(m)$ auf die beiden Functionen $C\,(m, t)$ und $D\,(m, t)$, welche durch die Formeln (11) und (12) definirt sind, zurückgeführt.

Zur praktischen Berechnung bieten sich Rekursionsformeln dar.

Für $C\,(m, t)$ beweist man leicht die Funktionalgleichung:

$$C\,(m+1,\, t+1) = C\,(m,\, t+1) + C\,(m, t) \;\ldots\ldots \quad (14)$$

Man hat außerdem für diese Function die Werte:

$$\left.\begin{array}{l} C\,(2\,m, 1) = m;\; C\,(2\,m+1, 1) = m+1; \\ C\,(m, m) = 1;\; C\,(m, t) = 0, \text{ wenn } t > m \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Daraus ergiebt sich folgende Tabelle für C (m, t), die leicht zu vervollständigen ist:

m= t=	1	2	3	4	5	6	
1	1						
2	1	1					
3	2	2	1				
4	2	4	3	1			
5	3	6	7	4	1		
6	3	9	13	11	5	1	

Andererseits haben wir nach (12):

$$D(m+1, t) = \sum_{\substack{g_0+g_1+\ldots+g_s=m+1 \\ s=0,1,2,\ldots m}} \varphi(g_0, g_1, \ldots g_s, t)$$

Für $s = 0$, $g_0 = m+1$ nimmt das allgemeine Glied der letzten Summe den Wert $\binom{t}{m+1}$ an; man kann daher, unter Berücksichtigung des Umstandes, daß $g_1, g_2, \ldots g_s$ positiv sind und daher $s \leqq m+1-g_0$ sein muß, schreiben:

$$D(m+1, t) = \binom{t}{m+1} + \sum_{\substack{g_1+g_2+\ldots+g_s=m+1-g_0 \\ s=1,2,3,\ldots,m+1-g_0 \\ g_0=1,2,3,\ldots m}} \binom{t}{g_0} \varphi(g_1, g_2, \ldots g_s, t)$$

Also ist:

$$D(m+1, t) = \binom{t}{m+1} + \binom{t}{m} D(1,t) + \binom{t}{m-1} D(2,t) + \ldots + \binom{t}{1} D(m,t)$$

Setzt man daher fest, daß:

$$D(0, t) = 1 \ldots\ldots (16)$$

sei, so hat man folgende Rekursionsformel:

$$D(m+1, t) = \binom{t}{1} D(m,t) + \binom{t}{2} D(m-1,t) + \ldots + \binom{t}{m+1} D(0,t) \ldots\ldots (17)$$

Man bemerke noch, daß stets:

$$D(m, 1) = 1 \ldots\ldots (18)$$

ist.

Um hieraus D (m, t) zu berechnen, bedürfen wir der folgenden Tafel für den Binomialcoefficienten $\binom{t}{m}$:

m ‖ t=	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6
2		1	3	6	10	15
3			1	4	10	20
4				1	5	15
5					1	6
6						1

So gewinnt man folgende zu vervollständigende Tafel für D (m, t):

m ‖ t=	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6
2	1	5	12	22	35	51
3	1	12	46	116	235	416
4	1	29	177	613	1580	3396
5	1	70	681	3240	10626	27732
6	1	169	2620	17124	71460	226454

Mit Hülfe dieser Tabellen ergeben sich aus (13) folgende Werte der Funktion $\Phi(m)$:

$$\Phi(1) = 1;\ \Phi(2) = 4;\ \Phi(3) = 24;\ \Phi(4) = 196;$$
$$\Phi(5) = 2016;\ \Phi(6) = 24976.$$

Dies sind für m = 1 bis 6 die Anzahlen der reinen zweifachen Ordnungstypen. Handelt es sich aber um die Anzahl aller zweifachen Ordnungstypen (der reinen und der gemischten) bei gegebener Kardinalzahl m, welche wir mit $\Psi(m)$ bezeichnen wollen, so kann derselbe Weg eingeschlagen werden, wie für die Berechnung von $\Phi(m)$.

Das Gleichungssystem (5) wird jetzt so aufzulösen sein, daß die Unbekannten $k_{\mu,\nu}$ nicht bloß die Werte 0 und 1, sondern beliebige nicht negative ganzzahlige Werte annehmen dürfen.

An die Stelle der Funktion $\varphi(g_1, g_2, \ldots g_s, t)$ tritt hier eine andere, die wir $\psi(g_1, g_2, \ldots g_s, t)$ nennen wollen und welche durch die Gleichung definiert ist:

$$\psi(g_1, g_2, \cdots g_s, t) = \binom{t+g_1-1}{g_1} \cdot \binom{t+g_2-1}{g_2} \cdots\cdots \binom{t+g_s-1}{g_s} \cdots\cdots (19)$$

Versteht man daher unter $E(m, t)$ folgende Funktion:

$$E(m, t) = \sum_{\substack{g_1+g_2+\ldots+g_s=m \\ s=1,2,\ldots m}} \psi(g_1, g_2, \ldots g_s, t) \ldots\ldots (20)$$

so hat man:

$$\Psi(m) = \sum_{t=1,2,\ldots m} (-1)^{m-t}\, C(m, t)\, E(m, t) \ldots\ldots (21)$$

Es besteht aber auch ein einfacher Zusammenhang zwischen $\Phi(m)$ und $\Psi(m)$, der durch Zurückgehen auf die Bedeutung dieser Anzahlen direkt geschlossen wird, in Gestalt folgender Gleichungen:

$$\Psi(m) = \Phi(m) + \binom{m-1}{1}\Phi(m-1) + \binom{m-1}{2}\Phi(m-2) + \ldots + \binom{m-1}{m-2}\Phi(2) + \Phi(1) \ldots (22)$$

$$\Phi(m) = \Psi(m) - \binom{m-1}{1}\Psi(m-1) + \binom{m-1}{2}\Psi(m-2) + \ldots + (-1)^{m-2}\binom{m-1}{m-2}\Psi(2) + (-1)^{m-1}\Psi(1) \ldots (23)$$

Aus (22) erhält man mit Hülfe der gefundenen Werte von $\Phi(m)$:

$$\Psi(1) = 1;\ \Psi(2) = 5;\ \Psi(3) = 33;\ \Psi(4) = 281;$$
$$\Psi(5) = 2961;\ \Psi(6) = 37277.$$

14. Das Verfahren, durch welches wir die Anzahlen $\Phi(m)$ und $\Psi(m)$ der zweifachen Ordnungstypen in Nr. 13 bestimmt haben, läßt sich auch auf ein beliebiges n übertragen.

Es werde mit $\Phi(m, n)$ die Anzahl der reinen, mit $\Psi(m, n)$ die Anzahl der reinen und gemischten n-fachen Ordnungstypen von der Kardinalzahl m bezeichnet.

In einem n-fachen Typus α sind die Einsen nach n verschiedenen von einander unabhängigen Richtungen, welche von uns als $1^{\underline{\text{te}}}, 2^{\underline{\text{te}}}, \ldots \nu^{\underline{\text{te}}}, \ldots n^{\underline{\text{te}}}$ Richtung unterschieden werden, geordnet.

Wir bezeichnen mit s_ν die Anzahl der verschiedenen in α vorkommenden Rangstufen nach der ν^{ten} Richtung.

$g_{\nu,\mu}$ sei die Anzahl der verschiedenen Einsen in α, welche den μ^{ten} Rang nach der ν^{ten} Richtung einnehmen; es erhält daher der Index μ die Werte $1, 2, 3, \ldots s_\nu$.

Alle s_ν und $g_{\nu,\mu}$ sind positive ganze Zahlen $\leqq$ m und man hat für jedes bestimmte $\nu = 1, 2, 3, \ldots n$:

$$\sum_{\mu=1,2,\ldots s_\nu} g_{\nu,\mu} = m \ldots\ldots \quad (24)$$

Unter der Charakteristik des Typus α verstehen wir ein System von $s_1 \cdot s_2 \ldots\ldots s_n$ Zahlen:

$$\left| k_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n} \right| \ldots\ldots \quad (25)$$

wo der Index λ_ν die Werte $1, 2, 3, \ldots s_\nu$ anzunehmen hat und zwar hat $k_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n}$ die Bedeutung der Anzahl aller in α vorkommenden Einsen, welche nach der ersten Richtung den λ_1^{ten}, nach der zweiten Richtung den λ_2^{ten}, u. s. w., nach der n^{ten} Richtung den λ_n^{ten} Rang einnehmen; falls solche Einsen in α nicht existieren, soll $k_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n}$ den Wert Null haben. Ist α ein reiner Typus, so kommen den Größen k nur die Werte 0 und 1 zu.

Aus der Bedeutung der Größen k und g folgen unmittelbar die Gleichungen:

$$\sum_{\substack{\lambda_1=1,2,\ldots s_1 \\ \lambda_2=1,2,\ldots s_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \lambda_n=1,2,\ldots s_n}} k_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n} = m \ldots\ldots \quad (26)$$

und:

$$\sum k_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu, \ldots \lambda_n} = g_{\nu, \lambda_\nu} \ldots \quad (27)$$

wo die Summierung sich über alle Werte der Indices $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ zu erstrecken hat, mit Ausnahme des Index λ_ν, der bei der Summation einen konstanten Wert der Reihe $1, 2, 3, \ldots s_\nu$ behält.

Das System (25) von nicht negativen ganzen Zahlen $k_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n}$ bildet dann und nur dann die Charakteristik eines bestimmten n-fachen Typus α, wenn die aus ihnen nach (26) und

(27) resultierenden Summen m, $g_{\nu,\mu}$ von Null verschiedene positive ganze Zahlen sind.

In der nun folgenden Betrachtung spielt die erste der n Ordnungsrichtungen eine bevorzugte Rolle und wir wollen daher für die sich auf sie beziehenden Größen einfachere Bezeichnungen einführen. Wir setzen:

$$s_1 = s,\ g_{1,1} = g_1,\ g_{1,2} = g_2, \ldots\ldots g_{1,s} = g_s.$$

Es sei $\varphi'(g_1, g_2, \ldots g_s, s_2, s_3, \ldots s_n)$ die Anzahl der reinen n-fachen Typen, für welche die Größen $s, s_2, \ldots s_n$ bestimmte positive ganzzahlige Werte $\leqq m$ und ebenso $g_1, g_2, \ldots g_s$ bestimmte der Gleichung:

$$g_1 + g_2 + \ldots + g_s = m$$

genügende positive ganzzahlige Werte haben.

Man hat alsdann:

$$\Phi(m, n) = \sum_{\substack{g_1+g_2+\ldots+g_s=m \\ s=1,2\ldots m \\ s_2=1,2\ldots m \\ \ldots\ldots \\ s_n=1,2,\ldots m}} \varphi'(g_1, g_2, \ldots g_s, s_2, s_3, \ldots s_n) \ldots (28)$$

Die Funktion φ' läßt sich nun, wie die in Nr. 13 mit demselben Zeichen vorkommende, auf die durch Formel (8) definierte Funktion $\varphi(g_1, g_2, \ldots g_s, t)$ zurückführen; setzen wir die Bezeichnungen: $s_2 = t_1,\ s_3 = t_2, \ldots s_n = t_{n-1}$ fest, so besteht die Gleichung:

$$\varphi'(g_1, g_2, \ldots g_s, t_1, t_2, \ldots t_{n-1}) = \sum_{\substack{\mu_1=0,1,\ldots t_1 \\ \mu_2=0,1,\ldots t_2 \\ \mu_{n-1}=0,1,\ldots t_{n-1}}} (-1)^{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_{n-1}} \binom{t_1}{\mu_1} \cdot \binom{t_2}{\mu_2} \cdots \binom{t_{n-1}}{\mu_{n-1}} \varphi(g_1, g_2, \ldots, g_s, t) \ldots (29)$$

In dieser Summe hat der Buchstabe t die Bedeutung $t = (t_1 - \mu_1)(t_2 - \mu_2) \ldots (t_{n-1} - \mu_{n-1})$. Wird dieser Wert in (28) eingesetzt, so erhält man, wenn $t'_1, t'_2, \ldots t'_{n-1}$ an Stelle von $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$, t' an Stelle von t gesetzt werden:

$$\Phi(m,n) = \sum (-1)^{\mu_1+\mu_2+\cdot+\mu_{n-1}} \binom{t'_1}{\mu_1}\binom{t'_2}{\mu_2}\cdots\binom{t'_{n-1}}{\mu_{n-1}}\varphi(g_1, g_2, \ldots g_s, t')$$

$$\begin{array}{ll} \mu_1 = 0, 1, \ldots . t'_1 & g_1 + g_2 + \ldots + g_s = m \\ \mu_2 = 0, 1, \ldots t'_2 & s = 1, 2 \ldots m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & t'_1 = 1, 2, \ldots m \\ \mu_{n-1} = 0, 1, \ldots t'_{n-1} & t'_{n-1} = 1, 2 \ldots m \end{array}$$

Es ist hier $t' = (t'_1 - \mu_1)(t'_2 - \mu_2) \ldots . (t'_{n-1} - \mu_{n-1})$.

Fassen wir diejenigen Glieder zusammen, in welchen $t'_1 - \mu_1$, $t'_2 - \mu_2, \ldots . t'_{n-1} - \mu_{n-1}$ entsprechend die bestimmten Werte $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$ haben, so erhält der Coefficient von $\varphi\,(g_1, g_2, \ldots g_s, (t_1 . t_2 \ldots . t_{n-1}))$ den Wert:

$$(-1)^{m(n-1)-t_1-t_2-\ldots-t_{n-1}} C(m, t_1) . C(m, t_2) \ldots . C(m, t_{n-1}).$$

Führen wir daher folgende Funktion ein:

$$C(m, n, t) = \sum_{t_1 . t_2 \ldots . t_{n-1} = t} (-1)^{m(n-1)-t_1-t_2-\ldots-t_{n-1}} C(m, t_1) . C(m, t_2) \ldots C(m, t_{n-1}) \ldots . (30)$$

wo $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$ alle positiven ganzzahligen Wertsysteme anzunehmen haben, bei denen die Gleichung:

$$t_1 \cdot t_2 \ldots . t_{n-1} = t \ldots . . (31)$$

mit den Nebenbedingungen:

$$t_1 \leqq m, t_2 \leqq m, \ldots . t_{n-1} \leqq m \ldots (32)$$

erfüllt ist, so ergiebt sich ohne Weiteres die Formel:

$$\Phi(m, n) = \sum_{t=1,2,3,\ldots m^{n-1}} C(m, n, t) . D(m, t) \ldots . . (33)$$

Für den Fall $n = 2$ ist $C(m, 2, t) = (-1)^{m-t} C(m, t)$ und es geht die Formel (32) in die Formel (13) für $\Phi(m)$ über.

Ebenso findet man:

$$\Psi(m, n) = \sum_{t=1,2,3,\ldots m^{n-1}} C(m, n, t) . E(m, t) \ldots . . (34)$$

Auch bestehen zwischen $\Phi(m, n)$ und $\Psi(m, n)$ die Gleichungen:

$$\Psi(m,n) = \Phi(m,n) + \binom{m-1}{1}\Phi(m-1,n) + \binom{m-1}{2}\Phi(m-2,n) + \ldots + \binom{m-1}{m-2}\Phi(2,n) + \Phi(1,n) \ldots (35)$$

$$\Phi(m,n) = \Psi(m,n) - \binom{m-1}{1}\Psi(m-1,n) + \binom{m-1}{2}\Psi(m-2,n) - \ldots (-1)^{m-2}\binom{m-1}{m-2}\Psi(2,n) + (-1)^{m-1}\Psi(1,n) \ldots (3$$

Berichtigungen.

Pag. 11 Zeile 2 von unten lies dem statt den.
Pag. 24 Zeile 15 von oben sind zwischen M und stehen die Worte einzu-einzufügen: und nur diese.
Pag. 29 Zeile 10 von unten sind zwischen dem und unterschiedslosen die Worte einzufügen: seiner Natur nach.
Pag. 43 Zeile 8 von oben lies dixerit statt discerit.
Pag. 47 Die Bezeichnung Emanuel Maignan's (er lebte von 1601 bis 1676) als eines Franciskanermönches ist nicht ganz zutreffend, da hierunter die dem Orden des S. Franciscus von Assisi angehörigen sogenannten Minoriten oder Seraphischen Brüder gewöhnlich verstanden werden. E. M. war aber (ebenso wie der als Freund des Cartesius bekannte Pater Mersenne) ein Minime, das heißt Angehöriger eines, von Franciscus von Paula († 1507) im Jahre 1435 gestifteten, die Strenge des Franciscanerordens, an den er sich sonst anschloß, durch Enthaltung von allem Fleisch überbietenden Mönchsordens.

Ich verdanke diese Berichtigung der Güte des R. P. Ignatius Jeiler, O. S. Franz. Präfekten des Coll. S. Bonaventurae in Brozzi per Quaracchi, bei Florenz.

Pag. 53 Zeile 5 von unten lies S. Giulio statt Guilio.

Aus dem

Philosophischen Verlag

von

C. E. M. Pfeffer (Robert Stricker)

in

Halle-Saale.

1890.

Pressensé, Edmund von, Die Ursprünge. Zur Geschichte und Lösung des Problems der Erkenntnis, der Kosmologie, der Anthropologie und des Ursprungs der Moral und Religion. Autorisirte deutsche Ausgabe von Eduard Fabarius. Zweite unveränderte Ausgabe. 466 S. ℳ 4,50.

Kurze Inhaltsübersicht.

Erstes Buch. Das Problem der Erkenntnis.

I. Kap.

Das Problem der Erkenntnis und der Positivismus.

II. Kap.

Das Problem der Erkenntnis und die neuere Psychologie in England, Frankreich und Deutschland. 1. Die englische Psychologie. Stuart Mill. Herbert Spencer. 2. Die Erkenntnistheorie von Taine. 3. Die neuere deutsche Psychologie. — Die auf den Materialismus gegründeten Erkenntnistheorien. Der Skepticismus.

III. Kap.

Das Problem der Erkenntnis und die kritische Schule in Deutschland und in Frankreich. Die von Maine de Biran versuchte Vereinigung des Cartesianismus und des Kantianismus. 1. Descartes und Kant. 2. Maine de Biran. 3. Der französische Kriticismus.

IV. Kap.

Die wahre Lösung des Problems der Erkenntnis. 1. Ursprung und Entwickelung der Erkenntnis. 2. Bedeutung des Willens bei der Erkenntnis. Die Bedingungen der Gewißheit.

Zweites Buch. Das kosmologische Problem.

I. Kap.

Das Kausalitätsprincip in der Welt. 1. Der die Natur beherrschende Gedanke. 2. Die bildende Kraft in den verschiedenen Reichen der Natur.

II. Kap.

Die alten Einwürfe. 1. Der Atomismus. 2. Der Organicismus.

III. Kap.

Die auf die Fortdauer und Veränderung der Kraft gegründeten Einwürfe.

IV. Kap.

Die Evolutionslehre. Der Transformismus. 1. Evolutionslehre. Darwin. Robert Wallace. 2. Der monistische Transformismus. Herbert Spencer und Häckel. 3. Die Theorie der Immanenz. Hegel. 4. Der Pessimismus. Schopenhauer und Hartmann. Renan und Jules Soury.

Drittes Buch. Das anthropologische Problem.

I. Kap.

Der Mensch in seiner doppelten Natur. 1. Der Mensch vom physiologischen Gesichtspunkte. 2. Der Mensch vom intellectuellen und moralischen Gesichtspunkte.

II. Kap.

Die Beziehungen des Physischen zum Moralischen. 1. Das Gehirn und der Gedanke. 2. Auf den Begriff der Bewegung gegründete Einwände.

III. Kap.

Der Mensch und das Tier. 1. Fragestellung. 2. Der Instinkt und der Geist.

IV. Kap.

Die Sprache, ihr Ursprung, ihre Bedeutung für die Erkenntnis.

V. Kap.

Die menschliche Gesellschaft und die tierischen Gesellschaften. 1. Specifischer Character der menschlichen Gesellschaft. Der Kontrakt. Rousseau. Fouillée. 2. Wiederlegung der Soziologie des Positivismus und der neueren deutschen und englischen Psychologie. Aug. Comte Littré. Buckle. Bagehot. Jäger. Herbert Spencer. 3. Die tierischen Kolonien und Gesellschaften. Perrier und Espinas.

Zu beziehen durch alle Buchhandlungen des In- und Auslandes.

Viertes Buch. Der Ursprung der Moral und der Religion.

Dreher, Eugen. Die Physiologie der Tonkunst. 132 S. ℳ 2,40.

Der Verfasser, welcher bereits durch seine „Beiträge zu einer exakten Psycho-Physiologie" und durch andere Schriften philosophischen Inhalts bekannt ist, unternimmt es, im vorliegenden Werkchen die Psycho-Physiologie der Tonkunst zu untersuchen, die physische Seite der Erscheinungen genauer beschreibend, die psychische Seite derselben mehr andeutend als ausführend. Selbstverständlich sieht Dreher in dem epochemachenden Werke von v. Helmholtz „Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik" die grundlegende Vorarbeit für seine Studie, die aber in erster Linie in großen Zügen die physiologischen Gesetze aufdecken will, durch deren kunstgerechte Benutzung der Tondichter seine beabsichtigten Wirkungen erreicht. Wir empfehlen Drehers Werk dem Interesse der Lesewelt, namentlich als Seitenstück zu Nietsche: „Geburt der Tragödie aus dem Geiste der Musik." (Westermann's Monatshefte.)

Eucken, Rudolf, Die Philosophie des Thomas von Aquino und die Kultur der Neuzeit. (II u. 54 S.) ℳ 1,20.

Der berühmte Verfasser wendet sich gegen die Philosophie des Mittelalters, insofern dieselbe in unsern Tagen im Hinblick auf die Machtstellung Roms plötzlich wieder einmal nicht nur Duldung verlangt, sondern Herrschaft. Dagegen wird Thomas selbst innerhalb seines historischen Rahmens vollauf gewürdigt. Der doctor universalis hat in der That an einem Wendepunkt geschichtlichen Lebens Bedeutendes gewirkt. (Westermann's Monatshefte.)

Lucas, Franz, Die Methode der Eintheilung bei Platon. (XVI u. 308 S.) ℳ 6,80.

Die Methode der Eintheilung bildet ein Hauptheil der platonischen Dialektik. Eine selbstständige Darstellung hat ihr zum ersten Male der Verfasser zutheil werden lassen und er hat sie zu einem gedeihlichen und erschöpfenden Ende geführt. Die Aufgabe war keine leichte. Die Lösung derselben erforderte nicht etwa nur eine Besprechung der Dialoge, in welchen die Methode der Eintheilung besonders häufig angewendet wird, sondern eine Untersuchung aller uns unter dem Namen Platon's überlieferten Schriften. ..... Der Verfasser hat sich allen Anforderungen vollauf gewachsen gezeigt. (Blätter f. liter. Unterhaltung.)

Schmitt, Eugen Heinr., Das Geheimniß der Hegelschen Dialektik, beleuchtet vom concret-sinnlichen Standpunkte. (Philos. Vortr. H. 15/17) (IV u. 144 S.) ℳ 3,60.

Diese Schrift (herausgegeben durch Prof. Lasson im Namen der Philosophischen Gesellschaft) ist das Werk eines Gerichtsschreibers in Ungarn, der ohne philosophische Meister und Schule mit wahrhaft tiefgründigem Verstande an seine Sache herangegangen ist. Die Schrift war zur Preisbewerbung 1884 bei der Philosophischen Gesellschaft in Berlin eingereicht und mit besonderer Auszeichnung genannt worden. Sie ist höchst lesenswerth, höchst ideenreich.

Pressensé, Edm. von, Evangelische Studien. Autorisierte deutsche Ausgabe von Eduard Fabarius. Zweite Auflage. Zwei Bändchen à ℳ 1.

Das erste Bändchen enthält sechs Vorträge über das Problem des Leidens, welche mit einander im engsten Zusammenhange stehen. Der Trost im Leiden suchende Christ findet in diesen Vorträgen wahre Erquickung und Aufmunterung.

Das zweite Bändchen behandelt solche religiöse Fragen, welche unser Zeit vorzugsweise beschäftigen. Verfasser giebt darin einen treuen Ausdruck des Sehnens aller christlichen Herzen nach Wahrheit.

Die evangelischen Studien sind durch Form und Gehalt höcht anziehend, belehrend und erbaulich und haben sich schon einen großen Kreis dankbarer Freunde erworben. Sie eignen sich auch vorzüglich zu Geschenken. (Post.)

Hartsen, Dr. F. A. v., Die Methode der wissenschaftlichen Darstellung. Einfache Regeln, um den schwierigsten Gegenstand klar und erschöpfend zu behandeln. Mit besonderer Rücksicht auf die Interpunktion. 80 S. M. 1,50.

— — Grundlegung von Aesthetik, Moral und Erziehung vom empirischen Standpunkt. Mit Rücksicht auf Herbart, R. Zimmermann, Lotze etc. Mit einem neuen Versuch, Philosophie und Religion zu versöhnen. 116 S. M. 2,40.

— — Grundzüge der Psychologie. 2. gänzl. umgearb. u. beträchtl. verm. Aufl. 210 S. mit 4 Taf. Abbild. M. 4,—

— — Grundzüge der Wissenschaft des Glücks. 40 S. M. 0,80

Horwicz, A., Psychologische Analysen auf psychologischer Grundlage. Ein Versuch zur Neubegründung der Seelenlehre. 1. Th. 376 S M. 7,—

— — 2. Thl. 1. Hälfte. Analyse des Denkens. Grundlinien einer Erkenntnisstheorie. 184 S. M. 4,50.

Jodl, Dr. F., Leben und Philosophie David Hume's. 202 S. M. 4,—.

— Die Culturgeschichtsschreibung, ihre Entwicklung und ihr Problem. 128 S. M. 2,—.

Knauer, G., Conträr und contradictorisch (nebst convergirenden Lehrstücken) festgestellt und Kant's Kategorientafel berichtigt. Eine philosoph. Monographie 158 S. M. 3,—.

Knorr, L., Erörterungen und Abhandlungen auf philosophischem Gebiete, nebst einem Vortrage: Philosophie für Frauen. 52 S. M. 1,—.

Köhler, Dr. R., Ueber die Dionysiaca des Nonnus von Panopolis. 96 S. M. 2,—.

Küssner, G., Kritik des Pessimismus. Versuch einer Theodizee. 54 S. M. 1,20.

Maximi Confessoris, Sancti patris nostri, de variis difficil. locis SS. PP. Dyonisii et Gregorii ad Thomam V. S. librum e cod. ms. Gudiano descrips. et in lat. sermonem interpret est post J. Scoti et Th. Gale tentamina nunc primum integrum ed. Dr. Oehler. 406 S. M. 8,—.

Merx, Dr., Bardesanes von Edessa, nebst einer Untersuchung über das Verhältnis der clementinischen Recognitionen zu dem Buche der Gesetze der Länder. 132 S. M. 2,40.

S. Methodii opera et S. Methodius Platonizans. Ed. Jahnius. Pars I.: S. Methodii opera, recognita et nunc primum plena ac separatim edita. Pars II.: S. Methodius Platonizans, sive Platonismus SS. Patrum Ecclesiae graecae S. Methodii exemplo illustratus 70 S. 58 S. (12 M). M. 4,—.

Müller sen., Mor., Die Fortsetzung unseres Lebens im Jenseits. Verteidigt gegen die rabiate Unsterblichkeitsläugnerei. 96 S. M. 1,80.

Paul, Dr., Kant's Lehre vom radikalen Bösen. Ein Vergleich mit der Lehre der Kirche. 98 S. M. 2,25.

Pfleiderer, Prof. Dr. Edm., Kantischer Kritizismus und englische Philosophie. Eine Beleuchtung des deutsch-englischen Neu-Empirismus der Gegenwart als Beitrag zum Centenarium der Kritik der reinen Vernunft. 148 S. M. 2,50.

Paton's Alcibiades I.; Charmides; Hippias I.; Lysis; Theages; die Nebenbuhler; Hipparchus; Minos; Hippias II.; Alcibiades II. und Parmenides; dem Sinne und Zusammenhange nach entwickelt von August Arnold. 400 S. M. 4,50.

Zu beziehen durch alle Buchhandlungen des In- und Auslandes.

Verlag von C. E. M. Pfeffer (Robert Stricker), Halle-Saale.

Zeitschrift

für

Philosophie und philosophische Kritik.

Im Verein mit mehreren Gelehrten

vormals herausgegeben von

Dr. J. H. Fichte und Dr. H. Ulrici

redigirt von

Professor Dr. Richard Falckenberg.

Erscheint jährlich in 2 Bänden von je 2 Heften. Preis des Bandes 6 Mark.

Erschienen sind 98 Bände.

Seit der Begründung dieser Zeitschrift durch den jüngeren Fichte und den nun ebenfalls verstorbenen H. Ulrici ist nahezu ein halbes Jahrhundert verflossen. In dieser Zeit haben sich auf geistigem Gebiete mancherlei Gährungs- und Klärungsprozesse vollzogen, und so manches litterarische Unternehmen ist nach einem ephemerischen Dasein durch die vorwärts drängende Entwickelung des Geisteslebens verschlungen worden. Für die in Rede stehende Zeitschrift giebt schon die stattliche Reihe von Bänden, zu der sie angewachsen ist, vollgültiges Zeugniß, in wie hohem Grade sie es verstanden hat, bleibend Werthvolles zu bieten, und wie triebkräftig, wie vordem so jetzt noch, die Grundgedanken sind, von denen sie getragen ist und die sie dem Durcheinander der Meinungen gegenüber vertritt. Nichtsdestoweniger muß anerkannt werden, daß unbeschadet ihrer Grundrichtung eine Aenderung in der Art und Weise, wie sie ihre Stellung zu den großen Problemen, die das Geistesleben bewegen, zum Ausdruck bringt, Bedürfniß ist. Vom 87. Bande an ist diese Aenderung in Aussicht gestellt: das Prinzip methodischen Ankämpfens, welches lange Zeit den Charakter der Zeitschrift bestimmt hat, soll, da die von dem Journal vertretene Richtung im Geistesleben der Gegenwart als berechtigter Factor und in manchem Wesentlichen als stimmführend anerkannt ist, weniger in den Vordergrund gestellt, dagegen die Lösung einer durch die unablässig weiterschreitende Entwickelung und kaum noch übersehbare Fülle der in's Detail gehenden Specialforschung nahegelegte Aufgabe angebahnt werden. Es handelt sich um die Inventarisirung des geistigen Besitzes der Wissenschaft in zwiefacher Beziehung: in historischer durch Erörterung des Historischen unter dem den weitetesten Ueberblick ermöglichenden Gesichtspunkte einer Theorie der geschichtlichen Phänomene; sodann aber soll — und das halten wir für ein sehr dankenswerthes Unternehmen — „sei

---

es in fragmentarischen Skizzen, sei es in zusammenfassenden Uebersichten eine Orientirung des Lesers über die gegenwärtigen Gedankenbewegungen sine ira et studio" — verursacht werden, und diese soll nicht allein den Stand der deutschen Wissenschaft, sondern auch die der zeitgenössischen ausländischen Philosophie in regelmäßigen Semestralrevüen charakterisiren. So würde sich die Zeitschrift in dieser Beziehung zu einer philosophischen Weltrevue erweitern.

Daß sie diese große Aufgabe, so weit dies überhaupt möglich ist, lösen oder doch ihrer Lösung nahebringen werde, dafür bürgt der Name der Herausgeber Prof. Krohn in Kiel und Prof. Rich. Falkenberg in Jena.

Wenn wir somit die allbewährte Zeitschrift denjenigen unserer Leser, welche Leben und Entwickelung der geistigen Interessen nach ihrer Wurzel hin unter die Oberfläche des bunten Gewirres der Meinungen und Erscheinungen des Tages zu verfolgen gewöhnt sind, warm an's Herz legen, so glauben wir, wir erfüllen auch ihnen gegenüber nur eine Pflicht.

„Nord und Süd."

Herausgeber und Verleger haben das Bedürfnis empfunden, die Zeitschrift für Philosophie einer Umbildung zu unterziehen. Die Grundrichtung der Zeitschrift wird keine Aenderung erleiden, sie wird auch fernerhin Urkämpferin der idealistischen Weltanschauung sein. Das Programm wird durch die inzwischen erschienenen Hefte auf das Beste verwirklicht. Wer sich mit der philosophischen Bewegung der Gegenwart bekannt machen will, dem wird in der Zeitschrift für Philosophie die beste Gelegenheit geboten.

Allg. Deutsche Universitäts-Zeitung.

Wir haben seinerzeit von der Umgestaltung berichtet, welche diese altbewährte philosophische Zeitschrift im Jahre 1885 erfahren hat. Die dabei ausgesprochenen Erwartungen sind in Erfüllung gegangen. Die seitdem erschienenen Hefte zeigen neues, frisches Leben, und wenn es so scheinen will als ob die ursprüngliche Tendenz, welche im Jahre 1837 eine Reihe von Philosophen und protestantischen Theologen zur Gründung der „Zeitschrift für Philosophie und speculative Theologie" zusammenführte, und die auch bei der Regeneration im Jahre 1847 zu einer „Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik" noch mehr oder weniger im Vordergrunde stand, nun mehr ganz verlassen sei und ganz andere Bahnen eingeschlagen worden seien, so erkennt eine unbefangene Ueberlegung doch sofort, daß das nicht die Folge einer wetterwendischen Anbequemung an den veränderungssüchtigen Zeitgeschmack ist, sondern davon, daß andere Zeiten die Wahrheit in andere Formen fassen und ihr durch andere Methoden gerecht zu werden suchen. — Die letzten Hefte geben ein Bild von der Vielseitigkeit und der durch dieselbe nicht beeinträchtigten Gediegenheit der Zeitschrift, welche, als stimmführend anerkannt, einer Empfehlung nicht weiter bedarf.

„Nord und Süd."

Die „Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik" erweiterte sich, seitdem im Jahre 1885 August Krohn und Richard Falckenberg an ihre Spitze traten, zu einer philosophischen Weltrevue, sofern sie das Historische unter dem den weitesten Ueberblick ermöglichenden Gesichtspunkte einer Theorie der geschichtlichen Erscheinungen erörterte und, sei es in fragmentarischen Skizzen, sei es in zusammenfassenden Uebersichten, ohne Voreingenommenheit noch Uebereifer, den Leser über die gegenwärtigen Strömungen des deutschen, wie minder des ausländischen Geisteslebens unterrichtete. Dem vorliegenden Bande kann kein besseres Zeugnis ausgestellt werden, als indem wir ihm nachsagen, daß er sich in dem erwähnten Rahmen gleich seinen Vorläufern bewegt.

Blätter für liter. Unterhaltung.

Die Zeitschrift für Philosophie erscheint jährlich in 2 Bänden von je 2 Heften. Preis des Bandes 6 Mark.

Zu beziehen durch alle Buchhandlungen des In- und Auslandes.

Witte, J. H., Sinnen und Denken. Gesammelte Abhandlungen und Vorträge aus den Gebieten der Litteratur, Philosophie und Pädagogik, sowie ihrer Geschichte. 258 S. ℳ 5.—

Inhalt: I. Der Weltschmerz in der Dichtung und die Weltschmerzdichtung. II. Über Patriotismus und die sittliche Bedeutung des Staates. III. Über Fichte als Politiker und Patriot. IV. Die soziale Krisis in den höheren Ständen, die Organisation unseres Bildungswesens und die Idee eines Reichsbildungsamts. V. Über Friedrichs des Großen Verdienste um Erziehung und Unterricht. VI. Drei Kaufleute als hervorragende Männer der Literatur und Wissenschaft. (David Defoë, Benjamin Franklin und Moses Mendelssohn.) VII. Über Berufsbildung des Kaufmanns.

Diese Abhandlungen hat Verf. in der Hoffnung gesammelt, daß sie für weitere Kreise der Gebildeten von Interesse sein werden. Und dies verdienen sie in jeder That: Sind sie auch streng wissenschaftlich gehalten, so ist ihre Sprache doch nicht schwer verständlich, und da sie zudem allgemein interessierend, zeitgemäße Themata und Fragen in höchst geistvoller Weise behandeln, verdienen sie die größte Verbreitung und Berücksichtigung. Die Anmerkungen mit teils sachlichem, teils litterarischem Inhalt sind wertvoll.

Litteraturbericht für Theologie.

Die mannigfachen Themata, welche nicht nur oberflächlich den Gegenstand streifen, sondern mit großer Sachkenntnis und in klarer, anziehender Sprache auf ihn eingehen, verdienen mehrmals gelesen zu werden, sie werden reichlichen Stoff zu prüfendem Nachdenken geben. Das Buch sei bestens empfohlen.

Neue pädagogische Zeitung.

„Das Buch bringt wegen des reichhaltigen Inhalts Vielen etwas und wird anregend und belehrend zugleich — dem ernsten Leser nur förderlich sein."

Nord und Süd.

Müller, Moritz, sen. **Die Fortsetzung unseres Lebens im Jenseits.** Vertheidigt gegen die rabiate Unsterblichkeitsläugnerei. gr. 8°. 109 S. ℳ 1,80.

Die Fragen, welche den bekannten Verfasser in dieser Schrift beschäftigen, sind vor allen die beiden folgenden, ob im Glauben an ein Fortleben nach unserm irdischen Tode mehr Sinn und Verstand liege, als im Glauben des Gegentheils; ferner, wie ein solches Fortleben auch als möglich gedacht werden könne, ohne daß man mit Vernunft und Wissenschaft in Widerspruch gerathe. Der Verfasser behandelt diese und die damit verbundenen Fragen so, daß er niemals behauptet, einen theoretischen Beweis für die Unsterblichkeit erbringen zu können, sondern beim Glauben daran stehen zu bleiben erklärt, aber diesen als einen vernünftigen, mit den Thatsachen des natürlichen wie des sittlichen Lebens in Uebereinstimmung stehenden darlegt. Er beruft sich dabei auf gewichtige Autoritäten, deren Ausführungen oder Sentenzen er beibringt, wie namentlich die von Göthe, Gauß, Ulrici, Lotze, Perty, Heinr. Heine; das Interessanteste des populär gehaltenen Buches möchte aber die Polemik sein, mit welcher er die „rabiaten" Unsterblichkeitsläugner trifft. Nun ist allerdings im Allgemeinen nicht schwer, diesen Herren nachzuweisen, wie unbegründet ihre „wissenschaftlichen" Voraussetzungen und wie unmethodisch ihr Verfahren sei, aber unser Verfasser thut es mit so viel Scharfsinn und Humor, daß man seine kurzen kräftigen Entgegnungen mit Vergnügen liest. Ueberall macht sich bei ihm eine edle und gesunde, dabei vorurtheilsfreie Gesinnung geltend, von der man nur wünschen möchte, daß sie zahlreiche Nachfolger und weite Verbreitung fände.

Philosoph. Monatshefte.

Cantor, Georg, Lehre vom Transfiniten. Gesammelte Abhandlungen aus der Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik. Erste Abtheilung. ℳ 2,50.

Platon's Phädrus; das Gastmahl; Theätet; der Sophist; der Staatsmann: der Staat; Philebus; Protagoras; Gorgias; Kratylus; Euthydemus; Timäus und Kritîas; dem Sinne und Zusammenhange nach entwickelt von August Arnold. 296 S. M. 3,50.

Plato's Charmides. Inhaltlich erläutert von Dr. Th. Becker. 106 S. M. 2,40.

Runze, Dr. G., Der ontologische Gottesbeweis. Kritische Darstellung seiner Geschichte seit Anselm bis auf die Gegenwart. 184 S. M. 3,60.

Ulrici, Prof. Dr. H., Der Philosoph Strauss. Kritik seiner Schrift: „Der alte und der neue Glaube" und Widerlegung seiner material. Weltanschauung. M. 0,80.

— — Zur logischen Frage. M. 2,—.

— — Der sogenannte Spiritismus eine wissenschaftliche Frage. 2. Aufl. M. 0,80.

— — Ueber den Spiritismus als wissenschaftliche Frage Antwortschreiben auf den offenen Brief des Herrn Prof. Dr. Wundt M. 0,60.

Andere werthvolle Werke.

Arnold, Prof. Dr., Chrestomathia arabica quam e libris mss. vel impressis rarioribus collectam edidit II. Partes. Pars I. Textum continens. 232 S. Pas II. Glossarium continens. 206 S. M. 15,—

Arnold, Gymn.-Dir., Die Unterscheidungslehren der christlichen Kirchen in reinhistoricher Zusammenstellung. 70 S. M. 1,—

Aeschylus, Der gefesselte Prometheus. Uebersetzt und erklärt von A. Arnold. 76 S. M. —,80.

Bechstein, Prof. Dr. R., Die Aussprache des Mittelhochdeutschen. 96 S. M. 1,60.

Bormann, Dr. A., Altlatinische Chorographie und Städtegeschichte. Mit einer Karte und 3 Plänen. 264 S. M. 6,—.

Comenius, Joh. Amos, Die Mutterschule. Aufs Neue herausgegeben von Herm. Schröter, 2. vermehrte und verb. Aufl. 104 S. M. 1,50.

Dante Alighieri, Das neue Leben. Uebersetzt von B. Jacobson. Mit Dante's Portrait nach Giotto. 96 S. M. 2,40

Frank, G., Johann Major, der Wittenberger Poet. Ein Beitrag zur Geschichte der protestant. Theologie und des Humanismus im 16. Jahrhundert. 48 S. M. 1,—

Freytag, Dr. G. A., Die heiligen Schriften des alten Testaments, kritisch beleuchtet für gebildete Protestanten. 80 S. M.- ,75.

— — Die heiligen Schriften des neuen Testaments, mit Bezugnahme auf Lehre und Cultus kritisch beleuchtet für gebildete Protestanten, insonderheit für die kirchlichen Vertreter der Gemeinden. 336 S. M. 3,—.

Furrer, Rudolf Collin. Ein Characterbild aus der schweizerischen Reformations-Geschichte. 64 S. M. 1,—

Genthe, Prof. Dr., Die Jungfrau Maria, ihre Evangelien und ihre Wunder. Ein Beitrag zur Geschichte des Marien-Cultus. 108 S. M. 2,—

Günther, Dr. F. J., Christliche Andachten über die Psalmen zum Vortrage, sowie zur häuslichen Erbauung. 532 S. M. 5,40.

Verlag von C. E. M. Pfeffer (Robert Stricker), Halle-Saale.

Philosophische Vorträge.

Prospectus.

Die Philosophische Gesellschaft zu Berlin wählt vorzugsweise solche der in ihrer Mitte gehaltenen Vorträge aus, welche Fragen von allgemeinem Interesse behandeln und die Darstellung wird sich so halten, dass sie auch für das grössere gebildete Publicum verständlich sein wird.

Der wesentliche Unterschied dieser philosophischen Publicationen vor allen sonst erscheinenden liegt darin, dass sie nicht, wie letztere ohne Ausnahme, blos die Darstellung eines einzelnen Mannes über eine philosophische Frage bieten, sondern zugleich eine daran sich schliessende Diskussion einer erheblichen Anzahl anderer Mitglieder.

Es ist unzweifelhaft, dass durch diese mündlichen Vorträge und Entgegnungen die Betreffenden genöthigt werden, ihre Ansichten in deutlicherer und bestimmterer Weise vorzutragen und dass die Kernpunkte der Differenzen hier viel schärfer und klarer zum Vorschein kommen, als in einseitigen in der Studirstube ausgearbeiteten Schriften und Gegenschriften. Kein Redner vermag sich hinter dem Nebel seines Systems zurückzuziehen; er muss dem Gegner in kurzen Worten Rede stehen und der unbefangene Zuhörer und spätere Leser wird damit viel leichter in den Stand gesetzt, die Stärke und die Schwächen der einzelnen Richtungen der Philosophie zu erkennen, und sich selbst ein klares Urtheil zu bilden.

Die Philosophischen Vorträge erscheinen in Serien zu je 6 Heften, jedes Heft umfasst 3—4 Druckbogen.

Der Subscriptions-Preis einer Serie von 6 Heften beträgt M. 5,40. Einzelne Hefte kosten je M. 1,20.

„Auf die verdienstliche Sammlung der Vorträge und Discussionen der Philosophischen Gesellschaft zu Berlin glaubt die Redaktion dieser Zeitung nur hindeuten zu dürfen.“ (Prof. Glogau i. d. Deutsch. Litteraturztg.)

— Inhaltsübersicht umstehend. —

Zu beziehen durch alle Buchhandlungen des In- und Auslandes.

Schmidkunz, Hans, Dr. **Ueber die Abstraktion.** VIII und 43 S. ℳ 0,90.

Die schwankenden Auslegungen, welche bisher einem wichtigen Gegenstand der Psychologie und Logik zu Theil wurden, machten es nöthig, dem Phänomen der Abstraktionsthätigkeit eine Beschreibung zu geben, welche sie in ihren verschiedenen Arten als einen gleichmäßigen Vorgang möglichst eindeutig bestimmt, soweit dies bei einer nur an sich selbst zu messenden Erscheinung möglich war.

Der Verfasser legte Werth darauf, den Umfang seiner Abhandlung nicht, wie häufig üblich, durch eine Wiedergabe des geschichtlichen Stoffes auszudehnen, sondern auf Grund desselben seine Aufgabe in möglichst enger Umgrenzung für sich selbst zu erledigen.

Schmidkunz, Hans, Dr. **Analytische und synthetische Phantasie.** VI und 104 S. ℳ 1,90.

Die Literatur der Aesthetik wie der Philosophie überhaupt wird seit Längerem vorwiegend mit Werken bereichert, die einerseits an Stelle der wissenschaftlichen Fragen selbst die Geschichte ihrer Behandlung setzen, andrerseits jene Rätsel in ihrer Gesammtheit von irgend einem privaten Aussichtspunkte aus wiedergeben.

Demgegenüber wird es immer mehr nöthig, die verschiedenen Probleme ebenso selbständig wie in den übrigen Disciplinen zu erforschen und zu bereichern. Ein solcher, wenn auch kleiner, Beitrag war die Absicht des Verfassers.

Durch einige Aeußerungen in Schriften von Künstlern war der Versuch nahegelegt, den Gegensatz zwischen Analyse und Synthese, welcher im Reich der Erkenntnis altbekannt ist, auch in das der Phantasie zu übertragen. Obwohl nun diese Unterscheidung der Phantasiethätigkeit von der bisherigen Aesthetik noch nicht gemacht worden war, so fand sich doch reichliche Gelegenheit, zur Bekräftigung des Neuen an Früheres anzuknüpfen und das so wertvolle wissenschaftliche, zumal philosophische Gut: den Zusammenhang mit der Ueberlieferung und hauptsächlich mit dem mühsam errungenen festen Bestand der Wissenschaft, nachdrücklich zu wahren.

Marbach, F., Die Psychologie des Firmianus Lactantius. Mk. 1,50.

Die interessante und lehrreiche Schrift hat d. Zweck, an d. Psychol. d. Lactantius nachzuweisen, wie sich das Christentum mit den damaligen philos. Systemen in der Weise auseinandersetzte, daß man alle die christlichen Grundanschauungen nicht entgegenstehenden Resultate anerkannte, oder wenigstens nicht verwarf, und nur das bekämpfte, was mit den christlichen Ideen nicht zu vereinigen war, so daß später die alte Philosophie im christlichen Gewande wieder auflebte.
Theologischer Literaturbericht.

Schellwien, Robert, Optische Häresien, erste Folge und das Gesetz der Polarität. VII. 108 S. ℳ 2,60.

Der Verfasser hält in diesem, wie in seinen früheren Werken, an dem Grundsatze fest, daß wir eine Natur ohne Geist nicht kennen, und Natur und Geist nur verschiedene Funktionen von E i n e m sind. Sein philosophischer Standpunkt läßt sich bezeichnen als: empirische Identitätsphilosophie im Gegensatz sowohl zum Dualismus von Geist und Natur, als zur mechanischen Atomistik.
Gaea.

Küßner, Gustav, Kritik des Pessimismus. Versuch einer Theodizee. Gr. 8°. 54 S. Preis ℳ 1,20.

Im Gegensatz gegen jede metaphysische oder theozentrische, die Realität und Unmittelbarkeit des Empfindens stets mehr oder weniger verflachende Behandlungsart dieser Frage, will vorliegendes Werkchen das Problem auf Grund der Gesetze des Werturteiles vom anthropozentrischen Standpunkte aus untersuchen. Der erste Teil enthält eine Kritik des Pessimismus im engeren Sinn; der zweite einen Beweis des Optimismus; in beiden hat sich der Verfasser bemüht alle Uebel unverkümmert und ungemildert zur Sprache kommen zu lassen und indirekt und direkt ihre Notwendigkeit für den Menschen selbst nachzuweisen.

von Wichert, Rudolf, Die ewigen Räthsel. Populär=philosophische Vorträge, gehalten im Literarischen Verein zu Baden=Baden. Serie I u. II à ℳ 1,50.

Serie I. Der Instinct. — Das Gesetz der Erhaltung der Kraft. — Das Atom. — Problem der Sprache. — Der Kampf um die Seele. — Nothwendigkeit und Freiheit.

Serie II. Raum und Zeit. — Das Schöne. — Sinn und Verstand. — Der Zweck im Weltall. — Wissen und Glaube — Der Utilitarismus.

In anregender, lichtvoller und auch dem nicht philosophisch geschulten Leser leicht verständlicher Sprache behandelt der Verfasser wichtige philosophische und zwar vor allem naturphilosophische Probleme und vertheidigt — vom Standpunkte der Lotze'schen Philosophie aus — die Berechtigung einer idealistischen Weltauffassung.

Die Vorträge behandeln lauter Fragen, welche für jeden nachdenkenden Gebildeten unserer Tage von hohem Interesse und tiefer Bedeutung sind. Und er findet sie hier nicht in der schweren Sprache des Gelehrten, nicht in der leichten Rede des Phantasten, sondern in dem ernsten Ton einer mit Erfolg nach innerer Klarheit ringenden Persönlichkeit dargestellt. Ich empfehle die Lektüre oder noch lieber das Studium der Wichert'schen Vorträge insonderheit den Standesgenossen des Verfassers; es wird ihnen sympathisch sein, aus ihrer eigenen Mitte eine Stimme über jene Frage zu vernehmen und sie werden es nicht bereuen, in Mußestunden ihr gelauscht zu haben.

Kreuzzeitung.

Die Vorträge sind ein beredtes Zeugniß nicht nur für die Wissenschaftlichkeit dessen der sie gehalten hat, sondern auch für die Bildung des Publikums, dem sie gehalten wurden. Auf dem Boden der naturwissenschaftlichen Forschung stehend, hält gleichwol der Autor den Banner des Geistes über alles hoch; ein Reich der Freiheit vertritt er, das über dem Naturmechanismus waltet. Solcher Art ist sein Standpunkt; seine Methode aber ist, dem Hörer und Leser den Sinn der Probleme auseinanderzusetzen, neuere Lösungsversuche in Betracht zu ziehen und die Schwächen der einen idealen Auffassung entgegenstehenden Lehren zu zeigen; hierdurch entlastet er das Gemüth und klärt die Einsicht derer, welche von naturalistischen Demonstrationen und Argumentationen beengt sind.

Theologisches Literaturblatt.

Die Selbstkritik der Naturwissenschaft, welcher Langes Geschichte des Naturalismus zum ersten Male einen glücklichen Ausdruck verlieh, hat auch auf die einschlägige Litteratur der populär=wissenschaftlichen Vorträge und Aufsätze einen unverkennbaren, sich mehr und mehr geltend machenden äußerst günstigen Einfluß geübt. Diesem kritischen Einfluß verdanken auch die vorliegenden Abhandlungen ihre besondere Färbung, zumal ihnen Lotzes Philosophie, welche ja mit Langes Bestrebungen in vielen Hauptpunkten im Einklange steht, als vereinigender Hintergrund dient.

Deutsche Litteraturzeitung.

Heynemann'sche Buchdruckerei, F. Beyer, in Halle a. S.

Aus dem

Philosophischen Verlag

von

C. E. M. Pfeffer (R. Stricker)

in **Halle-Saale,**

Neunhäuser 3/4.

1889.

Eucken, Rudolf, **Die Philosophie des Thomas von Aquino und die Kultur der Neuzeit.** Gr. 8°. (II u. 54 S.) ℳ 1,20.

Der berühmte Verfasser wendet sich gegen die Philosophie des Mittelalters, insofern dieselbe in unsern Tagen im Hinblick auf die Machtstellung Roms plötzlich wieder einmal nicht nur Duldung verlangt, sondern Herrschaft. Dagegen wird Thomas selbst innerhalb seines historischen Rahmens vollauf gewürdigt. Der doctor universalis hat in der That an einem Wendepunkt geschichtlichen Lebens Bedeutendes gewirkt. (Westermann's Monatshefte.)

Lucas, Franz, **Die Methode der Eintheilung bei Platon.** Gr. 8°. (XVI u. 308 S.) ℳ 6,80.

Die Methode der Eintheilung bildet ein Haupttheil der platonischen Dialektik. Eine selbstständige Darstellung hat ihr zum ersten Male der Verfasser zutheil werden lassen und er hat sie zu einem gedeihlichen und erschöpfenden Ende geführt. Die Aufgabe war keine leichte. Die Lösung derselben erforderte nicht etwa nur eine Besprechung der Dialoge, in welchen die Methode der Eintheilung besonders häufig angewendet wird, sondern eine Untersuchung aller uns unter dem Namen Platon's überlieferten Schriften. ..... Der Verfasser hat sich allen Anforderungen vollauf gewachsen gezeigt. (Blätter f. liter. Unterhaltung.)

Pressensé, Edm., **Die Ursprünge. Zur Geschichte und Lösung des Problems der Erkenntnis, der Kosmologie, der Anthropologie und des Ursprungs der Moral und der Religion.** Deutsch von E. Fabarius. 2. Auflage. Gr. 8°. (XX u. 446 S.) ℳ 4,50.

Dieses Werk des ausgezeichneten Pariser Theologen gehört zu den hervorragendsten apologetischen Leistungen der Gegenwart. („Beweis des Glaubens“ und „Theolog. Litteraturbericht“.)

Die sehr lehrreiche und belehrende Schrift bietet dem Leser eine solche Fülle gediegenen Inhaltes in einer geistreichen Behandlung, daß keiner sie ohne Gewinn wieder aus der Hand legen wird. (Deutsche Litteraturzeitung.)

Verfasser hat den Weg gezeigt, wie das freikritische Denken mit den Fundamenten des sittlich religiösen Glaubens, an welche sich jedwede wahrhaft menschliche Cultur anknüpft, in Einklang steht. (Philosophische Monatshefte.)

Wir wünschen dem Werke eine weite Verbreitung und knüpfen die Hoffnung, daß es geschieht, an die in der That ungewöhnliche Sicherheit, mit welcher der Verfasser seiner Aufgabe Meister geworden ist. (Zeitschrift für Philosophie und philos. Kritik.)

Wir raten unsern Amtsbrüdern, namentlich in den Städten, sonderlich diejenigen auf dieses gediegene Werk aufmerksam zu machen, welchen die Zeit zu eingehenden philosophischen Studien fehlt, welche aber nach einer guten Waffe zur Widerlegung materialistischer Weltanschauung sich umsehen. In jedem Lesezimmer sollte es sich vorfinden. (Litterarischer Wegweiser für das evang. Pfarrhaus.)

Schmitt, Eugen Heinr., **Das Geheimniß der Hegelschen Dialektik,** beleuchtet vom concret-sinnlichen Standpunkte. (Philos. Vortr. H. 15/17) (IV u. 144 S.) ℳ 3,60.

Diese Schrift (herausgegeben durch Prof. Lasson im Namen der Philosophischen Gesellschaft) ist das Werk eines Gerichtsschreibers in Ungarn, der ohne philosophische Meister und Schule mit wahrhaft tiefgründigem Verstande an seine Sache herangegangen ist. Die Schrift war zur Preisbewerbung 1884 bei der Philosophischen Gesellschaft in Berlin eingereicht und mit besonderer Auszeichnung genannt worden. Sie ist höchst lesenswerth, höchst ideenreich. (Magazin f. d. Lit.)

Zu beziehen durch alle Buchhandlungen des In- und Auslandes.

Seydel, Rudolf, Der Schlüssel zum objektiven Erkennen. Gegen Kant und F. A. Lange. gr. 8⁰. VIII u. 112 S. ℳ 2,25.

Die Schrift wendet sich zunächst gegen ein Hauptstück der Lehre Kants, welches besonders dazu gedient hat, die kritische Erkenntnislehre Kants zu begründen, und sodann gegen die Erweiterung, welche eben dasselbe Kantische Dogma durch den hauptsächlichsten Führer des modernen Neukantianismus, F. A. Lange, den berühmten Verfasser der „Geschichte des Materialismus“, gefunden hat. Das positive Ergebniß ist der in der logischen Benutzung des Denkinhalts liegende Schlüssel zu einem wahrhaft objektiven, wenn auch nicht unbeschränkten Erkennen.

Der kritische Theil der Schrift trifft außer dem philosophischen auch das Interesse des Mathematikers, da er sich wesentlich auf das Verhältniß zwischen Logik und Mathematik bezieht.

von Wichert, Rudolf, Die ewigen Räthsel Populär-philosophische Vorträge, gehalten im Literarischen Verein zu Baden-Baden. Gr. 8⁰. 112 S. ℳ 1,50.

Inhalt: I. Der Instinct (contra Darwin). II. Die Bedeutung des von R. Mayer entdeckten Gesetzes der Erhaltung der Kraft. III. Das Atom. VI. Das Problem der Sprache. V. Der Kampf um die Seele. VI Nothwendigkeit und Freiheit.

In anregender, lichtvoller und auch dem nicht philosophisch geschulten Leser leicht verständlicher Sprache behandelt der Verfasser wichtige philosophische und zwar vor allem naturphilosophische Probleme und vertheidigt — vom Standpunkte der Lotze'schen Philosophie aus — die Berechtigung einer idealistischen Weltauffassung.

Witte, J. H., Das Wesen der Seele und die Natur der geistigen Vorgänge im Lichte der Philosophie seit Kant und ihrer grundlegenden Theorien. Historisch-kritisch dargestellt. Gr. 8⁰ (XVI u. 336 S.) ℳ 7.—

Dieses Werk ist eine historisch-kritische Verständigung über die wichtigsten Grundprobleme der Psychologie und über deren Behandlung bei den seit Kant hervorgetretenen bedeutendsten Philosophen in Deutschland, England und Frankreich. Das Buch, dessen Hauptgegenstand der Kampf um das Wesen der Seele in der modernen Philosophie ist, enthält zugleich einen Überblick über die Systeme der bedeutendsten Vertreter aller seit Kant sich geltend machenden Hauptrichtungen philosophischen Denkens; ja, es werden gelegentlich die Theorien den hervorragendsten Denker der gesamten abendländischen Philosophie gestreift.

Ein durch seinen Gegenstand, wie durch die Behandlungsweise desselben gleich sehr anziehendes Buch; es verdient jede Empfehlung.

(Deutsches Wochenblatt.)

Witte, J. H., Sinnen und Denken. Gesammelte Abhandlungen und Vorträge aus den Gebieten der Litteratur, Philosophie und Pädagogik, sowie ihre Geschichte VIII. u. 220 S. ℳ 5.—

Inhalt: I. Der Weltschmerz in der Dichtung und die Weltschmerzdichtung. II. Über Patriotismus und die sittliche Bedeutung des Staates. III. Über Fichte als Politiker und Patriot. IV. Die soziale Krisis in den höheren Ständen, die Organisation unseres Bildungswesens und die Idee eines Reichsbildungsamts. V. Über Friedrichs des Großen Verdienste um Erziehung und Unterricht. VI. Drei Kaufleute als hervorragende Männer der Literatur und Wissenschaft. (David Defoë, Benjamin Franklin und Moses Mendelssohn.) VII. Über Berufsbildung des Kaufmanns.

— und das halten wir für ein sehr dankenswerthes Unternehmen — „sei es in fragmentarischen Skizzen, sei es in zusammenfassenden Uebersichten eine Orientirung des Lesers über die gegenwärtigen Gedankenbewegungen sine ira et studio" — verursacht werden, und diese soll nicht allein den Stand der deutschen Wissenschaft, sondern auch die der zeitgenössischen ausländischen Philosophie in regelmäßigen Semestralrevüen charakterisiren. So würde sich die Zeitschrift in dieser Beziehung zu einer philosophischen Weltrevue erweitern.

Daß sie diese große Aufgabe, so weit dies überhaupt möglich ist, lösen oder doch ihrer Lösung nahebringen werde, dafür bürgt der Name der Herausgeber Prof. Krohn in Kiel und Prof. Rich. Falkenberg in Jena.

Wenn wir somit die allbewährte Zeitschrift denjenigen unserer Leser, welche Leben und Entwickelung der geistigen Interessen nach ihrer Wurzel hin unter die Oberfläche des bunten Gewirres der Meinungen und Erscheinungen des Tages zu verfolgen gewöhnt sind, warm an's Herz legen, so glauben wir, wir erfüllen auch ihnen gegenüber nur eine Pflicht.

„Nord und Süd."

Herausgeber und Verleger haben das Bedürfnis empfunden, die Zeitschrift für Philosophie einer Umbildung zu unterziehen. Die Grundrichtung der Zeitschrift wird keine Aenderung erleiden, sie wird auch fernerhin Urkämpferin der idealistischen Weltanschauung sein. Das Programm wird durch die inzwischen erschienenen Hefte auf das Beste verwirklicht. Wer sich mit der philosophischen Bewegung der Gegenwart bekannt machen will, dem wird in der Zeitschrift für Philosophie die beste Gelegenheit geboten.

Allg. Deutsche Universitäts-Zeitung.

Wir haben seinerzeit von der Umgestaltung berichtet, welche diese altbewährte philosophische Zeitschrift im Jahre 1885 erfahren hat. Die dabei ausgesprochenen Erwartungen sind in Erfüllung gegangen. Die seitdem erschienenen Hefte zeigen neues, frisches Leben, und wenn es so scheinen will als ob die ursprüngliche Tendenz, welche im Jahre 1837 eine Reihe von Philosophen und protestantischen Theologen zur Gründung der „Zeitschrift für Philosophie und speculative Theologie" zusammenführte, und die auch bei der Regeneration im Jahre 1847 zu einer „Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik" noch mehr oder weniger im Vordergrunde stand, nun mehr ganz verlassen sei und ganz andere Bahnen eingeschlagen worden seien, so erkennt eine unbefangene Ueberlegung doch sofort, daß das nicht die Folge einer wetterwendischen Anbequemung an den veränderungssüchtigen Zeitgeschmack ist, sondern davon, daß andere Zeiten die Wahrheit in andere Formen fassen und ihr durch andere Methoden gerecht zu werden suchen. — Die letzten Hefte geben ein Bild von der Vielseitigkeit und der durch dieselbe nicht beeinträchtigten Gediegenheit der Zeitschrift, welche, als stimmführend anerkannt, einer Empfehlung nicht weiter bedarf.

„Nord und Süd."

Die Zeitschrift für Philosophie erscheint jährlich in 2 Bänden von je 2 Heften. Preis des Bandes 6 Mark.

Zu beziehen durch alle Buchhandlungen des In- und Auslandes.

Dreher, Eugen, Der Darwinismus und seine Consequenzen in wissenschaftlicher und socialer Beziehung. 117 S. ℳ 2,25.

Das Werkchen empfiehlt sich durch klare und leicht faßliche Darstellung aller derjenigen Fragen, die sich an die Abstammungslehre knüpfen und wird so schon — ganz abgesehen von den neuen Gesichtspunkten, die es dem Denker erschließt — ein werthvoller Schatz für alle Diejenigen, die mit den wichtigsten wissenschaftlichen Problemen der Gegenwart vertraut bleiben wollen.

Küßner, Gustav, Kritik des Pessimismus. Versuch einer Theodizee. Gr. 8°. 54 S. Preis ℳ 1,20.

Im Gegensatz gegen jede metaphysische oder theozentrische, die Realität und Unmittelbarkeit des Empfindens stets mehr oder weniger verflachende Behandlungsart dieser Frage, will vorliegendes Werkchen das Problem auf Grund der Gesetze des Werturteiles vom anthropozentrischen Standpunkte aus untersuchen. Der erste Teil enthält eine Kritik des Pessimismus im engeren Sinn; der zweite einen Beweis des Optimismus; in beiden hat sich der Verfasser bemüht alle Uebel unverkümmert und ungemildert zur Sprache kommen zu lassen und indirekt und direkt ihre Notwendigkeit für den Menschen selbst nachzuweisen.

Müller, Moritz, sen. in Pforzheim. **Die Fortsetzung unseres Lebens im Jenseits.** Vertheidigt gegen die rabiate Unsterblichkeitsläugnerei. gr. 8°. 109 S. ℳ 1,80.

Die Fragen, welche den bekannten Verfasser in dieser Schrift beschäftigen, sind vor allen die beiden folgenden, ob im Glauben an ein Fortleben nach unserm irdischen Tode mehr Sinn und Verstand liege, als im Glauben des Gegentheils; ferner, wie ein solches Fortleben auch als möglich gedacht werden könne, ohne daß man mit Vernunft und Wissenschaft in Widerspruch gerathe. Der Verfasser behandelt diese und die damit verbundenen Fragen so, daß er niemals behauptet, einen theoretischen Beweis für die Unsterblichkeit erbringen zu können, sondern beim Glauben daran stehen zu bleiben erklärt, aber diesen als einen vernünftigen, mit den Thatsachen des natürlichen wie des sittlichen Lebens in Uebereinstimmung stehenden darlegt. Er beruft sich dabei auf gewichtige Autoritäten, deren Ausführungen oder Sentenzen er beibringt, wie namentlich die von Göthe, Gauß, Ulrici, Lotze, Perty, Heinr. Heine; das Interessanteste des populär gehaltenen Buches möchte aber die Polemik sein, mit welcher er die „rabiaten" Unsterblichkeitsläugner trifft. Nun ist allerdings im Allgemeinen nicht schwer, diesen Herren nachzuweisen, wie unbegründet ihre „wissenschaftlichen" Voraussetzungen und wie unmethodisch ihr Verfahren sei, aber unser Verfasser thut es mit so viel Scharfsinn und Humor, daß man seine kurzen kräftigen Entgegnungen mit Vergnügen liest. Ueberall macht sich bei ihm eine edle und gesunde, dabei vorurtheilsfreie Gesinnung geltend, von der man nur wünschen möchte, daß sie zahlreiche Nachfolger und weite Verbreitung fände. (Philosoph. Monatshefte.)

Schellwien, Robert, Optische Häresien, erste Folge und das Gesetz der Polarität. Gr. 8°. VII. 108 S. 2,60 ℳ

Im Anschluß an seine „Optische Häresien" (1886 im gleichen Verlage erschienen. Preis 2,60) und frühern Werke entwickelt der Verfasser ein inductives Causalitäts- und Polaritätsgesetz und liefert an der Hand dieses Gesetzes eine eingehende Interpretation der elektrischen und der optischen Erscheinungen, der letzteren großentheils auf Grund eigener Beobachtungen und Versuche. Den Schluß bildet eine auf innere Erfahrung gestützte Abhandlung über die That des Sehens. Der Verfasser hält in diesem, wie in seinen frühern Werken, an dem Grundsatze fest, daß wir eine Natur ohne Geist nicht kennen, und Natur und Geist nur verschiedene Functionen von Einem sind. Sein philosophischer Standpunkt läßt sich bezeichnen als: empirische Identitätsphilosophie im Gegensatz sowohl zum Dualismus von Geist und Natur, als zur mechanischen Atomistik.

Zu beziehen durch alle Buchhandlungen des In- und Auslandes.

Philosophische Vorträge.

Prospectus.

Die Philosophische Gesellschaft zu Berlin wählt vorzugsweise solche der in ihrer Mitte gehaltenen Vorträge aus, welche Fragen von allgemeinem Interesse behandeln und die Darstellung wird sich so halten, dass sie auch für das grössere gebildete Publicum verständlich sein wird.

Der wesentliche Unterschied dieser philosophischen Publicationen vor allen sonst erscheinenden liegt darin, dass sie nicht wie letztere ohne Ausnahme, blos die Darstellung eines einzelnen Mannes über eine philosophische Frage bieten, sondern zugleich eine daran sich schliessende Diskussion einer erheblichen Anzahl anderer Mitglieder.

Es ist unzweifelhaft, dass durch diese mündlichen Vorträge und Entgegnungen die Betreffenden genöthigt werden, ihre Ansichten in deutlicherer und bestimmterer Weise vorzutragen und dass die Kernpunkte der Differenzen hier viel schärfer und klarer zum Vorschein kommen, als in einseitigen in der Studirstube ausgearbeiteten Schriften und Gegenschriften. Kein Redner vermag sich hinter dem Nebel seines Systems zurückzuziehen; er muss dem Gegner in kurzen Worten Rede stehen und der unbefangene Zuhörer und spätere Leser wird damit viel leichter in den Stand gesetzt, die Stärke und die Schwächen der einzelnen Richtungen der Philosophie zu erkennen, und sich selbst ein klares Urtheil zu bilden.

Die Philosophischen Vorträge erscheinen in Serien zu je 6 Heften, jedes Heft umfasst 3—4 Druckbogen.

Der Subscriptions-Preis einer Serie von 6 Heften beträgt M. 5,40. Einzelne Hefte kosten je M. 1,20.

— Inhaltsübersicht umstehend. —

Heynemann'sche Buchdruckerei (F. Beyer) Halle