Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien.

Par

M. Janet, (Prof. à l'Univ. de Caen).

1. —. Etant donné une forme quadratique de différentielles

$$\Sigma\, a_{ik}\, du_i\, du_k$$

(où les a sont des fonctions données quelconques des n variables indépendantes $u_1, u_2, \dots u_n$) peut-on trouver des fonctions $x, y, \dots z$ de ces n variables telles que l'on ait identiquement

$$\Sigma\, a_{ik}\, du_i\, du_k = dx^2 + dy^2 + \dots + dz^2;$$

autrement dit le système d'équations aux dérivées partielles

$$\text{(A)} \qquad S \frac{\partial x}{\partial u_i} \frac{\partial x}{\partial u_k} = a_{ik} \qquad (i, k = 1, 2 \dots n)$$

(où le signe S signifie comme d'habitude que l'on remplace successivement x par $y, \dots$ ou z et que l'on fait la somme des termes obtenus) a-t-il quelque solution?

Même dans le cas où le nombre des fonctions inconnues $x, y, \dots z$ n'est pas inférieur au nombre des équations, rien n'autorise a priori à affirmer que le système considéré est bien compatible. Une démonstration iigourense de ce fait est nécessaire. Nous nous proposons de tenter une telle démonstration dans le cas où le nombre des fonctions inconnues $x, y, \dots z$, est égal au nombre $\frac{n(n+1)}{2}$ des équations.

Nous poserons, pour abréger,

$$S \frac{\partial x}{\partial u_i} \frac{\partial x}{\partial u_k} = (i, k)$$

et plus généralement

$$S\,\frac{\partial^p x}{\partial u_i\,\partial u_k\,\partial u_l\ldots}\cdot\frac{\partial^{p'} x}{\partial u_{i'}\,\partial u_{k'}\,\partial u_{l'}\ldots}=(i\,k\,l\ldots,i'\,k'\,l'\ldots).$$

On a $(i\,k\,l\ldots,i'\,k'\,l'\ldots)=(i'\,k'\,l'\ldots,i\,k\,l\ldots)$.

Nous poserons aussi

$$E_{ik}\equiv(i,k)-a_{ik}.$$

2. — Cas élémentaire: $n=2$. Soit à étudier le système des 3 équations:

$$(1)\qquad E_{11}\equiv(1,1)-a_{11}=0$$
$$(2)\qquad E_{12}\equiv(1,2)-a_{12}=0$$
$$(3)\qquad E_{22}\equiv(2,2)-a_{22}=0.$$

Ce système, dérivé une fois, donne un certain nombre d'équations du 2e ordre, dont nous tirons les combinaisons[1]) suivantes:

$$(4)\qquad 2(E_{12})_1-(E_{11})_2\equiv2(11,2)-[2(a_{12})_1-(a_{11})_2]=0$$
$$(5)\qquad (E_{12})_2\equiv(1,22)+(12,2)-(a_{12})_2$$
$$(6)\qquad (E_{22})_2\equiv2(2,22)-(a_{22})_2.$$

Le système proposé, dérivé deux fois, donne un certain nombre d'équations du 3e ordre, dont nous tirons la combinaison suivante, qui n'est que du 2e ordre:

$$(7)\qquad \begin{aligned}-(E_{11})_{22}+2(E_{12})_{12}-(E_{22})_{11}&\equiv2[(11,22)-(12,12)]-\\&-(-(a_{11})_{22}+2(a_{12})_{12}-(a_{22})_{11}).\end{aligned}$$

Choisissons arbitrairement trois fonctions x, y, z de u_1, satisfaisant à l'équation (1) où l'on fait $u_2=u_2^0$ et résolvons le système (2), (3), (4), où l'on fait $u_2=u_2^0$, x_2, y_2, z_2 étant les trois inconnues; supposons que pour la solution considérée le déterminant fonctionnel

$$\|\,x_1\quad x_2\quad x_{11}\,\|$$

soit différent de zéro.

Le système (5), (6), (7) est un système normal du 2e ordre, résoluble par rapport à x_{22}, y_{22}, z_{22}. Considérons la solution de ce

---

[1]) Nous désignons pour abréger $\dfrac{\partial E_{12}}{\partial u_1}$ par $(E_{12})_1$, $\dfrac{\partial E_{11}}{\partial u_2}$ par $(E_{11})_2$, ... etc..

système telleque x, y, z; x_2 y_2 z_2 prennent pour $u_2 = u_2^0$ les valeurs que nous venons d'indiquer.

Je dis que le système de fonctions qui constituent cette solution satisfait au système d'équations proposées (1), (2), (3).

Puisque, quelsque soient u_1, u_2 on a $(E_{22})_2 = 0$ (6) et que, d'autre part, pour $u_2 = u_2^0$, $E_{22} = 0$ (3), on a quelsque soient u_1 u_2

$$E_{22} = 0.$$

De même les équations (5) et (2) montrent que quels que soient u_1 u_2, on a

$$E_{12} = 0.$$

D'après ces resultats on a

quels que soient u_1, u_2:	$(E_{11})_{22} = 0$	(7)
et pour $u_2 = u_2^0$	$(E_{11})_2 = 0$	(4)
	$E_{11} = 0.$	(1)

Il en résulte que quels que soient u_1, u_2, on a

$$E_{11} = 0.$$

3. — Passage du cas de $n - 1$ variables au cas de n variables.

Admettons qu'on sache démontrer la compatibilité d'un système telque (A) dans le cas de $n - 1$ variables et cherchons à la démontrer dans le cas de n variables.

Le système considéré s'écrit:

$$(1) \qquad E_{i'k'} \equiv (i', k') - a_{i'k'} = 0 \qquad i', k' = 1, 2, \ldots n - 1$$
$$(2) \qquad E_{i'n} \equiv (i', n) - a_{i'n} = 0$$
$$(3) \qquad E_{nn} \equiv (n, n) - a_{nn} = 0.$$

Ce système, dérivé une fois, donne un certain nombre d'équations du 2^e ordre dont nous tirons les combinaisons suivantes:

$$(4) \quad (E_{i'n})_{k'} + (E_{k'n})_{i'} - (E_{i'k'})_n \equiv 2(i'k', n) - [(a_{i'n})_{k'} + (a_{k'n})_{i'} - (a_{i'k'})_n] = 0$$
$$(5) \qquad (E_{i'n})_n \equiv (i'n, n) + (i', nn) - (a_{i'n})_n = 0$$
$$(6) \qquad (E_{nn})_n \equiv 2(n, nn) - (a_{nn})_n = 0.$$

Le système (1), (2), (3) dérivé deux fois, donne un certain nombre d'équations du 3^e ordre, dont nous tirons les combinaisons suivantes, qui ne sont que du 2^e ordre:

$$(7)\quad \left|\begin{array}{l} -(E_{i'k'})_{nn}+(E_{i'n})_{k'n}+(E_{k'n})_{i'n}-(E_{nn})_{i'k'} \\ =2[(i'k',nn)-(k'n,i'n)]-[-(a_{i'k'})_{nn}+(a_{i'n})_{k'n}+ \\ +(a_{k'n})_{i'n}-(a_{nn})_{i'k'}]=0. \end{array}\right.$$

Choisissons arbitrairement $\frac{n(n+1)}{2}$ fonctions de $u_1\, u_2 \ldots u_{n-1}$, $(x, y, \ldots z)$ satisfaisant au système (1) où l'on fait $u_n = u_n^0$.

Résolvons le système (2), (3), (4), où l'on fait $u_n = u_n^0$, $\frac{\partial x}{\partial u_n}, \frac{\partial y}{\partial u_n}, \ldots \frac{\partial z}{\partial u_n}$ étant les $\frac{n(n+1)}{2}$ inconnues. Supposons que pour la solution considérée le déterminant fonctionnel

$$\left\| \cdots \frac{\partial x}{\partial u_{i'}} \cdots \frac{\partial x}{\partial u_n} \cdots \frac{\partial^2 x}{\partial u_{i'} \partial u_{k'}} \cdots \right\|$$

soit différent de zéro.

Le système (5), (6), (7) est un système normal du 2e ordre résoluble par rapport à $x_{nn}, y_{nn}, \ldots z_{nn}$. Considérons la solution de ce système telle que $x, y, \ldots z;\ x_n, y_n, \ldots z_n$ prennent pour $u_n = u_n^0$ les valeurs que nous venons d'indiquer.

Je dis que le système de fonctions qui constituent cette solution satisfait au système d'équations proposées (1) (2) (3).

Puisque, quels que soient $u_1, u_2, \ldots u_n$, on a

$$(6)\qquad (E_{nn})_n = 0$$

et que d'autre part, pour $u_n = u_n^0$,

$$(3)\qquad E_{nn} = 0$$

on a quels que soient $u_1, u_2 \ldots u_n$

$$E_{nn} = 0.$$

De même les équations (5) et (2) montrent que l'on a quels que soient $u_1, u_2 \ldots u_n$:

$$E_{i'n} = 0.$$

D'après ces résultats on a

$$\begin{array}{lll} \text{quels soient } u_1, u_2 \ldots u_n & (E_{i'k'})_{nn} = 0 & (7) \\ \text{et pour } u_n = u_n^0 \quad \left\{ \right. & (E_{i'k'})_n = 0 & (4) \\ & (E_{i'k'}) = 0 & (1) \end{array}$$

Il en résulte que quels que soient $u_1, u_2 \ldots u_n$, on a

$$E_{i'k'} = 0.$$

4. — Restrictions à la validité de la démonstration générale.

Le système (1) où l'on fait $u_n = u_n^0$ contient $\frac{n(n+1)}{2}$ fonctions inconnues et $\frac{n(n-1)}{2}$ équations; si l'on y choisit d'abord arbitrairement n des inconnues (fonctions de $u_1, u_2 \ldots u_{n-1}$) il est bien de la forme (A) que nous étudions. Mais nous avons admis, pour passer au cas de n fonctions inconnues, non seulement que ce système est compatible, mais qu'il a quelque solution telle que le système Σ d'équations algébriques (2) (3) (4) en $\frac{\partial x}{\partial u_n}, \frac{\partial y}{\partial u_n}, \ldots \frac{\partial z}{\partial u_n}$ qui en résulte soit résoluble dans les conditions classiques de la théorie des fonctions implicites, c'est à dire de manière que, pour une au moins des solutions de Σ, le déterminant Δ d'ordre $\frac{n(n+1)}{2}$ dont une ligne est

$$\frac{\partial x}{\partial u_1} \frac{\partial x}{\partial u_2} \cdots \frac{\partial x}{\partial u_n} \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_2} \cdots \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_{n-1}} \cdots \frac{\partial^2 x}{\partial u_{n-1} \partial u_{n-1}}$$

et dont les autres lignes s'en déduisent en changeant x en $y, \ldots$ en z, n'est pas identiquement nul.

Il resterait donc à traiter le cas où le système algébrique obtenu en adjoignant à (1): 1° les équations du 2^e ordre que l'on peut en tirer par dérivations relativement à $u_1\, u_2 \ldots u_{n-1}$ et 2° les équations (2), (3), (4), entraînerait justement l'identité en $u_1\, u_2 \ldots u_n$

$$\Delta \equiv 0.$$

On est amené là à une question d'algébre pure que nous n'avons pas élucidé pour n quelconque, et que nous traiterons ici pour $n = 2$.

5. — Utilisons dans ce cas les nouvelles notations: u pour u_1 v pour u_2. Le cas exceptionnel est celui où le système algébrique en $x_u\, y_u\, z_u, x_{u^2}, y_{u^2}, z_{u^2}, x_v, y_v, z_v$

$$S x_u^2 = a_{11}$$
$$S x_u x_{u^2} = \tfrac{1}{2}(a_{11})_u$$
$$S x_u x_v = a_{12}$$
$$S x_{u^2} x_v = (a_{12})_u - \tfrac{1}{2}(a_{11})_v$$
$$S x_v^2 = a_{22}$$

entraîne l'identité en u, v

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v & x_{u^2} \\ y_u & y_v & y_{u^2} \\ z_u & z_v & z_{u^2} \end{vmatrix} = 0$$

Un calcul assez simple permet de prouver que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est qu'il existe une fonction $f(u, v)$ telle que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 = a_{11} \qquad \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} = a_{12} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 = a_{22}.$$

Mais alors la compatibilité du système (A) en x, y, z est évidente. On peut même dire que sa solution est „plus indéterminée" que dans le cas général; elle dépend ici d'une fonction arbitraire de deux variables (et non plus seulement de deux fonctions d'une variable): l'une des trois fonctions x, y, z peut être prise arbitrairement.

6. — En résumé nous avons montré comment, sachant traiter le problème proposé pour $n-1$ variables dans le cas le plus général, on peut passer au même problème pour n variables dans le cas le plus général également.

Nous avons montré comment s'introduisent les cas exceptionnels. Il resterait à traiter tous ces cas exceptionnels comme nous avons traité, à titre d'indication, celui que l'on rencontre pour $n = 2$.

Cracovie, juin 1926.