Connexione inter operationes arithmetica et logica [1]).

Per

Edward Stamm.

Nos vol in presente dissertatione demonstra, in que modo pote esse operationes de *algebra de logica reducta in dominio de numeros ad* operationes *arithmetica*. Pro id es necessaria demonstratione de possibilitate *applica operationes logica ad numeros.*

Pro intellige ce tractatu suffice notitia de elementare algebra de logica [2]).

Significatione:

$a \cup b$ summa logica de a et b, $a \cap b$ producto logico de a et b (etiam significato per ab),

---

[1]) Ce dissertatione es scripta in lingua internationale „*interlingua*" inventa per mathematico G. Peano. Interlingua es „latino sine flexione". Illa es *intelligibile ad primo visu*, quia adopta omne vocabulo internationale et omne vocabulo latino-anglo. Omne vocabulo internationale, que existe in latino habe forma de thema latino. Formas irregulare es mutata in regulare. Omne elemento grammaticale non necessario es suppresso — Plurale habe suffixo -s in casu, quando es necessario. Casu resulta ex positione aut per prepositiones de, ad, ab etc. Si tempore non pote esse intellecto ex textu, es expresso: preterito per — ba, futuro per i aut vol (me vol scribe, me i scribe). Modo conjunctivo es significato per si, que, ut, participio presente per -nte, participio passivo per -to. Pronomines es latino; thema de hic, haec, hoc: „ce" — isto. — In casu dubio de significatione suffice vocabulario latino. Cf. etiam „Vocabulario commune" de G. Peano, Torino 1915.

[2]) Cf. p. e. A. N. Whitehead, A treatise on universal algebra, I, 1898. L. Couturat, L'algèbre de la logique, 1915. — E. Stamm, Zasady algebry logiki, 1913 (in lingua polonica).

Z zero logico (modulo de additione logica),

T totalitate (modulo de multiplicatione logica),

a' negatione de a,

$a \between b$ declinatione de a et b, id es $ab' \cup a'b$,

$a)(b$ negatione de declinatione de a et b, id es $ab \cup a'b'$,

$a \subset b$ subsumtione „a sub b“.

Nos obtine operatione $a \circ b = c$ inter duo numero a, b, si nos combina in modo definito omne cifra de a cum correspondente cifras de b. Nos vol stude sequente operationes: 1) a et b es numero scripto in systema dyadico, 2) nos combina omne cifra de a cum cifra de b, que sta in idem loco, 3) resultatu de combinatione de correspondente cifras nihil vale pro resultatu de combinatione de alia cifras, 4) operationes, que nos stude debe esse symmetrica [1]). In ista conditiones es possibile sequente 3 combinatione:

$$0 - 0, \quad 0 - 1 \text{ sive } 1 - 0, \quad 1 - 1.$$

Resultatu de combinatione pote esse solum 0 aut 1. Nos obtine quare tabula de operationes:

Nr de combinatione		1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1	0	1

Operatione 1 et 8, in que omne resultatu es equale 0 aut 1 pote esse neglecta. In operatione 2 da $0 - 0$ cifra 0, $0 - 1$ $(1 - 0)$ cifra 0 et $1 - 1$ cifra 1. P. e.

$$101 \cdot 1001 \circ 1011 \cdot 0011 = 1 \cdot 0001.$$

Ista operatione da quare elementos commune, es ergo identica cum *multiplicatione logica*. — In operatione 3 corresponde ad $0 - 0$ cifra 0,

[1]) Demonstratione referente ad applicatione de operationes logica ad numeros es excepta ex meo tractatu de algebra de logica, que i esse publicato in proximo tempore in interlingua.

ad 0 — 1 (1 — 0) cifra 1, ad 1 — 1 cifra 0; operatione da ad nos elementos differente, es ergo identica cum *declinatione*. In operatione 4 nos scribe in resultatu cifras, que non existe in ambo correspondente loco. Operatione es identica cum *negatione de additione logica*. Simili nos pote verifica, quod operatione 5 es identica cum *additione logica*, 6 cum *negatione de declinatione* et 7 cum *negatione de multiplicatione logica*.

Nos pote ergo *exprime omne nostro algorithmo in acceptata conditiones per operationes logica*. Isto facto es identico cum possibilitate de applica operationes logica ad numeros scripto in systema dyadico, ergo ad numeros in generale [1]).

Dominio logico es in ce casu formato per *zero logico*

$$Z = 0, \tag{1}$$

totalitate

$$T = \sum_{i=0}^{p} 2^i + \sum_{k=1} 2^{-k}, \tag{1 a}$$

ubi p et q es constante et finito, aut q constante et finito et p infinito, et omne *numero positivo*

$$l = \sum_{i=0}^{m} \mu^i 2^i + \sum_{k=1}^{n} \nu_k 2^{-k}, \tag{1 b}$$

ubi μ_i et ν_k habe valore 0 aut 1, n es finito et m finito aut fi infinito. Tamen debe esse $n \leqq q$, $m \leqq p$ in (1 a). n (et q) non pote esse infinito, quia nos habe in isto casu

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1,$$

[1]) Ce numeros debe esse semper pro calculatione scripto in systema dyadico. Si nos vol applica operationes logica directum ad numeros scripto in alio systema, tunc nos debe modifica uno de axiomas, id es ce, que defini negatione, sive in logica symbolica exprime principio de excluso medio et non — contradictione. In ce modo nos obtine una serie de algebras L_s, ex que L_i es applicabile ad numeros scripto in systema $i+1$. L_1 es identica cum algebra de logica, L_2 permitte applicatione ad logica symbolica cum 3 valore logico „falsum", „verum" „probabile". Auctore spera pote in breve tempore publica algebra L_2.

et quare non univoco producto logico

$$1 \frown 1 = 1$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\right) \frown 1 = 0.$$

Negatione l' habe forma

$$l' = \sum_{i=1}^{m} \mu_{ic} 2^i + \sum_{k=1}^{n} \nu_{kc} 2^{-k}, \tag{1 c}$$

ubi μ_{ic} et ν_{kc} habe valore 0 si μ_i et ν_k in (1 b) habe valore 1, et valore 1, si μ_i et ν_k in (1 b) habe valore 0.

Summa logica $a \smile b$ de

$$\left\{\begin{aligned} a &= \sum_{i=0}^{m} \mu_{i1} 2^i + \sum_{k=1}^{n} \nu_{k1} 2^{-k} \\ b &= \sum_{i=0}^{r} \mu_{i2} 2^i + \sum_{k=0} \nu_{k2} 2^{-k} \end{aligned}\right. \tag{1 d}$$

ubi r habe proprietates de m et s de n es definita per

$$a \smile b = \sum_{i=0}^{t} \mu_{i3} 2^i + \sum_{k=0}^{u} \nu_{k3} 2^{-k}, \tag{1 c}$$

ubi μ_{i3} es equale ad 0 si μ_{i1} et μ_{i2} es equale ad 0, et equale 1 si μ_{i1} aut μ_{i2} aut ambo es equale 1. Idem pertine ad ν_{k3}.

Producto logico $a \frown b$ habe valore (1 c), ubi μ_{i3} es equale 0, si μ_{i1} et μ_{i2} es equale 0, aut si uno de μ_{i1}, μ_{i2} es equale 0 et altero 1; μ_{i3} habe tamen valore 1, si μ_{i1} et μ_{i2} habe valore 1. Idem pertine ad ν_{k3}.

Possibilitate de applica operationes logica ad numeros (1 b) seque etiam ex conditiones de dominio logico, que habe designato Huntington[1]).

Per id, quod nos habe facto numeros (1 b) pro objectos logico habe nos etiam acceptato novo axiomas, pertinente ad fundamentale proprietates de numeros (1 b). Ante alio nos habe posito *in ordine* objectos de nostro dominio, id es in ordine *lineare*.

---

[1]) Sets of indep. postulates, Trans. Amer. Math. Soc., V. 1904. p. 308 s.

Nos nomina *coefficiente declinare* symbolo

(4) $$\Phi_1(n, k)$$

et valore de ce symbolo, ubi n et k es numeros naturale et valore es significato per equationes

(4a) $$\Phi_1(n+1, k) = \Phi_1(n, k) \between \Phi_1(n, k-1)$$

(4b) $$\Phi_1(n, 0) = T, \quad \Phi_1(n, n) = T.$$

Coefficiente declinare es objecto logico. Valores de illo pote esse facile calculato per *triangulo analogo ad ce de Pascal*:

(5)
$$\begin{array}{llllllllll}
T \\
T & T \\
T & 0 & T \\
T & T & T & T \\
T & 0 & 0 & 0 & T \\
T & T & 0 & 0 & T & T \\
T & 0 & T & 0 & T & 0 & T \\
T & T & T & T & T & T & T & T \\
T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T \\
T & T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T & T \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

Secundum (4a) et (4b) et proprietate de operatione $\between$ pote nos facile demonstra sequente relationes:

(6) $$\Phi_1(n, k) = \Phi_1(n, n-k)$$

(6a) $$\Phi_1(n+1, k) = \Phi_1(n+1, k+1) \between \Phi_1(n+2, k+1)$$

(6b) $$\Phi_1(n+1, k) = \Phi_1(n+1, k-1) \between \Phi_1(n+2, k),$$

et pro $n < k$

(6c) $$\Phi_1(n, k) = 0.$$

Nos verifica facile, quod coefficiente declinare accipe solum valores T et 0. In ce ratione nos demonstra propositione:

Coefficiente declinare

(7) $$\Phi_1(n, k)$$

es tunc et solum tunc equale T, si es

(7 a) $$k \subset n\,.$$ [1])

Propositione vale pro $n = 2$. Nos pone, quod propositione es vera pro $n = n$ et i significa valore de $\Phi_1(n+1, k+1)$.

Secundum (4 a) es

$$\Phi_1(n+1, k+1) = \Phi_1(n, k) \between \Phi_1(n, k+1),$$

et nos pote discerne 4 casu:

(7 b)

$\Phi_1(n, k) = T$, $\Phi_1(n, k+1) = T$; $\Phi_1(n, k) = T$, $\Phi_1(n, k+1) = 0$;

$\Phi_1(n, k) = 0$, $\Phi_1(n, k+1) = T$; $\Phi_1(n, k) = 0$, $\Phi_1(n, k+1) = 0$.

In primo casu es, ut nos habe posito

$$k \subset n, \quad k+1 \subset n.$$

Ex ce relatione seque, quod n non pote in nostro primo casu esse pari, quia uno de numero k, $k+1$ es dispari et numero dispari non pote esse sub numero pari. Ergo es n dispari.

Si nos nunc pone, quod k es pari, tunc non pote esse

(α) $$k+1 \subset n+1,$$

quia $k+1$ es dispari et $n+1$ pari. Si nos pone k dispari, tunc etiam in ce casu non pote vale (α). Nam si in k es primum coefficiente de potentia 2^i in explicatione (1 b) equale 0 et omne coefficientes de 2^k pro $k < i$ equale 1, tunc idem vale etiam pro n, quia nos habe posito $k \subset n$. Nos habe tamen etiam $k+1 \subset n$. Si nos adde ad k numero 1, tunc fi coefficiente de 2^i in k equale 1, et quare es secundum $k+1 \subset n$ et coefficiente de 2^i in n equale 1. Nunc si nos adde ad n numero 1 fi coefficiente de 2^i in n equale 0, que demonstra impossibilitate de subsumtione (α). In secundo casu (7 b) si es n pari et k pari et nos habe secundum (7 b)

(β) $$k \subset n, k+1 \text{ non } \subset n,$$

es etiam $k+1 \subset n+1$. Combinatione n pari, k dispari, es ob $k \subset n$ impossibile. Impossibile es etiam combinatione n dispari,

[1]) Es manifestum, quod es $k \subset n$, si omne potentia de 2, que compone k es inter potentias de 2, que compone n, et solum in ce casu.

k pari, quia tunc i esse secundum $k \subset n$ etiam $k+1 \subset n$ contra (β). Si es n dispari et k dispari et in k coefficiente de 2^i equale 0 et omne coefficiente de 2^k pro $k < i$ equale 1, tunc idem vale et pro n, quia in casu contrario seque ex $k \subset n$ et $k+1 \subset n$ contra (β). Ce posito nos deriva ex $k \subset n$ subsumtione $k+1 \subset n+1$. — In tertio casu nos habe

$$(\gamma) \qquad k \text{ non} \subset n,\, k+1 \subset n.$$

In ce casu non pote esse n pari et k pari, quia tunc es $k+1$ dispari et $k+1 \subset n$. Nunc es n pari, ex que nos deriva $k \subset n$ contra (γ). Si n es pari et k dispari tunc seque ex $k+1 \subset n$ etiam

$$(\delta) \qquad k+1 \subset n+1.$$

Post non pote esse n dispari, k pari, quia in ce casu nos conclude ex $k+1 \subset n$ etiam $k \subset n$ contra (γ). Si es n dispari et k dispari, tunc nos deriva ex prima equatione (γ), quod in k existe potentias de 2, que non es in n. Quia 2^1 es in k et in n existe ce potentias secundum $k+1 \subset n$ inter 2^1 et 2^k, ubi coefficiente de 2^k es equale 0 et omne coefficiente de 2^l pro $l < k$ es equale 1 (k es non identico cum k in (δ)). Ce potentias evanesce per additione de 1 ad k, ut seque ex secunda equatione (γ). Quare si nos adde 1 ad n, tunc es mutata solum potentias de 2 in supra citato locos et nos habe (δ). — In quarto casu es

$$(\varepsilon) \qquad k \text{ non} \subset n,\, k+1 \text{ non} \subset n.$$

Si es n pari et k pari, tunc non pote esse (δ), quia ex (δ) nos deriva in ce casu $k \subset n$ contra (ε). Si n es pari et k dispari et si nos pone (δ), tunc seque ex (δ) $k+1 \subset n$ contra (ε). Post non pote esse μ dispari et k pari, si debe vale (δ), quia tunc es $k+1$ dispari et $n+1$ pari, et numero dispari non pote esse sub numero pari. Si es n dispari et k dispari, tunc es $n+1$ et $k+1$ pari. Si nos in ce casu pone (δ), tunc nos conclude ex ce relatione, quod es aut 1) in $k+1$ et $n+1$ coefficientes de potentias 2^i pro $i = 1, 2, \ldots, l$ equale 0, aut 2) in $n+1$ coefficientes de 2^i pro $i = 1, 2, \ldots, l$ equale 0 et in $k+1$ pro $i = 1, 2, \ldots, l+m$. In primo casu per subtractione de 1 ab $k+1$ coefficientes de 2^i pro $i = 1, 2, \ldots, l-1$ equale 1 et coefficiente de 2^l equale 1; idem vale pro $n+1$, et nos pote deriva ex (δ) etiam $k \subset n$ contra (ε).

In secundo casu fi per subtractione de 1 ab $n+1$ coefficiente de 2^l equale 0 et de 2^i pro $i = 1, 2, \ldots, l-1$ equale 1. Tunc seque ex (δ) etiam $k+1 \subset n$ contra (ε). In ce modo nos habe demonstrato propositione (7), (7 a) pro $n+1$ ergo in generale.

Ce propositione permitte generaliza notione de coefficiente declinare pro omne numeros positivo de typo (1 b). Nos defini:

Coefficiente declinare

$$\Phi_1(n, k) \tag{8}$$

es equale T si vale

$$k \subset n, \tag{8 a}$$

et equale 0, *si ce relatione non vale.* Numeros n et k habe forma (1 b)

Functione Φ_1 es ergo matrice de relatione $\subset$ in dominio de numeros (1 b).

Coefficiente declinare posside pro certa theorias in algebra de logica analogo valore, quam coefficiente binomiale in arithmetica commune [1]).

Nunc nos vol defini in *arithmetica* notione de *coefficiente logico*, que es pro nostro studio maxim valente.

Nos nomina *coefficiente logico* symbolo

$$\varphi_1(n, k) \tag{9}$$

et valore de ce symbolo, ubi n et k es numeros naturale et valore es significato per equationes

$$\varphi_1(n+1, k) = [\varphi_1(n, k) - \varphi_1(n, k-1]^2 \tag{9 a}$$

$$\varphi_1(n, 0) = 1, \quad \varphi_1(n, n) = 1. \tag{9 b}$$

Valores de coefficiente logico pote esse facile significato per triangulo analogo ad (5):

---

[1]) Auctore prepara editione de correspondente dissertatione.

$$
\begin{array}{lcccccccccc}
 & 1 \\
 & 1 & 1 \\
 & 1 & 0 & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
(10) & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}
$$

Ex comparatione de (9a) et (9b) cum (4a) et (4b) seque quod si $\Phi_1(n,k)$ es equale T, tunc es $\varphi_1(n,k)$ equale 1 et viceversa et si $\Phi_1(n,k)$ es equale 0, tunc es $\varphi_1(n,k)$ equale 0 et viceversa. Ex id nos conclude, quod *coefficiente logico es tunc et solum tunc equale* 1, *si es* $k \subset n$; *si ce relatione non vale, tunc es coefficiente logico equale* 0.

Quare pote notione de coefficiente logico esse generalizato in modo analogo, quam notione de coefficiente declinare etiam pro omne n et k de forma (1b), tamen debe esse ex rationes arithmetica m in (1b) finito. *Coefficiente logico*

$$\varphi_1(n,k) \tag{11}$$

habe pro omne positivo et finito n *et* k *de forma (1b) valore 1, si es*

$$k \subset n, \tag{11 a}$$

et si ce subsumtione non vale valore 0.

Per coefficiente logico pote nos in dominio de numeros (1b), si m es finito *reduce operationes logica* in sequento modo *ad operationes arithmetica*:

$$a \frown b = \sum_{i=-n}^{m} \varphi_1(a,2^i)\,\varphi_1(b,2^i)\,2^i \tag{12}$$

(13)

$$a \between = \sum_{i=-n} \varphi_1(a,2^i)\,[1-\varphi_1(b,2^i)]\,2^i + \sum_{k=-n}^{m} \varphi_1(b,2^k)\,[1-\varphi_1(a,2^k)]\,2^k,$$

$$(14)\begin{cases} a \cup b = \sum_{i=-n}^{m} \varphi_1(a, 2^i)\, \varphi_1(b, 2^i)\, 2^i + \sum_{k=-n}^{m} \varphi_1(a, 2^k)\,[1 - \varphi_1(b, 2^k)]\, 2^k + \\ \qquad + \sum_{i=-n}^{m} \varphi_1(b, 2^i)\,[1 - \varphi_1(a, 2^i)] 2^i, \end{cases}$$

$$(15) \qquad a' = \sum_{i=-n}^{m} [1 - \varphi_1(a, 2^i)] 2^i .$$

Nam

$$(16) \qquad \varphi_1(u, a)\, a$$

es equale a si omne potentias de 2 in explicatione dyadica de a es inter potentias de 2 in explicatione dyadica de u, id es si nos habe

$$a \subset u .$$

In casu contrario es (16) equale 0. Post es

$$(17) \qquad \varphi_1(u, a)\, \varphi_1(v, a)\, a$$

equale a si es

$$(\alpha) \qquad a \subset u, \quad a \subset v,$$

et equale 0, sin non vale (α). Id demonstra relatione (12).

Expressione

$$(18) \qquad [1 - \varphi_1(u, a)]\, a$$

es equale a, si es a non $\subset u$ et equale 0, si es $a \subset u$. Id demonstra relatione (15).

Expressione

$$(19) \qquad \varphi_1(u, a)\,[1 - \varphi_1(v, a)]\, a$$

es equale a si es $a \subset u$ et a non $\subset v$, et equale 0 in casu contrario. Id demonstra relatione (13) et (14).

Ex id nos conclude, quod *summa logica* pote esse scripta etiam

$$(19\text{a}) \qquad a \cup b = \sum_{i=-n}^{m} [\varphi_1(a, 2^i) + \varphi_1(b, 2^i) - \varphi_1(a, 2^i)\, \varphi_1(b, 2^i)]\, 2^i .$$

Pro $b = 2^m$ reduce se equationes (12)—(14) in

(20) $$a \cap 2^m = \varphi_1(a, 2^m)\, 2^m,$$

(20 a) $$a \between 2^m = \sum_i \varphi_1(a, 2^i)\,[1 - \varphi_1(2^m, 2^i)]\, 2^i + [1 - \varphi_1(a, 2^m)]\, 2^m,$$

(20 b) $$a \cup b = a + [1 - \varphi_1(a, 2^m)]\, 2^m.$$

Ce relationes pote esse expressa etiam in forma:

(20 c) $$a \cap 2^m = \begin{cases} 2^m \\ 0 \end{cases}$$

(20 d) $$a \between 2^m = a \mp 2^m$$

(20 e) $$a \cup 2^m = a + \begin{cases} 0 \\ 2^m \end{cases}$$

ubi valores superiore $(2^m, a - 2^m\ a + 0)$ vale, si vale subsumtione

(20 f) $$2^m \subset u,$$

et valores inferiore in casu contrario.

Equatione (20 a) es equivalente cum equatione

(21) $$a \between 2^m = a + (-1)^{\varphi_1(a, 2^m)}\, 2^m,$$

quia $(-1)^{\varphi_1(a, 2^m)}$ es equale -1 si es $2^m \subset a$ et equale $+1$ si es 2^m non $\subset a$.

Nos vol demonstra etiam duo simplice relationes inter additione, multiplicatione et declinatione logica ex uno parte et additione, subtractione et divisione arithmetica ex altera.

Pro forma summa logica de duo numero (1 b) nos scribe 1, si in correspondente locos de summandos es cifras 0 et 1, 1 et 0, 1 et 1. Nos obtine tamen summa arithmetica de duo numero (1 b), si nos scribe pro 0 et, 1 et 0 cifra 1, et pro 1 et 1 cifra 0 et adde correspondente potentia de 2 ad cifras in parte sinistro. Producto logico contine cifras 1 solum in locos, in que summandos habe cifras 1 et 1. Ergo si nos adde in modo arithmetico producto logico ad summa logica, tunc nos obtine summa arithmetica:

(22) $$a + b = (a \cup b) + (a \cap b).$$

Declinatione de duo numero contine cifras de uno et altero summando, que non es in ambo. Nos obtine ce cifras, si nos subtrahe ab summa logica, continente extra illa cifras et cifras commune, ista ultima, sive producto logico:

$$a \between b = (a \smile b) - (a \frown b). \tag{23}$$

Systema (22), (23) da post additione et divisione, et post subtractione et divisione supra citata relationes in forma:

$$\left\{\begin{aligned} a \smile b &= \frac{a+b}{2} + \frac{a \between b}{2} \\ a \frown b &= \frac{a+b}{2} - \frac{a \between b}{2}. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Relationes (12)—(15) demonstra, quod *si nos elige pro dominio logico dominio de numeros (1 b), tunc es algebra de logica un parte de arithmetica.* Omne operatione logica pote esse tunc expressa per operationes arithmetica additione, subtractione, multiplicatione et potentia.

Cracovia, Februario 1922.