XXXIII.

SUR LES VIBRATIONS LUMINEUSES DANS LES MILIEUX BIRÉFRINGENTS

« Acta mathematica », t. 16, 1892, pp. 153-215.

INTRODUCTION.

1. LAMÉ a consacré la 22ème et la 23ème de ses leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité à des recherches sur la possibilité d'un seul centre d'ébranlement dans la propagation de la lumière dans les milieux biréfringents. Il observe que « lors d'une seule onde progressive produite à l'origine des coordonnées, centre unique d'ébranlement, un point M dont les coordonnées sont (x, y, z) sera agité à deux époques différentes

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{Q - \sqrt{Q^2 - 4q\,RP}}{2q}},$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{Q + \sqrt{Q^2 - 4q\,RP}}{2q}}$$

où

$$R = \Sigma x^2 \quad , \quad P = \Sigma a^2 x^2 \quad , \quad Q = \Sigma a^2 (b^2 + c^2) x^2 \quad , \quad q = a^2 b^2 c^2,$$

a, b, c, étant les axes d'élasticité.

« Si le centre d'ébranlement exécute une suite indéfinie de vibrations, le déplacement y sera représenté par les projections

$$(1) \qquad \begin{cases} X_1 \cos 2\pi \dfrac{t-\lambda_1}{\mathfrak{T}} + X_2 \cos 2\pi \dfrac{t-\lambda_2}{\mathfrak{T}}, \\[2ex] Y_1 \cos 2\pi \dfrac{t-\lambda_1}{\mathfrak{T}} + Y_2 \cos 2\pi \dfrac{t-\lambda_2}{\mathfrak{T}}, \\[2ex] Z_1 \cos 2\pi \dfrac{t-\lambda_1}{\mathfrak{T}} + Z_2 \cos 2\pi \dfrac{t-\lambda_2}{\mathfrak{T}}, \end{cases}$$

(X_1, Y_1, Z_1) et (X_2, Y_2, Z_2) étant des fonctions de (x, y, z) qui devront donner pour $x = 0, y = 0, z = 0$

$$X_1 + X_2 = X_0 \quad , \quad Y_1 + Y_2 = Y_0 \quad , \quad Z_1 + Z_2 = Z_0 ».$$

Par suite LAMÉ s'est proposé de chercher les intégrales des équations

$$(2) \qquad \begin{cases} c^2 \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) - b^2 \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\[2ex] a^2 \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) - c^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\[2ex] b^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) - a^2 \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases}$$

qui ont la forme (1).

Par un calcul fort laborieux, conduit avec une grande habileté, il atteint le but de déterminer les fonctions inconnues X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2.

LAMÉ observe que ces fonctions sont indéterminées le long des parallèles aux axes optiques conduites par l'origine et sont infinies à l'origine.

En remplaçant dans les formules (1) les fonctions

$$\cos\frac{2\pi(t-\lambda_1)}{\mathfrak{T}}\quad,\quad\cos\frac{2\pi(t-\lambda_2)}{\mathfrak{T}}$$

par

$$F_1(t+\lambda_1)+\varphi_1(t-\lambda_1)\quad,\quad F_2(t+\lambda_2)+\varphi_2(t-\lambda_2),$$

F_1, φ_1, F_2, φ_2 étant des fonctions arbitraires, u, v, w restent toujours des intégrales des équations (2).

Donc, on a que

$$(3)\qquad\left\{\begin{aligned}u &= X_1\{F_1(t+\lambda_1)+\varphi_1(t-\lambda_1)\}+X_2\{F_2(t+\lambda_2)+\varphi_2(t-\lambda_2)\},\\ v &= Y_1\{F_1(t+\lambda_1)+\varphi_1(t-\lambda_1)\}+Y_2\{F_2(t+\lambda_2)+\varphi_2(t-\lambda_2)\},\\ w &= Z_1\{F_1(t+\lambda_1)+\varphi_1(t-\lambda_1)\}+Z_2\{F_2(t+\lambda_2)+\varphi_2(t-\lambda_2)\}\end{aligned}\right.$$

vérifient les équations de LAMÉ.

2. Les vibrations lumineuses dans un milieu isotrope dépendent de l'équation différentielle

$$(4)\qquad\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=V^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

dont on a l'integrale

$$(5)\qquad u=\frac{F(r+Vt)}{r}+\frac{\varphi(r-Vt)}{r}$$

où

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

et F, φ sont des fonctions arbitraires. Cette intégrale présente une analogie avec les intégrales (3) et, comme elles, devient infinie à l'origine.

Il est connu qu'on peut déduire l'intégrale générale de l'équation (4) sous la forme donnée par POISSON, en partant de l'intégrale (5) et en supposant vérifié *a priori* le principe de HUYGHENS. C'est par là que M. POINCARÉ démontre dans ses leçons d'optique la vérité du principe de HUYGHENS. On peut maintenant se poser la question: Qu'est-ce qu'on trouve en appliquant le même procédé, lorsqu'on part des intégrales (3) et qu'on suppose vérifié le principe de HUYGHENS? Nous avons montré dans l'article 5 de ce mémoire, qu'on tire de là les fonctions que M[me] KOWALEVSKI a données comme intégrales générales des équations de LAMÉ. Si l'on pouvait vérifier que les formules trouvées de cette façon satisfont les équations de LAMÉ, on aurait justifié l'emploi du principe de HUYGHENS.

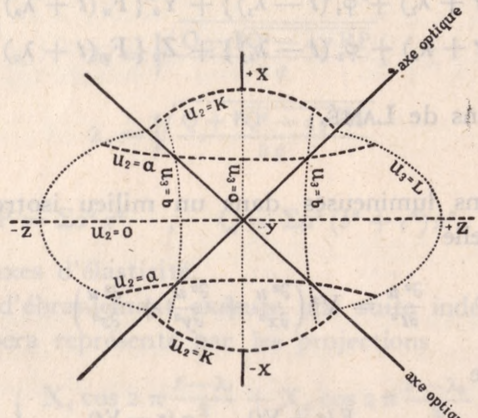
Mais nous avons montré dans l'article 5 que cette vérification n'est pas possible. D'où ressort ce résultat qui à première vue semble bien singulier?

3. Pour trouver le noeud de la question, il faut avoir devant les yeux la surface des ondes où l'on ait dessiné les systèmes des lignes sphériques et elliptiques qui forment les coordonnées curvilignes considérées par M. WEBER. (Voir article 3).

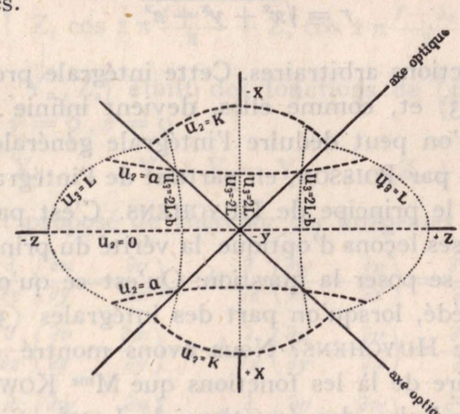
Prenons comme fait M. WEBER

$$x = b \operatorname{sn}(u_2, k) \operatorname{dn}(u_3, \mu), \qquad k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2},$$
$$y = a \operatorname{cn}(u_2, k) \operatorname{cn}(u_3, \mu),$$
$$z = a \operatorname{dn}(u_2, k) \operatorname{sn}(u_3, \mu), \qquad \mu^2 = \frac{a^2}{b^2} \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}.$$

Voici ce qu'on verrait en regardant la nappe extérieure de la surface des ondes du côté des y positives [1].



Voici au contraire ce qu'on verrait en regardant la même nappe du côté des y négatives.



(1) 4 K et 4 L sont les périodes réelles correspondantes aux modules k, u.

Ces figures montrent que u_3 est discontinue le long des lignes $u_2 = K$, $u_2 = -K$.

Prenons maintenant les premiers termes des intégrales (3). Nous avons trouvé dans ce mémoire (article 4) ces intégrales par un procédé tout à fait différent de celui suivi par LAMÉ. Les expressions sous lesquelles résultent les quantités X_1, Y_1, Z_1 sont

$$(6) \qquad -\frac{\mu^2 b \operatorname{sn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{cn} u_3}{a^2 u_1 \Delta}, \qquad -\frac{\operatorname{cn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{dn} u_3}{a u_1 \Delta}, \qquad \frac{\operatorname{dn} u_2 \operatorname{cn} u_3 \operatorname{dn} u_3}{a u_1 \Delta},$$

où

$$\Delta = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u_2 - \mu^2 \operatorname{sn}^2 u_3 + (\mu^2 + k^2 - 1) \operatorname{sn}^2 u_2 \operatorname{sn}^2 u_3$$

et u_1 remplace le paramètre λ_1 de LAMÉ.

Ces expressions sont telles qu'en prenant garde aux figures que nous avons dessinées, on voit bien aisément que X_1, Z_1 sont des fonctions polydromes des coordonnées x, y, z des points de l'espace. Pareillement on a que X_2, Z_2 sont des fonctions polydromes. Cette propriété ne s'aperçoit guère au premier abord, lorsqu'on examine ces quantités sous la forme que leur avait donnée LAMÉ.

C'est pourquoi il s'était trompé lorsqu'il avait cru qu'elles pouvaient représenter les vibrations lumineuses provenantes d'un centre d'ébranlement.

Ce sont les mêmes fonctions (6) qui paraîssent dans le mémoire de Mme KOWALEVSKI. Lorsqu'on s'aperçoit qu'elles sont polydromes, on voit aussi que la méthode découverte par M. WEIERSTRASS pour l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles ne peut être appliquée pour intégrer les équations de LAMÉ en se servant des coordonnées de M. WEBER.

4. Le premier article de ce mémoire est consacré à la transformation des équations de l'optique de LAMÉ en coordonnées curvilignes.

J'applique les formules trouvées au cas particulier des coordonnées de M. WEBER. De cette façon je trouve, par un procédé (2) bien plus court que celui suivi par LAMÉ, les intégrales (3) sous la forme que je viens d'indiquer. La discussion de ces intégrales est faite dans l'article 5. Dans l'article suivant je trouve un théorème analogue à celui de GREEN et j'y applique la méthode employée par KIRCHHOFF pour généraliser le principe de HUYGHENS. Enfin les derniers articles sont consacrés à trouver les intégrales générales des équations de l'optique en partant des intégrales de LAMÉ et en prenant garde à leur polydromie.

(2) Ce procédé ne diffère pas essentiellement de la méthode suivie par M. BRILL dans un mémoire [«Math. Ann.», Ier Vol.] que j'ai connu seulement après avoir rédigé mon travail.

Art. 1. – Transformation des équations de Lamé en coordonnées curvilignes.

1. Soient u, v, w les composantes du déplacement d'un point (x, y, z) d'un milieu élastique homogène.

En posant

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} U &= \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y},\\ V &= \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z},\\ W &= \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x},\end{aligned}\right.$$

les composantes des rotations des éléments du milieu seront données par

$$\frac{1}{2}U \quad , \quad \frac{1}{2}V \quad , \quad \frac{1}{2}W.$$

Prenons les axes coordonnées x, y, z parallèles aux directions des axes d'élasticité, et soient

$$a > b > c$$

les axes d'élasticité.

On écrira les équations de Lamé de la manière suivante [3]

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2\frac{\partial W}{\partial y} - b^2\frac{\partial V}{\partial z},\\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2\frac{\partial U}{\partial z} - c^2\frac{\partial W}{\partial x},\\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= b^2\frac{\partial V}{\partial x} - a^2\frac{\partial U}{\partial y}.\end{aligned}\right.$$

Ces équations peuvent s'obtenir en annullant la variation d'une intégrale.

En effet, si l'on pose

$$(3)\qquad P = a^2U^2 + b^2V^2 + c^2W^2,$$

$$(4)\qquad T = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2,$$

$$(5)\qquad I = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_S (T - P)\, dS\, dt,$$

t_0, t_1 étant un intervalle arbitraire de temps, on aura

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1}\int_S \left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial \delta v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial \delta w}{\partial t}\right.$$

$$\left. - \left\{a^2 U\left(\frac{\partial \delta v}{\partial z} - \frac{\partial \delta w}{\partial y}\right) + b^2 V\left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} - \frac{\partial \delta u}{\partial z}\right) + c^2 W\left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} - \frac{\partial \delta v}{\partial x}\right)\right\}\right] dS\, dt.$$

(3) Lamé, *Leçons sur l'élasticité*, dix-septième leçon.

Supposons que les variations δu, δv, δw soient nulles aux limites des intégrales. Par des intégrations par partie on déduit de l'équation précédente

$$\delta I = -\int_{t_0}^{t_1}\int_S \Big[\delta u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial W}{\partial y} + b^2\frac{\partial V}{\partial z}\right) + \delta v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial U}{\partial z} + c^2\frac{\partial W}{\partial x}\right)$$
$$+ \delta w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - b^2\frac{\partial V}{\partial x} + a^2\frac{\partial U}{\partial y}\right)\Big] dS\, dt.$$

On tire de là les équations (2) en posant

$$\delta I = 0.$$

2. Considérons maintenant un système de coordonnées curvilignes u_1, u_2, u_3. Soit

$$ds^2 = H_{11}du_1^2 + H_{22}du_2^2 + H_{33}du_3^2 + 2H_{23}du_2\,du_3 + 2H_{31}du_3\,du_1 + 2H_{12}du_1\,du_2$$

le carré de l'élément linéaire.

Posons

$$D^2 = \left\{\frac{d(x, y, z)}{d(u_1, u_2, u_3)}\right\}^2 = \begin{vmatrix} H_{11}, H_{12}, H_{13} \\ H_{21}, H_{22}, H_{23} \\ H_{31}, H_{32}, H_{33} \end{vmatrix}.$$

Désignons par t_1, t_2, t_3 les tangentes aux lignes

$$u_2 = \text{const} \quad , \quad u_3 = \text{const};$$
$$u_3 = \text{const} \quad , \quad u_1 = \text{const};$$
$$u_1 = \text{const} \quad , \quad u_2 = \text{const}.$$

Les composantes des déplacements des points du milieu dans les directions t_1, t_2, t_3 étant v_1, v_2, v_3, on aura

$$u = v_1\cos t_1 x + v_2\cos t_2 x + v_3 \cos t_3 x = \frac{v_1}{\sqrt{H_{11}}}\frac{\partial x}{\partial u_1} + \frac{v_2}{\sqrt{H_{22}}}\frac{\partial x}{\partial u_2} + \frac{v_3}{\sqrt{H_{33}}}\frac{\partial x}{\partial u_3},$$

$$v = v_1\cos t_1 y + v_2\cos t_2 y + v_3 \cos t_3 y = \frac{v_1}{\sqrt{H_{11}}}\frac{\partial y}{\partial u_1} + \frac{v_2}{\sqrt{H_{22}}}\frac{\partial y}{\partial u_2} + \frac{v_3}{\sqrt{H_{33}}}\frac{\partial y}{\partial u_3},$$

$$w = v_1\cos t_1 z + v_2\cos t_2 z + v_3 \cos t_3 z = \frac{v_1}{\sqrt{H_{11}}}\frac{\partial z}{\partial u_1} + \frac{v_2}{\sqrt{H_{22}}}\frac{\partial z}{\partial u_2} + \frac{v_3}{\sqrt{H_{33}}}\frac{\partial z}{\partial u_3}.$$

Si l'on pose

(6) $$p_1 = \frac{v_1}{\sqrt{H_{11}}} \quad , \quad p_2 = \frac{v_2}{\sqrt{H_{22}}} \quad , \quad p_3 = \frac{v_3}{\sqrt{H_{33}}},$$

on trouvera

(7) $$\begin{cases} u = p_1\dfrac{\partial x}{\partial u_1} + p_2\dfrac{\partial x}{\partial u_2} + p_3\dfrac{\partial x}{\partial u_3}, \\ v = p_1\dfrac{\partial y}{\partial u_1} + p_2\dfrac{\partial y}{\partial u_2} + p_3\dfrac{\partial y}{\partial u_3}, \\ w = p_1\dfrac{\partial z}{\partial u_1} + p_2\dfrac{\partial z}{\partial u_2} + p_3\dfrac{\partial z}{\partial u_3}. \end{cases}$$

Par un théorème bien connu on peut toujours trouver trois fonctions

$$\lambda , \mu , \nu ,$$

telles que

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{\partial\lambda}{\partial x} + \nu \frac{\partial\mu}{\partial x}, \\ v &= \frac{\partial\lambda}{\partial y} + \nu \frac{\partial\mu}{\partial y}, \\ w &= \frac{\partial\lambda}{\partial z} + \nu \frac{\partial\mu}{\partial z}, \end{aligned} \right.$$

d'où

$$U = \frac{d(\mu , \nu)}{d(y , z)} \quad , \quad V = \frac{d(\mu , \nu)}{d(z , x)} \quad , \quad W = \frac{d(\mu , \nu)}{d(x , y)}.$$

On aura donc

$$\begin{aligned} U &= \frac{d(\mu , \nu)}{d(u_2 , u_3)} \frac{d(u_2 , u_3)}{d(y , z)} + \frac{d(\mu , \nu)}{d(u_3 , u_1)} \frac{d(u_3 , u_1)}{d(y , z)} + \frac{d(\mu , \nu)}{d(u_1 , u_2)} \frac{d(u_1 , u_2)}{d(y , z)} \\ &= \frac{1}{D} \frac{d(\mu , \nu)}{d(u_2 , u_3)} \frac{\partial x}{\partial u_1} + \frac{1}{D} \frac{d(\mu , \nu)}{d(u_3 , u_1)} \frac{\partial x}{\partial u_2} + \frac{1}{D} \frac{d(\mu , \nu)}{d(u_1 , u_2)} \frac{\partial x}{\partial u_3} \\ &= \frac{\sqrt{H_{11}}}{D} \frac{d(\mu , \nu)}{d(u_2 , u_3)} \cos t_1 x + \frac{\sqrt{H_{22}}}{D} \frac{d(\mu , \nu)}{d(u_3 , u_1)} \cos t_2 x + \frac{\sqrt{H_{33}}}{D} \frac{d(\mu , \nu)}{d(u_1 , u_2)} \cos t_3 x . \end{aligned}$$

De même on trouve

$$V = \frac{\sqrt{H_{11}}}{D} \frac{d(\mu , \nu)}{d(u_2 , u_3)} \cos t_1 y + \frac{\sqrt{H_{22}}}{D} \frac{d(\mu , \nu)}{d(u_3 , u_1)} \cos t_2 y + \frac{\sqrt{H_{33}}}{D} \frac{d(\mu , \nu)}{d(u_1 , u_2)} \cos t_3 y,$$

$$W = \frac{\sqrt{H_{11}}}{D} \frac{d(\mu , \nu)}{d(u_2 , u_3)} \cos t_1 z + \frac{\sqrt{H_{22}}}{D} \frac{d(\mu , \nu)}{d(u_3 , u_1)} \cos t_2 z + \frac{\sqrt{H_{33}}}{D} \frac{d(\mu , \nu)}{d(u_1 , u_2)} \cos t_3 z.$$

C'est pourquoi les composantes des rotations des éléments du milieu dans les directions t_1 , t_2 , t_3, seront données par

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} V_1 &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{H_{11}}}{D} \frac{d(\mu , \nu)}{d(u_2 , u_3)}, \\ \frac{1}{2} V_2 &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{H_{22}}}{D} \frac{d(\mu , \nu)}{d(u_3 , u_1)}, \\ \frac{1}{2} V_3 &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{H_{33}}}{D} \frac{d(\mu , \nu)}{d(u_1 , u_2)}. \end{aligned}$$

On tire des équations (8) et (7)

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial\lambda}{\partial u_1} + \nu \frac{\partial\mu}{\partial u_1} &= u \frac{\partial x}{\partial u_1} + v \frac{\partial y}{\partial u_1} + w \frac{\partial z}{\partial u_1} = H_{11} p_1 + H_{12} p_2 + H_{13} p_3 = q_1 , \\ \frac{\partial\lambda}{\partial u_2} + \nu \frac{\partial\mu}{\partial u_2} &= u \frac{\partial x}{\partial u_2} + v \frac{\partial y}{\partial u_2} + w \frac{\partial z}{\partial u_2} = H_{12} p_1 + H_{22} p_2 + H_{23} p_3 = q_2 , \\ \frac{\partial\lambda}{\partial u_3} + \nu \frac{\partial\mu}{\partial u_3} &= u \frac{\partial x}{\partial u_3} + v \frac{\partial y}{\partial u_3} + w \frac{\partial z}{\partial u_3} = H_{13} p_1 + H_{23} p_2 + H_{33} p_3 = q_3 , \end{aligned} \right.$$

d'où

$$\frac{d(\mu,\nu)}{d(u_2,u_3)}=\frac{\partial q_2}{\partial u_3}-\frac{\partial q_3}{\partial u_2},$$

$$\frac{d(\mu,\nu)}{d(u_3,u_1)}=\frac{\partial q_3}{\partial u_1}-\frac{\partial q_1}{\partial u_3},$$

$$\frac{d(\mu,\nu)}{d(u_1,u_2)}=\frac{\partial q_1}{\partial u_2}-\frac{\partial q_2}{\partial u_1},$$

et par suite

$$V_1=\frac{\sqrt{H_{11}}}{D}\left(\frac{\partial q_2}{\partial u_3}-\frac{\partial q_3}{\partial u_2}\right),$$

$$V_2=\frac{\sqrt{H_{22}}}{D}\left(\frac{\partial q_3}{\partial u_1}-\frac{\partial q_1}{\partial u_3}\right),$$

$$V_3=\frac{\sqrt{H_{33}}}{D}\left(\frac{\partial q_1}{\partial u_2}-\frac{\partial q_2}{\partial u_1}\right).$$

Posons

$$\text{(10)}\qquad P_1=\frac{V_1}{\sqrt{H_{11}}}\,,\qquad P_2=\frac{V_2}{\sqrt{H_{22}}}\,,\qquad P_3=\frac{V_3}{\sqrt{H_{33}}}\,.$$

On aura pour les rotations des formules parfaitement analogues aux équations (7) que nous avons établies pour les déplacements:

$$\text{(11)}\qquad \left\{\begin{aligned} U&=P_1\frac{\partial x}{\partial u_1}+P_2\frac{\partial x}{\partial u_2}+P_3\frac{\partial x}{\partial u_3},\\ V&=P_1\frac{\partial y}{\partial u_1}+P_2\frac{\partial y}{\partial u_2}+P_3\frac{\partial y}{\partial u_3},\\ W&=P_1\frac{\partial z}{\partial u_1}+P_2\frac{\partial z}{\partial u_2}+P_3\frac{\partial z}{\partial u_3}.\end{aligned}\right.$$

3. Nous nous proposons maintenant d'exprimer les quantités T et P par les fonctions p_1, p_2, p_3 ; P_1, P_2, P_3. Il est bien facile de déduire des équations (7)

$$T=\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2=H_{11}\left(\frac{\partial p_1}{\partial t}\right)^2+H_{22}\left(\frac{\partial p_2}{\partial t}\right)^2$$

$$+H_{33}\left(\frac{\partial p_3}{\partial t}\right)^2+2\,H_{23}\frac{\partial p_2}{\partial t}\frac{\partial p_3}{\partial t}+2\,H_{31}\frac{\partial p_3}{\partial t}\frac{\partial p_1}{\partial t}+2\,H_{12}\frac{\partial p_1}{\partial t}\frac{\partial p_2}{\partial t}.$$

De même, en posant

$$K_{11}=a^2\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\right)^2+b^2\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}\right)^2+c^2\left(\frac{\partial z}{\partial u_1}\right)^2,$$

$$K_{22}=a^2\left(\frac{\partial x}{\partial u_2}\right)^2+b^2\left(\frac{\partial y}{\partial u_2}\right)^2+c^2\left(\frac{\partial z}{\partial u_2}\right)^2,$$

$$K_{33}=a^2\left(\frac{\partial x}{\partial u_3}\right)^2+b^2\left(\frac{\partial y}{\partial u_3}\right)^2+c^2\left(\frac{\partial z}{\partial u_3}\right)^2,$$

$$K_{23}=a^2\frac{\partial x}{\partial u_2}\frac{\partial x}{\partial u_3}+b^2\frac{\partial y}{\partial u_2}\frac{\partial y}{\partial u_3}+c^2\frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{\partial z}{\partial u_3},$$

$$K_{31} = a^2 \frac{\partial x}{\partial u_3}\frac{\partial x}{\partial u_1} + b^2 \frac{\partial y}{\partial u_3}\frac{\partial y}{\partial u_1} + c^2 \frac{\partial z}{\partial u_3}\frac{\partial z}{\partial u_1},$$

$$K_{12} = a^2 \frac{\partial x}{\partial u_1}\frac{\partial x}{\partial u_2} + b^2 \frac{\partial y}{\partial u_1}\frac{\partial y}{\partial u_2} + c^2 \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{\partial z}{\partial u_2},$$

on trouve

$$\begin{aligned} P &= a^2 U^2 + b^2 V^2 + c^2 W^2 \\ &= K_{11} P_1^2 + K_{22} P_2^2 + K_{33} P_3^2 + 2 K_{23} P_2 P_3 + 2 K_{31} P_3 P_1 + 2 K_{12} P_1 P_2 . \end{aligned}$$

4. On peut maintenant transformer les équations de LAMÉ en coordonnées curvilignes.

En effet, on aura

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta T = {} & \frac{\partial p_1}{\partial t}\delta\left(H_{11}\frac{\partial p_1}{\partial t} + H_{12}\frac{\partial p_2}{\partial t} + H_{13}\frac{\partial p_3}{\partial t}\right) \\ & + \frac{\partial p_2}{\partial t}\delta\left(H_{21}\frac{\partial p_1}{\partial t} + H_{22}\frac{\partial p_2}{\partial t} + H_{22}\frac{\partial p_3}{\partial t}\right) + \frac{\partial p_3}{\partial t}\delta\left(H_{31}\frac{\partial p_1}{\partial t} + H_{32}\frac{\partial p_2}{\partial t} + H_{33}\frac{\partial p_3}{\partial t}\right) \\ = {} & \frac{\partial p_1}{\partial t}\frac{\partial \delta q_1}{\partial t} + \frac{\partial p_2}{\partial t}\frac{\partial \delta q_2}{\partial t} + \frac{\partial p_3}{\partial t}\frac{\partial \delta q_3}{\partial t}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta P = {} & (K_{11} P_1 + K_{12} P_2 + K_{13} P_3)\,\delta P_1 + (K_{21} P_1 + K_{22} P_2 + K_{23} P_3)\,\delta P_2 \\ & + (K_{31} P_1 + K_{32} P_2 + K_{33} P_3)\,\delta P_3 \end{aligned}$$

et en posant

$$(12) \qquad \begin{cases} K_{11} P_1 + K_{12} P_2 + K_{13} P_3 = Q_1 , \\ K_{21} P_1 + K_{22} P_3 + K_{23} P_3 = Q_2 , \\ K_{31} P_1 + K_{32} P_2 + K_{33} P_3 = Q_3 \end{cases}$$

on trouvera

$$\frac{1}{2}\delta P = \frac{1}{D}\left[Q_1\left(\frac{\partial \delta q_2}{\partial u_3} - \frac{\partial \delta q_3}{\partial u_2}\right) + Q_2\left(\frac{\partial \delta q_3}{\partial u_1} - \frac{\partial \delta q_1}{\partial u_3}\right) + Q_3\left(\frac{\partial \delta q_1}{\partial u_2} - \frac{\partial \delta q_2}{\partial u_1}\right)\right].$$

Par suite

$$(13) \qquad \begin{aligned} \delta I = {} & \delta \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} dt \int_S (T - P)\, D du_1\, du_2\, du_3 \\ = {} & \int_{t_0}^{t_1} dt \int_S \Big\{ D\left[\frac{\partial p_1}{\partial t}\frac{\partial \delta q_1}{\partial t} + \frac{\partial p_2}{\partial t}\frac{\partial \delta q_2}{\partial t} + \frac{\partial p_3}{\partial t}\frac{\partial \delta q_3}{\partial t}\right] \\ & - Q_1\left(\frac{\partial \delta q_2}{\partial u_3} - \frac{\partial \delta q_3}{\partial u_2}\right) - Q_2\left(\frac{\partial \delta q_3}{\partial u_1} - \frac{\partial \delta q_1}{\partial u_3}\right) - Q_3\left(\frac{\partial \delta q_1}{\partial u_2} - \frac{\partial \delta q_2}{\partial u_1}\right)\Big\} du_1\, du_2\, du_3 . \end{aligned}$$

Les variations δq_1, δq_2, δq_3 étant nulles aux limites des intégrales, l'équation précédente peut être remplacée par

$$\begin{aligned} \delta I = -\int_{t_0}^{t_1} dt \int_S \Big\{ & \delta q_1\left[D\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \frac{\partial Q_3}{\partial u_2} + \frac{\partial Q_2}{\partial u_3}\right] + \delta q_2\left[D\frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2} - \frac{\partial Q_1}{\partial u_3} + \frac{\partial Q_3}{\partial u_1}\right] \\ & + \delta q_3\left[D\frac{\partial^2 p_3}{\partial t^2} - \frac{\partial Q_2}{\partial u_1} + \frac{\partial Q_1}{\partial u_2}\right]\Big\} dS . \end{aligned}$$

Donc, si $\delta I = 0$, on aura

$$(14)\quad \begin{cases} D\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \dfrac{\partial Q_3}{\partial u_2} - \dfrac{\partial Q_2}{\partial u_3}, \\ D\dfrac{\partial^2 p_2}{\partial t^2} = \dfrac{\partial Q_1}{\partial u_3} - \dfrac{\partial Q_3}{\partial u_1}, \\ D\dfrac{\partial^2 p_3}{\partial t^2} = \dfrac{\partial Q_2}{\partial u_1} - \dfrac{\partial Q_1}{\partial u_2}. \end{cases}$$

Voilà les équations de LAMÉ transformées en coordonnées curvilignes.

5. Nous donnerons ici quelques formules dont nous nous servirons dans les articles suivants.

Les équations (9) résolues par rapport à u, v, w, donnent

$$(15)\quad \begin{cases} u = q_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + q_2\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + q_3\dfrac{\partial u_3}{\partial x}, \\ v = q_1\dfrac{\partial u_1}{\partial y} + q_2\dfrac{\partial u_2}{\partial y} + q_3\dfrac{\partial u_3}{\partial y}, \\ w = q_1\dfrac{\partial u_1}{\partial z} + q_2\dfrac{\partial u_2}{\partial z} + q_3\dfrac{\partial u_3}{\partial z}. \end{cases}$$

Ajoutons les équations (12) après les avoir multipliées par $\dfrac{\partial u_1}{\partial x}, \dfrac{\partial u_2}{\partial x}, \dfrac{\partial u_3}{\partial x}$. On trouvera

$$Q_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + Q_2\frac{\partial u_2}{\partial x} + Q_3\frac{\partial u_3}{\partial x} = P_1\left(K_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x} + K_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x} + K_{13}\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)$$
$$+ P_2\left(K_{21}\frac{\partial u_1}{\partial x} + K_{22}\frac{\partial u_2}{\partial x} + K_{23}\frac{\partial u_3}{\partial x}\right) + P_3\left(K_{31}\frac{\partial u_1}{\partial x} + K_{32}\frac{\partial u_2}{\partial x} + K_{33}\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)$$
$$= a^2\left[P_1\frac{\partial x}{\partial u_1} + P_2\frac{\partial x}{\partial u_2} + P_3\frac{\partial x}{\partial u_3}\right]$$

d'où

$$(16')\quad a^2 U = Q_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + Q_2\frac{\partial u_2}{\partial x} + Q_3\frac{\partial u_3}{\partial x}.$$

De même on aura

$$(16'')\quad b^2 V = Q_1\frac{\partial u_1}{\partial y} + Q_2\frac{\partial u_2}{\partial y} + Q_3\frac{\partial u_3}{\partial y},$$

$$(16''')\quad c^2 W = Q_1\frac{\partial u_1}{\partial z} + Q_2\frac{\partial u_2}{\partial z} + Q_3\frac{\partial u_3}{\partial z}.$$

6. Nous venons de transformer les équations de LAMÉ en suivant la méthode ordinaire, c'est a dire en reconduisant la question par les principes du calcul des variations à la transformation d'une intégrale. On peut faire la transformation par un autre procédé très simple que je vais exposer en peu de mots.

Soit σ une surface quelconque dont le bord est formé par la ligne s et soit n la normale à cette surface. Désignons par λ et μ des coordonnées curvilignes des points de la surface. En multipliant les équations (1), (2) par

$$\cos nx\, d\sigma = \frac{d(y,z)}{d(\lambda,\mu)} d\lambda\, d\mu,$$

$$\cos ny\, d\sigma = \frac{d(z,x)}{d(\lambda,\mu)} d\lambda\, d\mu,$$

$$\cos nz\, d\sigma = \frac{d(x,y)}{d(\lambda,\mu)} d\lambda\, d\mu$$

et en intégrant sur toute la surface σ, on trouve par le théorème de STOKES

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_\sigma \left[\mathrm{U}\frac{d(y,z)}{d(\lambda,\mu)} + \mathrm{V}\frac{d(z,x)}{d(\lambda,\mu)} + \mathrm{W}\frac{d(x,y)}{d(\lambda,\mu)} \right] d\lambda\, d\mu \\ &\qquad = \int_s (u dx + v dy + w dz), \\ &\frac{d^2}{dt^2}\int_\sigma \left[u\frac{d(y,z)}{d(\lambda,\mu)} + v\frac{d(z,x)}{d(\lambda,\mu)} + w\frac{d(x,y)}{d(\lambda,\mu)} \right] d\lambda\, d\mu \\ &\qquad = \int_s (a^2\mathrm{U}dx + b^2\mathrm{V}dy + c^2\mathrm{W}dz). \end{aligned}\right.$$

Si nous posons

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{U} &= \mathrm{P}_1 \frac{\partial x}{\partial u_1} + \mathrm{P}_2 \frac{\partial x}{\partial u_2} + \mathrm{P}_3 \frac{\partial x}{\partial u_3}, \\ \mathrm{V} &= \mathrm{P}_1 \frac{\partial y}{\partial u_1} + \mathrm{P}_2 \frac{\partial y}{\partial u_2} + \mathrm{P}_3 \frac{\partial y}{\partial u_3}, \\ \mathrm{W} &= \mathrm{P}_1 \frac{\partial z}{\partial u_1} + \mathrm{P}_2 \frac{\partial z}{\partial u_2} + \mathrm{P}_3 \frac{\partial z}{\partial u_3}, \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} u &= p_1 \frac{\partial x}{\partial u_1} + p_2 \frac{\partial x}{\partial u_2} + p_3 \frac{\partial x}{\partial u_3}, \\ v &= p_1 \frac{\partial y}{\partial u_1} + p_2 \frac{\partial y}{\partial u_2} + p_3 \frac{\partial y}{\partial u_3}, \\ w &= p_1 \frac{\partial z}{\partial u_1} + p_2 \frac{\partial z}{\partial u_2} + p_3 \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{aligned}\right.$$

il est évident qu'on trouve

$$\begin{aligned} &\mathrm{U}\frac{d(y,z)}{d(\lambda,\mu)} + \mathrm{V}\frac{d(z,x)}{d(\lambda,\mu)} + \mathrm{W}\frac{d(x,y)}{d(\lambda,\mu)} \\ &\quad = \mathrm{D}\left[\mathrm{P}_1 \frac{d(u_2,u_3)}{d(\lambda,\mu)} + \mathrm{P}_2 \frac{d(u_3,u_1)}{d(\lambda,\mu)} + \mathrm{P}_3 \frac{d(u_1,u_2)}{d(\lambda,\mu)} \right], \\ &u\frac{d(y,z)}{d(\lambda,\mu)} + v\frac{d(z,x)}{d(\lambda,\mu)} + w\frac{d(x,y)}{d(\lambda,\mu)} \\ &\quad = \mathrm{D}\left[p_1 \frac{d(u_2,u_3)}{d(\lambda,\mu)} + p_2 \frac{d(u_3,u_1)}{d(\lambda,\mu)} + p_3 \frac{d(u_1,u_2)}{d(\lambda,\mu)} \right]. \end{aligned}$$

Examinons les deux formes quadratiques

$$\begin{aligned} 2f &= u^2 + v^2 + w^2 \\ &= \mathrm{H}_{11} p_1^2 + \mathrm{H}_{22} p_2^2 + \mathrm{H}_{33} p_3^2 + 2\mathrm{H}_{23} p_2 p_3 + 2\mathrm{H}_{31} p_3 p_1 + 2\mathrm{H}_{12} p_1 p_2, \end{aligned}$$

$$2\varphi = a^2 U^2 + b^2 V^2 + c^2 W^2$$
$$= K_{11} P_1^2 + K_{22} P_2^2 + K_{33} P_3^2 + 2 K_{23} P_2 P_3 + 2 K_{31} P_3 P_1 + 2 K_{12} P_1 P_2 .$$

Par des théorèmes bien connus on aura

$$\frac{\partial f}{\partial u} dx + \frac{\partial f}{\partial v} dy + \frac{\partial f}{\partial w} dz = \frac{\partial f}{\partial p_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial p_2} du_2 + \frac{\partial f}{\partial p_3} du_3 ,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial U} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial V} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial W} dz = \frac{\partial \varphi}{\partial P_1} du_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial P_2} du_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial P_3} du_3 .$$

Par suite, en posant

$$\frac{\partial f}{\partial p_1} = q_1 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial p_2} = q_2 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial p_3} = q_3 ,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial P_1} = Q_1 \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial P_2} = Q_2 \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial P_3} = Q_3 ,$$

on trouvera

$$u dx + v dy + w dz = q_1 du_1 + q_2 du_2 + q_3 du_3 ,$$

$$a^2 U dx + b^2 V dy + c^2 W dz = Q_1 du_1 + Q_2 du_2 + Q_3 du_3 .$$

On pourra donc substituer aux équations (17) les deux équations

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_\sigma D \left[P_1 \frac{d(u_2, u_3)}{d(\lambda, \mu)} + P_2 \frac{d(u_3, u_1)}{d(\lambda, \mu)} + P_3 \frac{d(u_1, u_2)}{d(\lambda, \mu)} \right] d\lambda\, d\mu \\ &\qquad = \int_s (q_1 du_1 + q_2 du_2 + q_3 du) , \\ &\frac{d^2}{dt^2} \int_\sigma D \left[p_1 \frac{d(u_2, u_3)}{d(\lambda, \mu)} + p_2 \frac{d(u_3, u_1)}{d(\lambda, \mu)} + p_3 \frac{d(u_1, u_2)}{d(\lambda, \mu)} \right] d\lambda\, d\mu \\ &\qquad = \int_s (Q_1 du_1 + Q_2 du_2 + Q_3 du_3) . \end{aligned} \right.$$

De ces équations, par le théorème de STOKES découlent tout de suite les équations (10) et (14).

ART. 2. - LES ÉQUATIONS DE LAMÉ ET LEURS ÉQUATIONS CONJUGUÉES.

1. La transformation des équations de LAMÉ en coordonnées curvilignes nous a conduit aux équations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & D \frac{\partial^2 p_s}{\partial t^2} = \frac{\partial Q_{s+2}}{\partial u_{s+1}} - \frac{\partial Q_{s+1}}{\partial u_{s+2}} , \\ & Q_i = \Sigma_s K_{is} P_s , \\ & P_s = \frac{1}{D} \left(\frac{\partial q_{s+1}}{\partial u_{s+2}} - \frac{\partial q_{s+2}}{\partial u_{s+1}} \right) , \\ & q_i = \Sigma_s H_{is} p_s . \end{aligned} \right. \qquad (s = 1, 2, 3)$$

Posons

$$m_s = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial Q_{s+1}}{\partial u_{s+2}} - \frac{\partial Q_{s+2}}{\partial u_{s+1}}\right):$$

on aura

$$\frac{\partial^2 p_s}{\partial t^2} = -m_s.$$

Par conséquent, si

$$\Sigma_s H_{is} m_s = n_i,$$

on trouvera

$$\frac{\partial^2 q_i}{\partial t^2} = -n_i,$$

d'où

$$D\frac{\partial^2 P_s}{\partial t^2} = \frac{\partial n_{s+2}}{\partial u_{s+1}} - \frac{\partial n_{s+1}}{\partial u_{s+2}}.$$

En remplaçant P_s par M_s, et Q_s par N_s on pourra écrire le système d'équations

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &D\frac{\partial^2 M_s}{\partial t^2} = \frac{\partial n_{s+2}}{\partial u_{s+1}} - \frac{\partial n_{s+1}}{\partial u_{s+2}},\\ &n_i = \Sigma_s H_{is} m_s,\\ &m_s = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial N_{s+1}}{\partial u_{s+2}} - \frac{\partial N_{s+2}}{\partial u_{s+1}}\right),\\ &N_i = \Sigma_s K_{is} M_s. \end{aligned}\right. \qquad (s = 1, 2, 3)$$

2. Lorsqu'on connait un système d'intégrales

$$p_s, P_s, q_s, Q_s$$

des équations (1) on aura tout de suite des intégrales des équations (2).

Il suffit pour cela de prendre

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &M_s = P_s \quad , \quad N_s = Q_s,\\ &m_s = -\frac{\partial^2 p_s}{\partial t^2} \quad , \quad n_s = -\Sigma_i H_{is}\frac{\partial^2 p_i}{\partial t^2}. \end{aligned}\right.$$

Réciproquement à toute intégrale des équations (2) correspond une intégrale du système (1). En effet en prenant

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &p_s = m_s \quad , \quad q_s = n_s,\\ &P_s = -\frac{\partial^2 M_s}{\partial t^2} \quad , \quad Q_s = -\Sigma_i K_{is}\frac{\partial^2 M_i}{\partial t^2} \end{aligned}\right.$$

on aura que ces fonctions satisfont aux équations (1).

3. On peut maintenant poser la question:

A quelles intégrales

$$p_s, q_s, P_s, Q_s$$

des équations (1) correspondent des intégrales

$$m_s, n_s, M_s, N_s$$

du système (2) telles que les relations (4) soient vérifiées?

Il est facile de démontrer qu'il suffit de la condition

$$(5)\qquad \frac{\partial(\mathrm{D}p_1)}{\partial u_1}+\frac{\partial(\mathrm{D}p_2)}{\partial u_2}+\frac{\partial(\mathrm{D}p_3)}{\partial u_3}=0$$

pour que les équations (4) soient satisfaites.

En effet, il ressort de (5) que l'on pourra poser

$$p_s=m_s=\frac{1}{\mathrm{D}}\left(\frac{\partial \mathrm{N}_{s+1}}{\partial u_{s+2}}-\frac{\partial \mathrm{N}_{s+2}}{\partial u_{s+1}}\right),$$

d'où découlent les équations (4). De même à tout système d'intégrales

$$m_s\,,\,n_s\,,\,\mathrm{M}_s\,,\,\mathrm{N}_s$$

des équations (2) telles que

$$(6)\qquad \frac{\partial(\mathrm{DM}_1)}{\partial u_1}+\frac{\partial(\mathrm{DM}_2)}{\partial u_2}+\frac{\partial(\mathrm{DM}_3)}{\partial u_3}=0$$

correspond un système d'intégrales des équations (1) lié au précédent par les relations (3).

4. Il est aisé de démontrer que si l'équation (5) est vérifiée les vibrations sont transversales.

En effet soit

$$\Theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}.$$

En multipliant cette quantité par une fonction λ indéterminée et en intégrant sur un espace S quelconque, on trouve

$$\int_{\mathrm{S}}\lambda\Theta\,dx\,dy\,dz=-\int_{\mathrm{S}}\left(u\frac{\partial\lambda}{\partial x}+v\frac{\partial\lambda}{\partial y}+w\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)d\mathrm{S},$$

λ étant nulle au contour de l'espace S. Mais

$$u\frac{\partial\lambda}{\partial x}+v\frac{\partial\lambda}{\partial y}+w\frac{\partial\lambda}{\partial z}=p_1\frac{\partial\lambda}{\partial u_1}+p_2\frac{\partial\lambda}{\partial u_2}+p_3\frac{\partial\lambda}{\partial u_3}.$$

Par suite

$$\int_{\mathrm{S}}\lambda\Theta\,dx\,dy\,dz=-\int_{\mathrm{S}}\left(p_1\frac{\partial\lambda}{\partial u_1}+p_2\frac{\partial\lambda}{\partial u_2}+p_3\frac{\partial\lambda}{\partial u_3}\right)\mathrm{D}du_1\,du_2\,du_3.$$

D'où

$$\int_{\mathrm{S}}\lambda\Theta\,dx\,dy\,dz=\int_{\mathrm{S}}\lambda\left(\frac{\partial(\mathrm{D}p_1)}{\partial u_1}+\frac{\partial(\mathrm{D}p_2)}{\partial u_2}+\frac{\partial(\mathrm{D}p_3)}{\partial u_3}\right)\frac{1}{\mathrm{D}}\,dx\,dy\,dz.$$

Puisque λ est indéterminée, on déduit

$$\Theta=\frac{1}{\mathrm{D}}\left[\frac{\partial(\mathrm{D}p_1)}{\partial u_1}+\frac{\partial(\mathrm{D}p_2)}{\partial u_2}+\frac{\partial(\mathrm{D}p_3)}{\partial u_3}\right].$$

5. Nous appellerons les équations (2) les équations conjuguées aux équations de LAMÉ. Il est connu que les équations de LAMÉ se rapportent

à l'hypothèse de NEUMANN. C'est à dire pour trouver ces équations il faut supposer que les vibrations des particules du milieu élastique ont lieu dans le plan de polarisation. FRESNEL au contraire a supposé que la direction des vibrations soit normale au plan de polarisation. Il serait aisé de voir que les équations (2) sont les équations du mouvement dans l'hypothèse de FRESNEL. Il suffit pour cela de supposer que $\sqrt{H_{11}}\,M_1$, $\sqrt{H_{22}}\,M_2$, $\sqrt{H_{33}}\,M_3$ représentent les composantes des déplacements dans les directions t_1, t_2, t_3

ART. 3. – LES COORDONNÉES DE WEBER. TRANSFORMATIONS DES ÉQUATIONS DE LAMÉ EN COORDONNÉES DE WEBER.

1. M. WEBER a démontré que si l'on a

$$\text{(1)}\qquad \begin{cases} x = b \operatorname{sn}(u_2, k) \operatorname{dn}(u_3, \mu), \\ y = a \operatorname{cn}(u_2, k) \operatorname{cn}(u_3, \mu), \\ z = a \operatorname{dn}(u_2, k) \operatorname{sn}(u_3, \mu), \end{cases}$$

où

$$k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}\ , \qquad \mu^2 = \frac{a^2}{b^2}\,\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}\,,$$

on obtient par l'élimination de u_2, u_3

$$\text{(2)}\qquad \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2 - a^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2 - b^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2 - c^2} = 1,$$

qui est l'équation de la surface des ondes (4).

Au lieu de

$$\begin{matrix} \operatorname{sn}(u_2, k) & , & \operatorname{cn}(u_2, k) & , & \operatorname{dn}(u_2, k), \\ \operatorname{sn}(u_3, \mu) & , & \operatorname{cn}(u_3, \mu) & , & \operatorname{dn}(u_3, \mu) \end{matrix}$$

nous écrirons, pour simplifier,

$$\begin{matrix} \operatorname{sn} u_2 & , & \operatorname{cn} u_2 & , & \operatorname{dn} u_2, \\ \operatorname{sn} u_3 & , & \operatorname{cn} u_3 & , & \operatorname{dn} u_3, \end{matrix}$$

en supprimant les modules (k, μ) suffisamment rappelés par les indices des arguments u_2, u_3. Soit $4K$ la période réelle corréspondant au module k; $4L$ la même période correspondant au module μ.

En donnant à u_2 toutes les valeurs réelles comprises entre $-K$ et K et à u_3 toutes les valeurs réelles comprises entre $-2L$ et $2L$, on obtient par les formules (1) tous les points de la nappe extérieure de la surface des ondes qu'on appellera σ'.

2. Examinons maintenant comment sont disposées les lignes

$$u_2 = \text{const.} \quad , \quad u_3 = \text{const.}$$

sur σ'.

(4) « Journal de Crelle ». T. 84, page 353.

Conduisons par l'origine les parallèles T_1, T_2 aux axes optiques. Elles découpent le plan xz en quatre parties qui contiennent respectivement les parties positives et négatives des axes x, z. Nous les désignerons par ω_x, ω_{-x}, ω_z, ω_{-z}.

En faisant $u_2 = -K$, on trouve

$$x = -b \,\mathrm{dn}\, u_2 \quad , \; y = 0 \quad , \quad z = b\mu \,\mathrm{sn}\, u_3 .$$

Cette ligne est la partie de l'intersection du plan xz avec σ' comprise dans ω_{-x}. De même on voit que la ligne $u_2 = K$ est la partie de la même intersection comprise dans ω_x. Les lignes

$$u_3 = -L \quad , \quad u_3 = L$$

sont les parties de l'intersection de σ' avec le plan xz comprises dans ω_{-z} et ω_z.

Ajoutons les équations (1) après en avoir élevé les deux membres au carré. On obtient

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 - (a^2 - b^2)\,\mathrm{sn}^2\, u_2 . \tag{3}$$

L'intersection de σ' avec la sphère (3) est formée de deux courbes situées des deux côtés du plan yz. Si la courbe qui est du côté des x positives correspond à $u_2 = a_2$, on aura

$$K > a_2 > 0.$$

L'autre courbe correspondra alors à

$$u_2 = -a_2 .$$

De même on trouve

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = a^2 [b^2 - (b^2 - c^2)\,\mathrm{sn}^2\, u_3]. \tag{4}$$

Considérons les deux plans xz, xy. Ils partagent l'espace en quatre parties que nous désignerons par

$$S_{y,z} \, , \, S_{-y,z} \, , \, S_{y,-z} \, , \, S_{-y,-z} \tag{5}$$

en mettant en évidence le signe des coordonnées y, z de leurs points.

L'intersection de l'ellipsoïde (4) avec σ' est formée de deux courbes qui sont situées des deux côtés du plan xy et dont chacune est coupée par le plan xz.

On pourra donc considérer les quatre parties $L_{y,z}$, $L_{-y,z}$, $L_{y,-z}$, $L_{-y,-z}$ de cette intersection qui sont contenues dans les quatre parties (5) de l'espace.

Si $L_{y,z}$ correspond à $u_3 = a_3$, on aura

$$L \geq a_3 \geq 0$$

et

$L_{-y,z}$ correspondra à $u_3 = 2L - a_3$,

$L_{y,-z}$ correspondra à $u_3 = -a_3$,

$L_{-y,-z}$ correspondra à $u_3 = 2L + a_3$.

On tire de là que u_2 considérée comme fonction des points de la surface σ' est continue, tandis que u_3 est discontinue le long des lignes $u_2 = -K$, $u_2 = K$. La somme des valeurs de u_3 des deux côtés de ces lignes est toujours égale à $2L$. u_3 est aussi discontinue le long de la partie Λ de l'intersection du plan xy avec σ' qui est du côté des y négatives. La différence des valeurs de u_3 le long de la ligne Λ est constante et égale à $4L$.

Par conséquent les fonctions elliptiques

$$\operatorname{sn} u_2 , \operatorname{cn} u_2 , \operatorname{dn} u_2 , \operatorname{sn} u_3 , \operatorname{dn} u_3 \tag{6}$$

seront continues sur la surface σ', mais

$$\operatorname{cn} u_3$$

sera discontinue le long des lignes $u_2 = K$, $u_2 = -K$. Ses valeurs sur les deux côtés de ces lignes seront égales et de signe contraire.

3. Posons maintenant

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= bu_1 \operatorname{sn} u_2 \operatorname{dn} u_3 , \\ y &= au_1 \operatorname{cn} u_2 \operatorname{cn} u_3 , \\ z &= au_1 \operatorname{dn} u_2 \operatorname{sn} u_3 , \end{aligned} \right. \qquad (8) \quad \left\{ \begin{aligned} \infty &> u_1 \geqq 0 , \\ K &\geqq u_2 \geqq -K , \\ 2L &\geqq u_3 > -2L . \end{aligned} \right.$$

Les surfaces

$$u_1 = \text{const.}$$

seront les nappes extérieures d'un système de surfaces des ondes concentriques et homothétiques. Les surfaces

$$u_2 = \text{const.} \quad , \quad u_3 = \text{const.}$$

seront des cônes dont le sommet est à l'origine, et dont les directrices sont les lignes $u_2 = \text{const.}$, $u_3 = \text{const.}$, que nous avons déjà examinées sur la surface σ'. Les fonctions elliptiques (6), considérées comme fonctions des points de l'espace, seront continues, tandis que $\operatorname{cn} u_3$ sera discontinue le long des parties ω_x, ω_{-x} du plan xz.

4. A tout système de valeurs de x , y , z (excepté si $y = 0$) correspond un seul système de valeurs pour u_1 , u_2 , u_3 qui satisfont aux conditions (7), (8). On appellera ces valeurs les coordonnées de WEBER du point x , y , z.

De même si l'on a deux points $A_1 \equiv (x_1 , y_1 , z_1)$ et $A_2 \equiv (x_2 , y_2 , z_2)$ nous poserons

$$x_2 - x_1 = x \quad , \quad y_2 - y_1 = y \quad , \quad z_2 - z_1 = z .$$

Le système des valeurs de u_1 , u_2 , u_3 qui vérifient les conditions (7), (8) seront les coordonnées de WEBER du point A_2 par rapport au point A_1.

Il est aisé de voir que les coordonnées de WEBER du point A_1 par rapport au point A_2, seront

$$u_1 , -u_2 , -2L + u_3$$

si $u_3 > 0$, et

$$u_1\,,\ -u_2\,,\ 2\mathrm{L}+u_3\,,$$

si $u_3 \leqq 0$.

Calculons le carré de l'élément linéaire de l'espace en fonctions des coordonnées u_1, u_2, u_3.

On trouve par un calcul très simple

$$(9)\quad \begin{cases} \mathrm{H}_{11} = a^2\,\mathrm{cn}^2\,u_2 + b^2\,\mathrm{sn}^2\,u_2\,, \\ \mathrm{H}_{22} = u_1^2\,[(a^2-b^2)\,\mathrm{sn}^2\,u_2\,\mathrm{dn}^2\,u_2 + b^2 - b^2\,k^2\,\mathrm{sn}^2\,u_2 - b^2\,\mu^2\,\mathrm{sn}^2\,u_3]\,, \\ \mathrm{H}_{33} = a^2\,u_1^2\,[1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\,u_2 - \mu^2\,\mathrm{sn}^2\,u_3 + (\mu^2+k^2-1)\,\mathrm{sn}^2\,u_2\,\mathrm{sn}^2\,u_3]\,, \\ \mathrm{H}_{12} = u_1\,(b^2-a^2)\,\mathrm{sn}\,u_2\,\mathrm{cn}\,u_2\,\mathrm{dn}\,u_2\,, \\ \mathrm{H}_{23} = \mathrm{H}_{31} = 0\,, \end{cases}$$

d'où

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} \mathrm{H}_{11}\,,\ \mathrm{H}_{12}\,,\ \mathrm{H}_{13} \\ \mathrm{H}_{21}\,,\ \mathrm{H}_{22}\,,\ \mathrm{H}_{23} \\ \mathrm{H}_{31}\,,\ \mathrm{H}_{32}\,,\ \mathrm{H}_{33} \end{vmatrix}^{1/2}$$

$$= a^2\,b\,u_1^2\,[1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\,u_2 - \mu^2\,\mathrm{sn}^2\,u_3 + (\mu^2+k^2-1)\,\mathrm{sn}^2\,u_2\,\mathrm{sn}^2\,u_3]\,.$$

5. Pour établir les équations de LAMÉ en coordonnées de WEBER, il suffit de calculer les quantités K_{is}.

On obtient

$$(10)\quad \begin{cases} \mathrm{K}_{11} = a^2\,[b^2\,\mathrm{cn}^2\,u_3 + c^2\,\mathrm{sn}^2\,u_3]\,, \\ \mathrm{K}_{22} = a^2\,b^2\,u_1^2\,[1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\,u_2 - \mu^2\,\mathrm{sn}^2\,u_3 + (\mu^2+k^2-1)\,\mathrm{sn}^2\,u_2\,\mathrm{sn}^2\,u_3]\,, \\ \mathrm{K}_{33} = a^2\,u_1^2\,[(b^2-c^2)\,\mathrm{sn}^2\,u_3\,\mathrm{dn}^2\,u_3 + c^2 - c^2\,k^2\,\mathrm{sn}^2\,u_2 - c^2\,\mu^2\,\mathrm{sn}^2\,u_3]\,, \\ \mathrm{K}_{13} = a^2\,u_1\,(c^2-b^2)\,\mathrm{sn}\,u_3\,\mathrm{cn}\,u_3\,\mathrm{dn}\,u_3\,, \\ \mathrm{K}_{23} = \mathrm{K}_{12} = 0\,. \end{cases}$$

En posant

$$(11)\qquad \Delta = 1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\,u_2 - \mu^2\,\mathrm{sn}^2\,u_3 + (\mu^2+k^2-1)\,\mathrm{sn}^2\,u_2\,\mathrm{sn}^2\,u_3\,,$$

on aura

$$(12)\qquad \mathrm{H}_{33} = a^2\,u_1^2\,\Delta \quad , \quad \mathrm{D} = a^2\,b\,u_1^2\,\Delta \quad , \quad \mathrm{K}_{22} = a^2\,b^2\,u_1^2\,\Delta\,.$$

6. Si au lieu des équations (7) on pose les équations

$$(13)\quad \begin{cases} x = c\bar{u}_1\,\mathrm{sn}\,(\bar{u}_3\,,\,\bar{\mu})\,\mathrm{dn}\,(\bar{u}_2\,,\,\bar{k})\,, \\ y = c\bar{u}_1\,\mathrm{cn}\,(\bar{u}_3\,,\,\bar{\mu})\,\mathrm{cn}\,(\bar{u}_2\,,\,\bar{k})\,, \\ z = b\bar{u}_1\,\mathrm{dn}\,(\bar{u}_3\,,\,\bar{\mu})\,\mathrm{sn}\,(\bar{u}_2\,,\,\bar{k})\,, \end{cases}$$

où

$$\bar{\mu}^2 = \frac{c^2}{b^2}\,\frac{b^2-a^2}{c^2-a^2}\,, \qquad \bar{k}^2 = \frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}\,,$$

on obtient tous les points de l'espace en donnant à $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ toutes les valeurs réelles, telles que

$$(14) \qquad \begin{cases} \infty > \bar{u}_1 \geqq 0, \\ \bar{K} \geqq \bar{u}_2 \geqq -\bar{K}, \\ 2\bar{L} \geqq \bar{u}_3 > -2\bar{L}, \end{cases}$$

$4\bar{K}$ et $4\bar{L}$ étant les périodes réelles correspondantes aux modules $\bar{k}, \bar{\mu}$. Les surfaces $\bar{u}_1 =$ const. sont les nappes intérieures d'un système de surfaces des ondes concentriques et homothétiques, auxquelles appartient la surface (2). Les surfaces $\bar{u}_2 =$ const., $\bar{u}_3 =$ const. sont des cônes dont le sommet est à l'origine et dont les directrices sont des lignes sphériques et elliptiques de ces nappes.

Il est facile de vérifier que, si les conditions (13), (14) sont remplies,

$$\mathrm{sn}\,\bar{u}_2, \ \mathrm{cn}\,\bar{u}_2, \ \mathrm{dn}\,\bar{u}_2, \ \mathrm{sn}\,\bar{u}_3, \ \mathrm{dn}\,\bar{u}_3$$

sont des fonctions continues des points de l'espace, tandis que

$$\mathrm{cn}\,\bar{u}_3$$

est discontinue le long des parties ω_z, ω_{-z} du plan xz, puisque cette quantité prend des valeurs égales et de signes contraires sur les deux côtés de ces surfaces.

A tout système de valeurs de x, y, z (excepté si $y = 0$) correspond un seul système de valeurs de $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ qui vérifient les conditions (13), (14). Nous appellerons ces valeurs les coordonnées de WEBER de la 2[de] espèce du point $A \equiv (x, y, z)$. En posant

$$x = x_2 - x_1 \quad , \quad y = y_2 - y_1 \quad , \quad z = z_2 - z_1,$$

u_1, u_2, u_3 seront les coordonnées de WEBER de la 2[de] espèce du point $A_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ par rapport au point $A_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$.

7. Pour transformer les équations de LAMÉ en coordonnées $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$, il suffit de calculer les quantités H_{is}, K_{is} par rapport à ces variables. Nous les désignerons par $\bar{H}_{is}, \bar{K}_{is}$. En posant

$$(15) \qquad \bar{\Delta} = 1 - \bar{k}^2 \,\mathrm{sn}^2 \bar{u}_2 - \bar{\mu}^2 \,\mathrm{sn}^2 \bar{u}_3 + (\bar{\mu}^2 + \bar{k}^2 - 1)\,\mathrm{sn}^2 \bar{u}_2 \,\mathrm{sn}^2 \bar{u}_3$$

on trouve

$$(16) \qquad \bar{H}_{22} = c^2 \bar{u}_1^2 \bar{\Delta} \quad , \quad \bar{D} = c^2 b \bar{u}_1^2 \bar{\Delta} \quad , \quad \bar{K}_{33} = c^2 b^2 \bar{u}_1^2 \bar{\Delta},$$

$$(17) \qquad \bar{H}_{23} = \bar{H}_{31} = \bar{K}_{23} = \bar{K}_{12} = 0.$$

ART. 4. - LES INTÉGRALES DE LAMÉ.

1. On peut trouver bien facilement deux intégrales des équations de LAMÉ, après les avoir transformées en coordonnées de WEBER.

Examinons d'abord ce qu'on trouve en prenant les coordonnées de WEBER de première espèce.

Les équations de LAMÉ seront vérifiées par les valeurs

$$p_1 = 0 \quad , \quad p_2 = 0.$$

En effet en rappellant les équations (1) du 2ème article et les équations (9) de l'article précédent, on trouve

$$q_1 = 0 \quad , \quad q_2 = 0 \quad , \quad q_3 = H_{33} p_3 ,$$

$$P_1 = -\frac{1}{D}\frac{\partial q_3}{\partial u_2} \quad , \quad P_2 = \frac{1}{D}\frac{\partial q_3}{\partial u_1} \quad , \quad P_3 = 0,$$

$$Q_1 = -\frac{K_{11}}{D}\frac{\partial q_3}{\partial u_2} \quad , \quad Q_2 = \frac{K_{22}}{D}\frac{\partial q_3}{\partial u_1} = b\frac{\partial q_3}{\partial u_1} \quad , \quad Q_3 = -\frac{K_{13}}{D}\frac{\partial q_3}{\partial u_2},$$

$$D p_3 = b q_3 .$$

Par suite les équations de LAMÉ se réduisent aux suivantes

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial u_2}\left[-\frac{K_{13}}{D}\frac{\partial q_3}{\partial u_2}\right] - b\frac{\partial^2 q_3}{\partial u_1 \partial u_3}, \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial u_3}\left[-\frac{K_{11}}{D}\frac{\partial q_3}{\partial u_2}\right] - \frac{\partial}{\partial u_1}\left[\frac{K_{13}}{D}\frac{\partial q_3}{\partial u_2}\right], \\ b\frac{\partial^2 q_3}{\partial t^2} &= b\frac{\partial^2 q_3}{\partial u_1^2} - \frac{\partial}{\partial u_2}\left[-\frac{K_{11}}{D}\frac{\partial q_3}{\partial u_2}\right]. \end{aligned} \right.$$

Supposons q_3 fonction de t et de u_1 seulement. Les deux premières équations (1) seront satisfaites; la troisième deviendra

$$\frac{\partial^2 q_3}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 q_3}{\partial u_1^2}$$

dont l'intégrale générale est

$$q_3 = f(t + u_1) + \varphi(t - u_1),$$

f, φ étant deux fonctions arbitraires. On a donc l'intégrale suivante des équations de LAMÉ

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & q_1 = 0 \quad , \quad q_2 = 0 \quad , \quad q_3 = f(t+u_1) + \varphi(t-u_1), \\ & p_1 = 0 \quad , \quad p_2 = 0 \quad , \quad p_3 = \frac{1}{a^2 u_1^2 \Delta}[f(t+u_1) + \varphi(t-u_1)], \\ & Q_1 = 0 \quad , \quad Q_2 = b[f'(t+u_1) - \varphi'(t-u_1)] \quad , \quad Q_3 = 0, \\ & P_1 = 0 \quad , \quad P_2 = \frac{1}{a^2 b u_1^2 \Delta}[f'(t+u_1) - \varphi'(t-u_1)] \quad , \quad P_3 = 0 \end{aligned} \right.$$

où Δ a la valeur (11), art. 3.

2. En rappelant les équations (15) du premier article on trouve

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{\partial u_3}{\partial x}[f(t+u_1) + \varphi(t-u_1)], \\ v &= \frac{\partial u_3}{\partial y}[f(t+u_1) + \varphi(t-u_3)], \\ w &= \frac{\partial u_3}{\partial z}[f(t+u_1) + \varphi(t-u_1)]. \end{aligned} \right.$$

Des équations (7) du même article, on déduit aussi les expressions équivalentes

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} u &= -\frac{\mu^2 b \operatorname{sn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{cn} u_3}{a^2 u_1 \Delta}[f(t+u_1)+\varphi(t-u_1)],\\ v &= -\frac{\operatorname{cn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{dn} u_3}{a u_1 \Delta}[f(t+u_1)+\varphi(t-u_1)],\\ w &= \frac{\operatorname{dn} u_2 \operatorname{cn} u_3 \operatorname{dn} u_3}{a u_1 \Delta}[f(t+u_1)+\varphi(t-u_1)]. \end{aligned}\right.$$

Enfin les équations (16) et (11) du premier article conduisent aux formules suivantes

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{U} &= \frac{b}{a^2}\frac{\partial u_2}{\partial x}[f'(t+u_1)-\varphi'(t-u_1)]\\ &= \frac{\operatorname{cn} u_2 \operatorname{dn} u_2 \operatorname{dn} u_3}{a^2 u_1 \Delta}[f'(t+u_1)-\varphi'(t-u_1)],\\ \mathrm{V} &= \frac{1}{b}\frac{\partial u_2}{\partial y}[f'(t+u_1)-\varphi'(t-u_1)]\\ &= \frac{\operatorname{sn} u_2 \operatorname{dn} u_2 \operatorname{cn} u_3}{abu_1 \Delta}[f'(t+u_1)-\varphi'(t-u_1)],\\ \mathrm{W} &= \frac{b}{c^2}\frac{\partial u_2}{\partial z}[f'(t+u_1)-\varphi'(t-u_1)]\\ &= -\frac{k^2 \operatorname{sn} u_2 \operatorname{cn} u_2 \operatorname{sn} u_3}{abu_1 \Delta}[f'(t+u_1)-\varphi'(t-u_1)]. \end{aligned}\right.$$

3. Considérons maintenant les coordonnées de Weber de la seconde espèce. Le procédé par lequel on est parvenu aux intégrales (2) peut être appliqué à ces coordonnées. On trouve ainsi l'intégrale suivante

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\bar{q}_1 = 0, \quad \bar{q}_2 = 0, \quad \bar{q}_3 = \bar{f}(t+\bar{u}_1)+\bar{\varphi}(t-\bar{u}_1),\\ &\bar{p}_1 = 0, \quad \bar{p}_2 = 0, \quad \bar{p}_3 = \frac{1}{c^2 \bar{u}_1^2 \bar{\Delta}}[\bar{f}(t+\bar{u}_1)+\bar{\varphi}(t-\bar{u}_1)],\\ &\bar{\mathrm{Q}}_1 = 0, \quad \bar{\mathrm{Q}}_2 = b[\bar{f}'(t+\bar{u}_1)-\bar{\varphi}'(t-\bar{u}_1)], \quad \bar{\mathrm{Q}}_3 = 0,\\ &\bar{\mathrm{P}}_1 = 0, \quad \bar{\mathrm{P}}_2 = \frac{1}{c^2 b \bar{u}_1^2 \bar{\Delta}}[\bar{f}'(t+\bar{u}_1)-\bar{\varphi}'(t-\bar{u}_1)], \quad \bar{\mathrm{P}}_3 = 0, \end{aligned}\right.$$

$\bar{f}$ et $\bar{\varphi}$ étant des fonctions arbitraires.

On en tire

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x}[\bar{f}(t+\bar{u}_1)+\bar{\varphi}(t-\bar{u}_1)]\\ &= \frac{\operatorname{dn} \bar{u}_2 \operatorname{cn} \bar{u}_3 \operatorname{dn} \bar{u}_3}{c\bar{u}_1 \bar{\Delta}}[\bar{f}(t+\bar{u}_1)+\bar{\varphi}(t-\bar{u}_1)],\\ \bar{v} &= \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial y}[\bar{f}(t+\bar{u}_1)+\bar{\varphi}(t+\bar{u}_1)]\\ &= -\frac{\operatorname{cn} \bar{u}_2 \operatorname{sn} \bar{u}_3 \operatorname{dn} \bar{u}_3}{c\bar{u}_1 \Delta}[\bar{f}(t+\bar{u}_1)+\varphi(t-\bar{u}_1)],\\ \overline{w} &= \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial z}[\bar{f}(t+\bar{u}_1)+\bar{\varphi}(t-\bar{u}_1)]\\ &= -\frac{\bar{\mu}^2 b \operatorname{sn} \bar{u}_2 \operatorname{sn} \bar{u}_3 \operatorname{cn} \bar{u}_3}{c^2 \bar{u}_1 \bar{\Delta}}[\bar{f}(t+\bar{u}_1)+\bar{\varphi}(t-\bar{u}_1)], \end{aligned}\right.$$

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}\overline{\mathrm{U}} &= \frac{b}{a^2}\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial x}[\bar{f}'(t+\bar{u}_1)-\bar{\varphi}'(t-\bar{u}_1)]\\ &= -\frac{\bar{k}^2\,\mathrm{sn}\,\bar{u}_2\,\mathrm{cn}\,\bar{u}_2\,\mathrm{sn}\,\bar{u}_3}{cb\bar{u}_1\,\overline{\Delta}}[\bar{f}'(t+\bar{u}_1)-\bar{\varphi}'(t-\bar{u}_1)],\\ \overline{\mathrm{V}} &= \frac{1}{b}\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial y}[\bar{f}'(t+\bar{u}_1)-\bar{\varphi}'(t-\bar{u}_1)]\\ &= -\frac{\mathrm{sn}\,\bar{u}_2\,\mathrm{dn}\,\bar{u}_2\,\mathrm{cn}\,\bar{u}_3}{cb\bar{u}_1\,\overline{\Delta}}[\bar{f}'(t+\bar{u}_1)-\bar{\varphi}'(t-\bar{u}_1)],\\ \overline{\mathrm{W}} &= \frac{b}{c^2}\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial z}[\bar{f}'(t+\bar{u}_1)-\bar{\varphi}'(t-\bar{u}_1)]\\ &= \frac{\mathrm{cn}\,\bar{u}_2\,\mathrm{dn}\,\bar{u}_2\,\mathrm{dn}\,\bar{u}_3}{c^2\,\bar{u}_1\,\overline{\Delta}}[\bar{f}'(t+\bar{u}_1)-\bar{\varphi}'(t-\bar{u})].\end{aligned}\right.$$

4. Nous avons vu (art. 2) qu'à toute intégrale des équations de Lamé correspond une intégrale des équations conjuguées liée à la précédente par les équations (3) du 2ème article.

On aura donc, en partant des formules (2), (6), les deux intégrales suivantes des équations conjuguées à celles de Lamé:

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned}&\mathrm{M}_1=0\;,\quad \mathrm{M}_2=\frac{1}{a^2bu_1^2\Delta}[\psi(t+u_1)+\chi(t-u_1)]\;,\quad \mathrm{M}_3=0,\\ &\mathrm{N}_1=0\;,\quad \mathrm{N}_2=b[\psi(t+u_1)+\chi(t-u_1)]\;,\quad \mathrm{N}_3=0,\\ &m_1=0\;,\quad m_2=0\;,\quad m_3=\frac{1}{a^2u_1^2\Delta}[\psi'(t+u_1)-\chi'(t-u_1)],\\ &n_1=0\;,\quad n_2=0\;,\quad n_3=\psi'(t+u_1)-\chi'(t-u_1),\end{aligned}\right.$$

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned}&\overline{\mathrm{M}}_1=0\;,\quad \overline{\mathrm{M}}_2=\frac{1}{c^2b\bar{u}_1^2\overline{\Delta}}[\bar{\psi}(t+\bar{u}_1)+\bar{\chi}(t-\bar{u}_1)]\;,\quad \overline{\mathrm{M}}_3=0,\\ &\overline{\mathrm{N}}_1=0\;,\quad \overline{\mathrm{N}}_2=b[\bar{\psi}(t+\bar{u}_1)+\bar{\chi}(t-\bar{u}_1)]\;,\quad \overline{\mathrm{N}}_3=0,\\ &\bar{m}_1=0\;,\quad \bar{m}_2=0\;,\quad \bar{m}_3=\frac{1}{c^2\bar{u}_1^2\overline{\Delta}}[\bar{\psi}'(t+\bar{u}_1)-\bar{\chi}'(t-\bar{u}_1)],\\ &\bar{n}_1=0\;,\quad \bar{n}_2=0\;,\quad \bar{n}_3=\bar{\psi}'(t+\bar{u}_1)-\bar{\chi}'(t-\bar{u}_1),\end{aligned}\right.$$

ψ, χ, $\bar{\psi}$, $\bar{\chi}$ étant des fonctions arbitraires.

De même on sait que des intégrales précédentes on pourrait déduire des intégrales des équations de Lamé. Mais il est aisé de voir qu'en partant des formules (9), (10) on ne trouverait pas de nouvelles intégrales, car on reviendrait aux formules (2), (6).

5. Nous remarquerons enfin que les intégrales des équations de Lamé que nous venons de trouver vérifient la condition (5) de l'article 2 et par suite correspondent à des vibrations transversales.

6. On peut maintenant se poser la question. Est-ce qu'on peut trouver d'autres intégrales des équations de LAMÉ de la forme

$$(11)\quad \begin{cases} u = u_\alpha f(t+u_1) + u_\beta \varphi(t+\bar{u}_1), \\ v = v_\alpha f(t+u_1) + v_\beta \varphi(t+\bar{u}_1), \\ w = w_\alpha f(t+u_1) + w_\beta \varphi(t+\bar{u}_1) \end{cases}$$

où $u_\alpha, v_\alpha, w_\alpha$; $u_\beta, v_\beta, w_\beta$ sont indépendantes de t et $f(\alpha)$ est une fonction arbitraire, tandis que $\varphi(a)$ est une fonction arbitraire ou dépend d'une manière quelconque de $f(a)$?

Si (11) est une intégrale des équations de LAMÉ, on doit trouver par la substitution dans les équations différentielles, trois équations de la forme

$$A_0 f + B_0 \varphi + A_1 f' + B_1 \varphi' + A_2 f'' + B_2 \varphi'' = 0$$

où $A_0, B_0, A_1, B_1, A_2, B_2$ sont des quantités qui ne dépendent pas de t.

Il est aisé de se persuader que ces coefficients doivent être nuls. En effet si cela n'arrivait pas, on aurait

$$\begin{vmatrix} f, & \varphi, & f', & \varphi', & f'', & \varphi'' \\ f', & \varphi', & f'', & \varphi'', & f''', & \varphi''' \\ f'', & \varphi'', & f''', & \varphi''', & f^{\mathrm{IV}}, & \varphi^{\mathrm{IV}} \\ f''', & \varphi''', & f^{\mathrm{IV}}, & \varphi^{\mathrm{IV}}, & f^{\mathrm{V}}, & \varphi^{\mathrm{V}} \\ f^{\mathrm{IV}}, & \varphi^{\mathrm{IV}}, & f^{\mathrm{V}}, & \varphi^{\mathrm{V}}, & f^{\mathrm{VI}}, & \varphi^{\mathrm{VI}} \\ f^{\mathrm{V}}, & \varphi^{\mathrm{V}}, & f^{\mathrm{VI}}, & \varphi^{\mathrm{VI}}, & f^{\mathrm{VII}}, & \varphi^{\mathrm{VII}} \end{vmatrix} = 0.$$

Posons $t + u_1 = \alpha$, $t + \bar{u}_1 = \beta$, on aura $f = f(\alpha)$, $\varphi = \varphi(\beta)$ et l'on pourra regarder α et β comme des variables indépendantes. Mais f est une fonctions arbitraire, par suite le déterminant

$$\begin{vmatrix} \varphi, & \varphi', & \varphi'' \\ \varphi', & \varphi'', & \varphi''' \\ \varphi'', & \varphi''', & \varphi^{\mathrm{IV}} \end{vmatrix}$$

devrait être nul. Donc φ ne serait une fonction arbitraire ni dépendrait de f.

On tire de la que

$$(12)\quad \begin{cases} u_\alpha f(t+u_1), \\ v_\alpha f(t+u_1), \\ w_\alpha f(t+u_1) \end{cases} \quad \text{et} \quad (12')\quad \begin{cases} u_\beta \varphi(t+\bar{u}_1), \\ v_\beta \varphi(t+\bar{u}_1), \\ w_\beta \varphi(t+\bar{u}_1) \end{cases}$$

doivent former deux intégrales des équations de LAMÉ. En prenant les coordonnées de WEBER de la première espèce, à l'intégrale (12) doit correspondre l'intégrale suivante des équations transformées:

$$\begin{cases} p_1 = p_{1\alpha} f(t+u_1), \\ p_2 = p_{2\alpha} f(t+u_1), \\ p_3 = p_{3\alpha} f(t+u_1), \end{cases}$$

où $p_{1\alpha}, p_{2\alpha}, p_{3\alpha}$ sont des quantités qui ne dépendent pas de t. En remarquant que

$$H_{13} = H_{23} = K_{12} = K_{23} = 0$$

on trouve

$$\left\{\begin{aligned} q_1 &= (H_{11} p_{1\alpha} + H_{12} p_{2\alpha}) f = q_{1\alpha} f, \\ q_2 &= (H_{21} p_{1\alpha} + H_{22} p_{2\alpha}) f = q_{2\alpha} f, \\ q_3 &= H_{33} p_{3\alpha} f = q_{3\alpha} f, \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{D}\left(\frac{\partial q_{2\alpha}}{\partial u_3} - \frac{\partial q_{3\alpha}}{\partial u_2}\right) f = P_{1\alpha} f, \\ P_2 &= \frac{1}{D}\left(\frac{\partial q_{3\alpha}}{\partial u_1} - \frac{\partial q_{1\alpha}}{\partial u_3}\right) f + \frac{q_{3\alpha}}{D} f' = P_{2\alpha} f + \frac{q_{3\alpha}}{D} f', \\ P_3 &= \frac{1}{D}\left(\frac{\partial q_{1\alpha}}{\partial u_2} - \frac{\partial q_{2\alpha}}{\partial u_1}\right) f - \frac{q_{2\alpha}}{D} f' = P_{3\alpha} f - \frac{q_{2\alpha}}{D} f', \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} Q_1 &= (K_{11} P_{1\alpha} + K_{13} P_{3\alpha}) f - \frac{1}{D} K_{13} q_{2\alpha} f' = Q_{1\alpha} f - \frac{K_{13}}{D} q_{2\alpha} f', \\ Q_2 &= K_{22} P_{2\alpha} f + \frac{1}{D} K_{22} q_{3\alpha} f' = Q_{2\alpha} f + \frac{K_{22}}{D} q_{3\alpha} f', \\ Q_3 &= (K_{31} P_{1\alpha} + K_{33} P_{3\alpha}) f - \frac{1}{D} K_{33} q_{2\alpha} f' = Q_{3\alpha} f - \frac{K_{33}}{D} q_{2\alpha} f', \end{aligned}\right.$$

$$D p_{1\alpha} f'' + \left(\frac{\partial Q_{2\alpha}}{\partial u_3} - \frac{\partial Q_{3\alpha}}{\partial u_2}\right) f + \left[\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{K_{33}}{D} q_{2\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{K_{22}}{D} q_{3\alpha}\right)\right] f' = 0,$$

$$\left(D p_{2\alpha} - \frac{K_{33}}{D} q_{2\alpha}\right) f'' + \left(\frac{\partial Q_{3\alpha}}{\partial u_1} - \frac{\partial Q_{1\alpha}}{\partial u_3}\right) f + \left[\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{K_{13}\, q_{2\alpha}}{D}\right) - \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{K_{33}\, q_{2\alpha}}{D}\right)\right] f' = 0,$$

$$\left(D p_{3\alpha} - \frac{K_{22}}{D} q_{3\alpha}\right) f'' + \left(\frac{\partial Q_{1\alpha}}{\partial u_2} - \frac{\partial Q_{2\alpha}}{\partial u_1}\right) f - \left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{K_{22}\, q_{3\alpha}}{D}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{K_{13}\, q_{2\alpha}}{D}\right)\right] f' = 0.$$

Puisque f est une fonction arbitraire, il faudra égaler à zéro les coefficients de f'', f', f.

Par suite on aura

$$q_{1\alpha} = 0 \quad , \quad q_{2\alpha} = 0 \quad , \quad q_{3\alpha} = \text{const.}$$

On revient donc aux intégrales qu'on a déjà trouvées.

De même on aurait un résultat tout à fait semblable, en partant des intégrales (12′).

Il n'y a donc que les intégrales que nous avons trouvées dans les paragraphes précédents de cet article qui aient la forme (11).

Art. 5. – Propriétés des intégrales de Lamé.

1. En se rappelant la discussion que nous avons faite dans l'article 3, il est aisé de voir que la deuxième des fonctions (4) (voir l'art. précédent) est une fonction continue des points de l'espace, tandis que la première et la troisième de ces fonctions sont discontinues le long des surfaces ω_x et ω_{-x}.

Substituons dans les seconds membres des équations (4) aux quantités u_1, u_2, u_3 leurs expressions en fonction de x, y, z et regardons t comme une quantité constante. On trouvera

$$u = \varphi_1(x, y, z) \quad , \quad v = \varphi_2(x, y, z) \quad , \quad w = \varphi_3(x, y, z).$$

D'après ce que nous venons de dire, φ_2 sera une fonction monodrome, mais φ_1 et φ_3 seront polydromes. Si l'on part d'un point quelconque et qu'on prenne les valeurs de φ_1 et φ_3 qui se suivent avec continuité en parcourant une ligne qui entoure un axe optique, on revient au point de départ avec les valeurs initiales changées de signe.

Cette propriété est commune aussi aux fonctions $V, \bar{u}, \bar{w}, \overline{V}$ de l'article précédent, considérées comme fonctions de x, y, z.

Au contraire, $U, W, v, \overline{U}, W$ sont des fonctions monodromes.

Puisque $u_1 = 0$ à l'origine, les douze fonctions $u, v, w, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, U, V, W, \overline{U}, \overline{V}, \overline{W}$, deviendront infinies pour $x = y = z = 0$.

Les mêmes fonctions deviennent indéterminées dans les points des parallèles aux axes optique T_1, T_2 conduites par l'origine.

Posons

$$x = x_2 - x_1 \quad , \quad y = y_2 - y_1 \quad , \quad z = z_2 - z_1 .$$

On aura

$$\varphi_1(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = -\varphi_1(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2),$$
$$\varphi_2(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = -\varphi_2(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2),$$
$$\varphi_3(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = -\varphi_3(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).$$

Même $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ changent de signe par la permutation de x_1, y_1, z_1 avec x_2, y_2, z_2. Au contraire $U, V, W; \overline{U}, \overline{V}, \overline{W}$, ne changent pas en effectuant cette permutation.

2. Lamé avait trouvé par un procédé tout à fait différent les intégrales (4) et (6) dans lesquelles on suppose

$$f(\alpha) = 0 \quad , \quad \bar{f}(\alpha) = 0 \quad , \quad \varphi(\alpha) = \cos\frac{2\pi\alpha}{T} \quad , \quad \bar{\varphi}(\alpha) = \frac{\cos 2\pi\alpha}{T}.$$

Ne s'étant pas aperçu de la polydromie de ces intégrales, il croyait qu'elles pouvaient représenter les vibrations lumineuses produites par un centre d'ébranlement situé à l'origine.

D'après la discussion que nous venons de faire il est évident que cela n'est pas vrai. Des vibrations lumineuses correspondant aux formules (4) et (6) ne pourraient être produites que par une couche de centres d'ébranlements situés sur les surfaces ω_x et ω_{-x}, ou ω_z et ω_{-z}, ou sur toute autre surface qui coupe l'espace de sorte qu'on doive nécessairement la rencontrer lorsqu'on tourne autour des droites T_1, T_2.

3. Mais envisageons pour un instant la question au point de vue de Lamé, en supposant que ses conclusions soient vraies. On peut alors, en par-

tant de ses intégrales, procéder de la même façon qu'a suivie M. POINCARÉ pour trouver l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2 \Delta^2 u \text{ (2)}.$$

Rappelons que M. POINCARÉ part de l'intégrale $\frac{F(r - Vt)}{r}$, où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, et qu'il cherche à quoi conduit l'application du principe de HUYGHENS.

Supposons qu'à l'origine des temps toutes les molécules du milieu soient ébranlées. Soit σ_t la surface des ondes dont le centre est le point x_0, y_0, z_0 et les paramètres sont at, bt, ct. Dans l'intervalle de temps qui découle entre l'instant t et l'instant $t + dt$, le point x_0, y_0, z_0 aura reçu, selon le principe de HUYGHENS, les ébranlements provenant de tous les points compris entre les surfaces σ_t et σ_{t+dt}. En suivant donc les idées de LAMÉ sur le centre d'ébranlement, on pourrait représenter par

$$d\xi = \int_S -\frac{\mu^2 b \operatorname{sn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{cn} u_3}{a^2 u_1 \Delta} F(x_0 + x, y_0 + y, z_0 + z)\, dS$$

$$+ \int_{\bar{S}} \frac{\operatorname{dn} \bar{u}_2 \operatorname{cn} \bar{u}_3 \operatorname{dn} \bar{u}_3}{c \bar{u}_1 \bar{\Delta}} \bar{F}(x_0 + \bar{x}, y_0 + \bar{y}, z_0 + \bar{z})\, d\bar{S},$$

$$d\eta = \int_S -\frac{\operatorname{cn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{dn} u_3}{a u_1 \Delta} F(x_0 + x, y_0 + y, z_0 + z)\, dS$$

$$+ \int_{\bar{S}} -\frac{\operatorname{cn} \bar{u}_2 \operatorname{sn} \bar{u}_3 \operatorname{dn} \bar{u}_3}{c \bar{u}_1 \Delta} \bar{F}(x_0 + \bar{x}, y_0 + \bar{y}, z_0 + \bar{z})\, d\bar{S},$$

$$d\zeta = \int_S \frac{\operatorname{dn} u_2 \operatorname{cn} u_3 \operatorname{dn} u_3}{a u_1 \Delta} F(x_0 + x, y_0 + y, z_0 + z)\, dS$$

$$+ \int_{\bar{S}} -\frac{\bar{\mu}^2 b \operatorname{sn} \bar{u}_2 \operatorname{sn} \bar{u}_3 \operatorname{cn} \bar{u}_3}{c^2 \bar{u}_1 \bar{\Delta}} \bar{F}(x_0 + \bar{x}, y_0 + \bar{y}, z_0 + \bar{z})\, d\bar{S}$$

les variations des composantes du déplacement du point x_0, y_0, z_0, qui ont lieu dans l'intervalle de temps dt. Il suffit pour cela de supposer:

1° que S soit la partie de l'espace comprise entre les nappes extérieures des deux surfaces des ondes σ_t et σ_{t+dt}, et $\bar{S}$ la partie comprise entre les nappes intérieures des mêmes surfaces;

2° que $x_0 + x, y_0 + y, z_0 + z$ soient les coordonnées des points de S et $x_0 + \bar{x}, y_0 + \bar{y}, z_0 + \bar{z}$ celles des points de $\bar{S}$;

3° que u_1, u_2, u_3 soient les coordonnées de la 1ère espèce de WEBER du point x_0, y_0, z_0 par rapport au point $x_0 + x, y_0 + y, z_0 + z$; et que $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ soient les coordonnées de WEBER de la 2de espèce du point x_0, y_0, z_0 par rapport au point $x_0 + \bar{x}, y_0 + \bar{y}, z_0 + \bar{z}$;

4° enfin que les fonctions $F(x, y, z)$, $\bar{F}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ne dépendent que de l'état initial du milieu.

(2) *Leçons sur la théorie mathématique de la lumière*, p. 87.

Mais

$$dS = D\, du_1\, du_2\, du_3 = a^2\, b u_1^2\, \Delta\, du_1\, du_2\, du_3\,,$$

$$d\bar{S} = \bar{D}\, d\bar{u}_1\, d\bar{u}_2\, d\bar{u}_3 = c^2\, b\bar{u}_1^2\, \bar{\Delta}\, d\bar{u}_1\, d\bar{u}_2\, d\bar{u}_3\,,$$

$$u_1 = \bar{u}_1 = t\,,$$

$$du_1 = d\bar{u}_1 = dt\,,$$

donc

$$\frac{1}{b}\frac{d\xi}{dt} = \rho_1 = t\int_{\sigma'} -\mu^2\, b\, \mathrm{sn}\, u_2\, \mathrm{sn}\, u_3\, \mathrm{cn}\, u_3\, F(x_0 + x\,, y_0 + y\,, z_0 + z)\, du_2\, du_3$$

$$+\, t\int_{\bar{\sigma}'} c\, \mathrm{dn}\, \bar{u}_2\, \mathrm{cn}\, \bar{u}_3\, \mathrm{dn}\, \bar{u}_3\, \bar{F}(x_0 + \bar{x}\,, y_0 + \bar{y}\; z_0 + \bar{z})\, du_2\, du_3\,,$$

$$\frac{1}{b}\frac{d\eta}{dt} = \rho_2 = t\int_{\sigma'} -a\, \mathrm{cn}\, u_2\, \mathrm{sn}\, u_3\, \mathrm{dn}\, u_3\, F(x_0 + x\,, y_0 + y\,, z_0 + z)\, du_2\, du_3$$

$$+\, t\int_{\bar{\sigma}'} -c\, \mathrm{cn}\, \bar{u}_2\, \mathrm{sn}\, \bar{u}_3\, \mathrm{dn}\, \bar{u}_3\, \bar{F}(x_0 + \bar{x}\,, y_0 + \bar{y}\,, z_0 + \bar{z})\, du_2\, du_3\,,$$

$$\frac{1}{b}\frac{d\zeta}{dt} = \rho_3 = t\int_{\sigma'} a\, \mathrm{dn}\, u_2\, \mathrm{cn}\, u_3\, \mathrm{dn}\, u_3\, F(x_0 + x\,, y_0 + y\,, z_0 + z)\, du_2\, du_3$$

$$+\, t\int_{\bar{\sigma}'} -\bar{\mu}^2\, b\, \mathrm{sn}\, \bar{u}_2\, \mathrm{sn}\, \bar{u}_3\, \mathrm{cn}\, \bar{u}_3\, \bar{F}(x_0 + \bar{x}\,, y_0 + \bar{y}\,, z_0 + \bar{z})\, du_2\, du_3\,.$$

Puisque les équations de LAMÉ sont linéaires, les formules précédentes devraient donner des intégrales de ces équations.

On obtient ainsi les mêmes formules de M^me^ KOWALEVSKI [3]. Mais il est aisé de se persuader que les fonctions qu'on vient de trouver ne sont pas des intégrales des équations de LAMÉ.

En effet on voit qu'en faisant $t = 0$, les fonctions $\rho_1\,, \rho_2\,, \rho_3\,, \frac{d\rho_1}{dt}\,, \frac{d\rho_2}{dt}\,, \frac{d\rho_3}{dt}\,,$ s'annulent. Mais si l'on a un système d'intégrales des équations de LAMÉ qui s'annulent avec leurs dérivées par rapport à t, pour $t = 0$, elles seraient toujours nulles, ce qui n'a pas lieu pour $\rho_1\,, \rho_2\,, \rho_3$.

Ce résultat n'a rien de contradictoire et s'explique parfaitement, en se rappelant qu'on a trouvé les formules précédentes en supposant justes les idées de LAMÉ, tandis qu'on a prouvé le contraire.

ART. 6. – GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE GREEN. APPLICATION DE LA MÉTHODE DE KIRCHHOFF.

1. Désignons par

(1) $$p_s\,, Q_s\,, P_s\,, q_s \quad ; \quad p'_s\,, Q'_s\,, P'_s\,, q'_s$$

deux systèmes d'intégrales des équations de LAMÉ. (Voir article 2, formule (1)).

(3) « Acta Mathematica », tome 6.

On aura

$$\Sigma_r\,\Sigma_s\,\mathrm{DH}_{rs}\left(\frac{\partial^2 p_r}{\partial t^2}\,p'_s - \frac{\partial^2 p'_r}{\partial t^2}\,p_s\right) = \mathrm{D}\Sigma_r\left(q'_r\,\frac{\partial^2 p_r}{\partial t^2} - q_r\,\frac{\partial^2 p'_r}{\partial t^2}\right)$$

$$= \Sigma_r\left[q'_r\left(\frac{\partial \mathrm{Q}_{r+2}}{\partial u_{r+1}} - \frac{\partial \mathrm{Q}_{r+1}}{\partial u_{r+2}}\right) - q_r\left(\frac{\partial \mathrm{Q}'_{r+2}}{\partial u_{r+1}} - \frac{\partial \mathrm{Q}'_{r+1}}{\partial u_{r+2}}\right)\right].$$

Multiplions cette équation par $du_1\,du_2\,du_3$ et intégrons à un espace S limité par un contour σ. Supposons que les fonctions (1), soient finies, continues et monodromes dans l'espace S.

Si $u\,,v$ est un système de coordonnées de la surface σ, on obtient

$$(2)\qquad \int_S \Sigma_r\,\Sigma_s\,\mathrm{H}_{rs}\left(\frac{\partial^2 p_r}{\partial t^2}\,p'_s - \frac{\partial^2 p'_r}{\partial t^2}\,p_s\right)d\mathrm{S} = \int_\sigma \Sigma_r\left[q'_r\left\{\mathrm{Q}_{r+2}\,\frac{d\,(u_{r+2}\,,u_r)}{d\,(u\,,v)} - \mathrm{Q}_{r+1}\,\frac{d\,(u_r\,,u_{r+1})}{d\,(u\,,v)}\right\}\right.$$

$$\left. - q_r\left\{\mathrm{Q}'_{r+2}\,\frac{d\,(u_{r+2}\,,u_r)}{d\,(u\,,v)} - \mathrm{Q}'_{r+1}\,\frac{d\,(u_r\,,u_{r+1})}{d\,(u\,,v)}\right\}\right]du\,dv$$

$$-\int_S \Sigma_r\left[\mathrm{Q}_r\left(\frac{\partial q'_{r+1}}{\partial u_{r+2}} - \frac{\partial q'_{r+2}}{\partial u_{r+1}}\right) - \mathrm{Q}'_r\left(\frac{\partial q_{r+1}}{\partial u_{r+2}} - \frac{\partial q_{r+2}}{\partial u_{r+1}}\right)\right]du_1\,du_2\,du_3.$$

La dernière intégrale est nulle. En effet on a

$$\int_S \Sigma_r\left[\mathrm{Q}_r\left(\frac{\partial q'_{r+1}}{\partial u_{r+2}} - \frac{\partial q'_{r+2}}{\partial u_{r+1}}\right) - \mathrm{Q}'_r\left(\frac{\partial q_{r+1}}{\partial u_{r+2}} - \frac{\partial q_{r+2}}{\partial u_{r+1}}\right)\right]du_1\,du_2\,du_3$$

$$= \int_S \Sigma_r\,[\mathrm{Q}_r\,\mathrm{P}'_r - \mathrm{Q}'_r\,\mathrm{P}_r]\,d\mathrm{S} = \int_S \Sigma_r\,\Sigma_s\,(\mathrm{K}_{rs}\,\mathrm{P}_s\,\mathrm{P}'_r - \mathrm{K}_{rs}\,\mathrm{P}'_s\,\mathrm{P}_r)\,d\mathrm{S} = 0.$$

Par suite l'équation (2) peut être remplacée par l'autre

$$(3)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_S \Sigma_r\,\Sigma_s\,\mathrm{H}_{rs}\left(\frac{\partial p_r}{\partial t}\,p'_s - \frac{\partial p'_s}{\partial t}\,p_r\right)d\mathrm{S}$$

$$= \int_\sigma \Sigma_r\left[q'_r\left\{\mathrm{Q}_{r+2}\,\frac{d\,(u_{r+2}\,,u_r)}{d\,(u\,,v)} - \mathrm{Q}_{r+1}\,\frac{d\,(u_r\,,u_{r+1})}{d\,(u\,,v)}\right\}\right.$$

$$\left. + \mathrm{Q}'_r\left\{q_{r+2}\,\frac{d\,(u_{r+2}\,,u_r)}{d\,(u\,,v)} - q_{r+1}\,\frac{d\,(u_r\,,u_{r+1})}{d\,(u\,,v)}\right\}\right]du\,dv.$$

2. Pareillement supposons que

$$(4)\qquad \mathrm{M}_s\,,m_s\,,\mathrm{N}_s\,,n_s \quad ; \quad \mathrm{M}'_s\,,m'_s\,,\mathrm{N}'_s\,,n'_s$$

soient deux intégrales des équations conjuguées à celles de LAMÉ (voir article 2, formule (2)). Si les fonctions (4) sont finies, continues et monodromes dans l'espace S on a

$$(5)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_S \Sigma_r\,\Sigma_s\,\mathrm{K}_{rs}\left(\frac{\partial \mathrm{M}_r}{\partial t}\,\mathrm{M}'_s - \frac{\partial \mathrm{M}'_s}{dt}\,\mathrm{M}_r\right)d\mathrm{S}$$

$$= \int_\sigma \Sigma_r\left[\mathrm{N}'_r\left\{n_{r+2}\,\frac{d\,(u_{r+2}\,,u_r)}{d\,(u\,,v)} - n_{r+1}\,\frac{d\,(u_r\,,u_{r+1})}{d\,(u\,,v)}\right\}\right.$$

$$\left. + n'_r\left\{\mathrm{N}_{r+2}\,\frac{d\,(u_{r+2}\,,u_r)}{d\,(u\,,v)} - \mathrm{N}_{r+1}\,\frac{d\,(u_r\,,u_{r+1})}{d\,(u\,,v)}\right\}\right]du\,dv.$$

Les formules (3) et (5) peuvent être considérées comme une généralisation du théorème de GREEN.

3. Prenons maintenant pour lignes coordonnées les coordonnées de WEBER de la première espèce et posons pour

$$p'_s\,,\; Q'_s\,,\; P'_s\,,\; q'_s$$

la première des intégrales de LAMÉ que nous avons trouvée dans l'article 4 (voir formule (2)).

Afin que ces fonctions soient finies et continues dans l'espace S, il faut exclure l'origine et les surfaces $\omega_x\,,\,\omega_{-x}$.

Soit σ une surface qui renferme l'origine. Conduisons deux cônes

$$u_2 = \mathrm{K} - \varepsilon \quad , \quad u_2 = -\mathrm{K} + \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0)$$

qu'on appellera $\alpha_1\,,\,\alpha_2$ et la nappe extérieure ω de la surface des ondes $u_1 = \varepsilon'$.

Quelque petites que soient les quantités $\varepsilon\,,\,\varepsilon'$, les fonctions $p'_s\,,\,\mathrm{P}'_s\,,\,\mathrm{Q}'_s\,,\,q'_s$, rempliront toujours les conditions suffisantes pour l'application de la formule (3) dans l'espace S_1 renfermé entre $\sigma\,,\,\alpha_1\,,\,\alpha_2\,,\,\omega$. La surface σ_1 qui limite S_1 sera formée de quatre parties, qui appartiennent respectivement à $\sigma\,,\,\alpha_1\,,\,\alpha_2\,,\,\omega$ et qu'on désignera par $\sigma'\,,\,\alpha'_1\,,\,\alpha'_2\,,\,\omega'$. La formule (3) peut être appliquée en remplaçant S par S_1 et σ par σ_1. Les lignes $u\,,\,v$ seront les coordonnées curvilignes de la surface σ_1. Considérons, sur la ligne $u =$ const., la direction dans laquelle v croit. On l'appellera la direction positive de la ligne $u =$ const. De même considérons la direction dans laquelle u croît comme direction positive de la ligne $v =$ const. Alors en regardant la surface du côté extérieur à l'espace S_1 on devra faire tourner la direction positive de la ligne $v =$ const. d'un angle $< \pi$, dans le sens des aiguilles d'une montre, pour la faire coïncider avec la direction positive de la ligne $u =$ const. D'après cela on peut choisir pour coordonnées curvilignes $v =$ const., $u =$ const., sur le cône α_1 les lignes $u_1 =$ const., $u_3 =$ const. de cette surface, et sur le cône α_2 les lignes $u_3 =$ const., $u_1 =$ const. De même sur la surface ω on choisira les lignes $u_2 =$ const., $u_3 =$ const. pour les lignes coordonnées $v\,,\,u$. Donc, en posant pour simplicité d'écriture

$$f\,(t + u_1) + \varphi\,(t - u_1) = \mathrm{F},$$

$$f'\,(t + u_1) - \varphi'\,(t - u_1) = \mathrm{F}_1\,,$$

on aura

$$\frac{\partial}{\partial t}\, b \int\limits_{\mathrm{S}_1} \mathrm{H}_{33} \left[\mathrm{F}\, \frac{\partial p_3}{\partial t} - \mathrm{F}_1\, p_3 \right] d\mathrm{S} \tag{6}$$

$$= \int\limits_{\sigma'} \left[\mathrm{F} \left\{ \mathrm{Q}_2\, \frac{d\,(u_2\,,u_3)}{d\,(u\,,v)} - \mathrm{Q}_1\, \frac{d\,(u_3\,,u_1)}{d\,(u\,,v)} \right\} + b\mathrm{F}_1 \left\{ q_1\, \frac{d\,(u_1\,,u_2)}{d\,(u\,,v)} - q_3\, \frac{d\,(u_2\,,u_3)}{d\,(u\,,v)} \right\} \right] du\, dv$$

$$- \int\limits_{\alpha'_1} \mathrm{F}\mathrm{Q}_1\, du_1\, du_3 + \int\limits_{\alpha'_2} \mathrm{F}\mathrm{Q}_1\, du_1\, du_3 - \int\limits_{\omega'} (\mathrm{F}\mathrm{Q}_2 - b\mathrm{F}_1\, q_3)\, du_2\, du_3\,.$$

Q_1 est une fonction de u_1, u_2, u_3, t. Pour mettre cela en évidence nous écrirons $Q_1(u_1, u_2, u_3 \mid t)$. Par suite

$$\int_{\alpha_1'} FQ_1\, du_1\, du_3 = \int_{-2L}^{2L} du_3 \int_{\varepsilon'}^{u_1} FQ_1(u_1, K-\varepsilon, u_3 \mid t)\, du_1,$$

où la limite supérieure u_1 de la première intégrale est la coordonnée u_1 du point où la génératrice $u_3 = \text{const.}$ du cône α_1 rencontre la surface σ.

De même

$$\int_{\alpha_2} FQ_1\, du_1\, du_3 = \int_{-2L}^{2L} du_3 \int_{\varepsilon'}^{u_1} FQ_1(u_1, -K+\varepsilon, u_3 \mid t)\, du_1.$$

On aura aussi

$$\int_{\omega'} (FQ_2 - bF_1 q_3)\, du_2\, du_3$$

$$= \int_{-K+\varepsilon}^{K-\varepsilon} du_2 \int_{-2L}^{2L} \{FQ_2(\varepsilon', u_2, u_3 \mid t) - bF_1 q_3(\varepsilon', u_2, u_3 \mid t)\}\, du_3.$$

Faisons tendre ε' vers zéro. En prenant garde que

$$\lim_{\varepsilon'=0} Q_2(\varepsilon', u_2, u_3 \mid t) = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon'=0} q_3(\varepsilon', u_2, u_3 \mid t) = 0;$$

on obtient

$$\lim_{\varepsilon'=0} \int_{\omega'} (FQ_2 - bF_1 q_3)\, du_2\, du_3 = 0.$$

Supposons que même ε tende vers zéro.

Alors le cône α_1' tend vers une double couche qui couvre la partie α_x de ω_x comprise entre l'origine et la surface σ. Pareillement le cône α_2' tend vers une double couche qui couvre la partie α_{-x} de ω_{-x} comprise entre l'origine et la surface σ. On trouvera

$$\lim_{\substack{\varepsilon=0\\ \varepsilon'=0}} \int_{\alpha_1'} FQ_1\, du_1\, du_3 = \int_{-2L}^{2L} du_3 \int_0^{u_1} FQ_1(u_1, K, u_3 \mid t)\, du_1,$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon=0\\ \varepsilon'=0}} \int_{\alpha_2'} FQ_1\, du_1\, du_3 = \int_{-2L}^{2L} du_3 \int_0^{u_1} FQ_1(u_1, -K, u_3 \mid t)\, du_1.$$

Mais par la continuité de Q_1 le long des surfaces ω_x, ω_{-x}, on aura

$$\text{si} \quad u_3 > 0 \left\{ \begin{aligned} Q_1(u_1, K, u_3 \mid t) &= Q_1(u_1, K, 2L - u_3 \mid t), \\ Q_1(u_1, -K, u_3 \mid t) &= Q_1(u_1, -K, 2L - u_3 \mid t), \end{aligned} \right.$$

$$\text{si} \quad u_3 < 0 \left\{ \begin{aligned} Q_1(u_1, K, u_3 \mid t) &= Q_1(u_1, K, -2L - u_3 \mid t), \\ Q_1(u_1, -K, u_3 \mid t) &= Q_1(u_1, -K, -2L - u_3 \mid t). \end{aligned} \right.$$

Par conséquent

$$\int_{-2L}^{-L} du_3 \int_0^{u_1} FQ_1(u_1, K, u_3 \mid t)\, du_1 = \int_{-L}^{0} du_3 \int_0^{u_1} FQ_1(u_1, K, u_3 \mid t)\, du_1,$$

$$\int_{L}^{2L} du_3 \int_0^{u_1} FQ_1(u_1, K, u_3 \mid t)\, du_1 = \int_{0}^{L} du_3 \int_0^{u_1} FQ_1(u_1, K, u_3 \mid t)\, du_1,$$

d'où

$$\lim_{\substack{\varepsilon=0\\ \varepsilon'=0}} \int_{\alpha_1'} FQ_1\, du_1\, du_3 = 2\int_{-L}^{L} du_3 \int_0^{u_1} FQ_1(u_1, K, u_3 \mid t)\, du_1 = 2\int_{\alpha_x} FQ_1\, du_1\, du_3.$$

De même

$$\lim_{\substack{\varepsilon=0\\ \varepsilon'=0}} \int_{\alpha_2'} FQ_1\, du_1\, du_3 = 2\int_{-L}^{L} du_3 \int_0^{u_1} FQ_1(u_1, -K, u_3 \mid t)\, du_1 = 2\int_{\alpha_{-x}} FQ_1\, du_1\, du_3.$$

La formule (6) devient

(7)
$$\frac{\partial}{\partial t}\, b \int_S H_{33}\left[F\frac{\partial p_3}{\partial t} - F_1 p_3\right] dS$$

$$= \int_\sigma \left[F\left\{Q_2\frac{d(u_2, u_3)}{d(u, v)} - Q_1\frac{d(u_3, u_1)}{d(u, v)}\right\} + bF_1\left\{q_1\frac{d(u_1, u_2)}{d(u, v)} - q_3\frac{d(u_2, u_3)}{d(u, v)}\right\}\right] du\, dv$$

$$- 2\int_{\alpha_x} FQ_1\, du_1\, du_3 + 2\int_{\alpha_{-x}} FQ_1\, du_1\, du_3.$$

4. Prenons [4]

$$\varphi(\alpha) = 0,$$

$$f(\alpha) = \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} e^{-\mu^2\alpha^2}$$

et intégrons la formule précédente par rapport à t entre le temps négatif t_1 et le temps positif t_2.

On trouve, par une intégration par parties,

$$\left[b\int_S H_{33}\left\{f(t+u_1)\frac{\partial p_3}{\partial t} - f'(t+u_1)\, p_3\right\} dS\right]_{t_1}^{t_2}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_\sigma \left[f(t+u_1)\left\{Q_2\frac{d(u_2, u_3)}{d(u, v)} - Q_1\frac{d(u_3, u_1)}{d(u, v)}\right\} - \right.$$

(4) Voir KIRCHHOFF, *Zur Theorie der Lichtstrahlen.* « Wied. Ann. », Bd. 18. KIRCHHOFF, *Vorlesungen über Math. Optik*, p. 24.

Nous avons employé ici le même procédé suivi par KIRCHHOFF pour trouver sa formule, mais on pourrait aussi atteindre le but par une autre méthode semblable à celle découverte par M. BELTRAMI (voir « Rendiconti del R. Istituto Lombardo », ser. 2, vol. 22, fasc. 10) pour démontrer la formule de KIRCHHOFF.

$$- bf(t+u_1)\left\{\frac{\partial q_1}{\partial t}\frac{d(u_1,u_2)}{d(u,v)} - \frac{\partial q_3}{\partial t}\frac{d(u_2,u_3)}{d(u,v)}\right\}\Bigg] du\,dv$$

$$+\left[\int_\sigma bf(t+u_1)\left\{q_1\frac{d(u_1,u_2)}{d(u,v)} - q_3\frac{d(u_2,u_3)}{d(u,v)}\right\}du\,dv\right]_{t_1}^{t_2}$$

$$-2\int_{t_1}^{t_2}dt\int_{\alpha_x} f(t+u_1)\,Q_1\,du_1\,du_3 + 2\int_{t_1}^{t_2}dt\int_{\alpha_{-x}} f(t+u_1)\,Q_1\,du_1\,du_3 .$$

Si nous faisons croître μ indéfiniment, la formule précédente à la limite devient

$$(8)\qquad \int_{\alpha_x} Q_1(u_1, K, u_3 \mid -u_1)\,du_1\,du_3 - \int_{\alpha_{-x}} Q_1(u_1, -K, u_3 \mid -u_1)\,du_1\,du_3$$

$$=\frac{1}{2}\int_\sigma\left\{Q_2(u_1,u_2,u_3\mid -u_1)\frac{d(u_2,u_3)}{d(u,v)} - Q_1(u_1,u_2,u_3\mid -u_1)\frac{d(u_3,u_1)}{d(u,v)}\right.$$

$$\left.+\,b\chi_3(u_1,u_2,u_3\mid -u_1)\frac{d(u_2,u_3)}{d(u,v)} - b\chi_1(u_1,u_2,u_3\mid -u_1)\frac{d(u_1,u_3)}{d(u,v)}\right\}du\,dv$$

où

$$\chi_1 = \frac{\partial q_1}{\partial t}\quad,\quad \chi_3 = \frac{\partial q_3}{\partial t}.$$

5. Par le même procédé, en partant de la formule (5) et en se servant des coordonnées de WEBER de la première espèce et des intégrales (9) de l'article 4, on trouve

$$(9)\qquad \int_{\alpha_x} \nu_1(u_1, K, u_3\mid -u_1)\,du_1\,du_3 - \int_{\alpha_{-x}} \nu_1(u_1, -K, u_3\mid -u_1)\,du_1\,du_3$$

$$=\frac{1}{2}\int_\sigma\left\{bn_1(u_1,u_2,u_3\mid -u_1)\frac{d(u_1,u_2)}{d(u,v)} - bn_3(u_1,u_2,u_3\mid -u_1)\frac{d(u_2,u_3)}{d(u,v)}\right.$$

$$\left.+\,\nu_1(u_1,u_2,u_3\mid -u_1)\frac{d(u_3,u_1)}{d(u,v)} - \nu_2(u_1,u_2,u_3\mid -u_1)\frac{d(u_2,u_3)}{d(u,v)}\right\}du\,dv$$

où

$$\nu_1 = \frac{\partial N_1}{\partial t}\quad,\quad \nu_2 = \frac{\partial N_2}{\partial t}.$$

On peut trouver des formules tout a fait semblables, en faisant usage des coordonnées de WEBER de la seconde espèce et des intégrales (6), (10) que nous avons trouvées dans l'article 4.

6. Supposons que la surface σ soit la nappe extérieure de la surface des ondes dont l'équation est

$$u_i = t.$$

La formule (8) dans ce cas deviendra

$$(10)\qquad \int_{-L}^{L} du_3 \int_0^t Q_1(u_1, K, u_3 \,|\, -u_1)\, du_1 - \int_{-L}^{L} du_3 \int_0^t Q_1(u_1, -K, u_3 \,|\, -u_1)\, du_1$$
$$= \frac{1}{2} \int_{-2L}^{2L} du_3 \int_{-K}^{K} \{ Q_2(t, u_2, u_3 \,|\, -t) + b\chi_3(t, u_2, u_3 \,|\, -t) \}\, du_2 .$$

7. Les formules (8), (9) ont une analogie avec celle que KIRCHHOFF a donnée comme une généralisation du principe de HUYGHENS.

ART. 7. – NOUVELLES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS DE LAMÉ.

1. En prenant dans les équations (4) de l'article 4

$$\varphi = 0$$

et en désignant par $\psi_1(x, y, z)$, $\psi_2(x, y, z)$, $\psi_3(x, y, z)$ les coefficients de la fonction arbitraire, on pourra écrire ces formules de la manière suivante

$$- \frac{\mu^2 b \operatorname{sn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{cn} u_3}{a^2 u_1 \Delta} f(t + u_1) = \psi_1 f(t + u_1),$$
$$- \frac{\operatorname{cn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{dn} u_3}{a u_1 \Delta} f(t + u_1) \quad = \psi_2 f(t + u_1),$$
$$\frac{\operatorname{dn} u_2 \operatorname{cn} u_3 \operatorname{dn} u_3}{a u_1 \Delta} f(t + u_1) \quad = \psi_3 f(t + u_1).$$

Substituons $x - \xi$, $z - \zeta$ à la place de x, z; on obtiendra

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\psi_1(x - \xi, y, z - \zeta) f(t + u_1), \\ &\psi_2(x - \xi, y, z - \zeta) f(t + u_1), \\ &\psi_3(x - \xi, y, z - \zeta) f(t + u_1). \end{aligned} \right.$$

Désignons par S_{+y}, S_{-y} les deux parties de l'espace dans lesquelles $y > 0$, $y < 0$. Il est aisé de voir que les fonctions (1) sont finies, continues et monodromes dans S_{+y} et dans S_{-y}. Elles deviennent infinies dans les point $\xi, 0, \zeta$ et la première et la troisième sont discontinues sur le plan xz.

2. Supposons que f depende des deux variables ξ, ζ; c'est à dire qu'elle soit une fonction arbitraire de $t + u_1, \xi, \zeta$. En multipliant par $d\xi\, d\zeta$ et en intégrant, on obtiendra les trois fonctions

$$u' = \int \psi_1(x - \xi, y, z - \zeta) f(u_1 + t, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta,$$
$$v' = \int \psi_2(x - \xi, y, z - \zeta) f(u_1 + t, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta,$$
$$w' = \int \psi_3(x - \xi, y, z - \zeta) f(u_1 + t, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta.$$

Elles constituent un système d'intégrales des équations de LAMÉ. Elles n'ont pas de discontinuités dans les deux parties de l'espace S_{+y} et S_{-y}, mais sont discontinues sur le plan xz.

En partant des intégrales (7) de l'article 4 on trouve évidemment une intégrale parfaitement analogue à celle que nous venons d'obtenir et que l'on peut écrire

$$\bar{u}' = \int \bar{\psi}_1 (x - \xi, y, z - \zeta) \bar{f}(\bar{u}_1 + t, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta,$$

$$\bar{v}' = \int \bar{\psi}_2 (x - \xi, y, z - \zeta) \bar{f}(\bar{u}_1 + t, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta,$$

$$\bar{w}' = \int \bar{\psi}_3 (x - \xi, y, z - \zeta) \bar{f}(\bar{u}_1 + t, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta.$$

On peut donc conclure: u_1, u_2, u_3, étant les coordonnées de WEBER de la première espèce du point x, y, z par rapport au point $\xi, 0, \zeta$, et $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ les coordonnées de WEBER de la seconde espèce du premier point par rapport au second, on aura les intégrales suivantes des équations de LAMÉ

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
u &= \int -\frac{\mu^2 b \operatorname{sn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{cn} u_3}{a^2 u_1 \Delta} f(t + u_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta \\
&\quad + \int \frac{\operatorname{dn} \bar{u}_2 \operatorname{cn} \bar{u}_3 \operatorname{dn} \bar{u}_3}{c \bar{u}_1 \bar{\Delta}} \bar{f}(t + \bar{u}_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta, \\
v &= \int -\frac{\operatorname{cn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{dn} u_3}{a u_1 \Delta} f(t + u_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta \\
&\quad + \int -\frac{\operatorname{cn} \bar{u}_2 \operatorname{sn} \bar{u}_3 \operatorname{dn} \bar{u}_3}{c \bar{u}_1 \bar{\Delta}} \bar{f}(t + \bar{u}_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta, \\
w &= \int \frac{\operatorname{dn} u_2 \operatorname{cn} u_3 \operatorname{dn} u_3}{a u_1 \Delta} f(t + u_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta \\
&\quad + \int -\frac{\bar{\mu}^2 b \operatorname{sn} \bar{u}_2 \operatorname{sn} \bar{u}_3 \operatorname{cn} \bar{u}_3}{c^2 \bar{u}_1 \bar{\Delta}} \bar{f}(t + \bar{u}_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta
\end{aligned}\right.$$

où $f(t + u_1, \xi, \zeta)$, $\bar{f}'(t + \bar{u}_1, \xi, \zeta)$ sont deux fonctions arbitraires. Les intégrales (2) seront finies continues et monodromes en S_{+y} et S_{-y} et seront discontinues sur le plan xz.

3. Il est bien aisé d'obtenir les rotations U, V, W correspondant aux déplacements (2) (voir article 1). Il suffit pour cela d'appliquer les formules (5) et (8) de l'article 4. On trouve ainsi

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{U} &= \int \frac{\operatorname{cn} u_2 \operatorname{dn} u_2 \operatorname{dn} u_3}{a^2 u_1 \Delta} \frac{\partial}{\partial t} f(t + u_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta \\
&\quad + \int -\frac{k^2 \operatorname{sn} \bar{u}_2 \operatorname{cn} \bar{u}_2 \operatorname{sn} \bar{u}_3}{c b \bar{u}_1 \bar{\Delta}} \frac{\partial}{\partial t} \bar{f}(t + \bar{u}_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta, \\
\mathrm{V} &= \int -\frac{\operatorname{sn} u_2 \operatorname{dn} u_2 \operatorname{cn} u_3}{a b u_1 \Delta} \frac{\partial}{\partial t} f(t + u_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta \\
&\quad + \int -\frac{\operatorname{sn} \bar{u}_2 \operatorname{dn} \bar{u}_2 \operatorname{cn} \bar{u}_3}{c b \bar{u}_1 \bar{\Delta}} \frac{\partial}{\partial t} \bar{f}(t + \bar{u}_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta, \\
\mathrm{W} &= \int -\frac{k^2 \operatorname{sn} u_2 \operatorname{cn} u_2 \operatorname{sn} u_3}{a b u_1 \Delta} \frac{\partial}{\partial t} f(t + u_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta \\
&\quad + \int \frac{\operatorname{cn} \bar{u}_2 \operatorname{dn} \bar{u}_2 \operatorname{dn} \bar{u}_3}{c^2 \bar{u}_1 \bar{\Delta}} \frac{\partial}{\partial t} \bar{f}(t + \bar{u}_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta.
\end{aligned}\right.$$

4. Voyons maintenant les valeurs qu'on trouve pour les quantités u, v, w, U, V, W lorsqu'on s'approche indéfiniment aux points du plan xz. Indiquons par le symbole

$$\lim_{y=+0}$$

la limite qu'on obtient lorsqu'on s'approche d'un point du plan xz du côté S_{+y} et par

$$\lim_{y=-0}$$

la limite qu'on trouve en s'approchant du même point du côté S_{-y}. Conduisons par un point quelconque du plan xz deux droites parallèles aux axes optiques. Le plan xz sera partagé en quatre parties $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ qu'on peut faire coïncider par une simple translation avec $\omega_{+z}, \omega_{+x}, \omega_{-z}, \omega_{-x}$. Nous répresenterons par

$$\int_{\sigma_h \pm \sigma_k}$$

la somme ou la différence de deux intégrales étendue aux deux parties du plan xz qu'on a indiquées par σ_h, σ_k.

Remarquons que la coordonnée u_3 de la 1ère espèce de WEBER d'un point du plan xz par rapport à un autre point du même plan peut être donnée par u_3 ou par $\pm 2L - u_3$. (Voir article 3). Convenons maintenant de prendre, lorsque les deux points sont sur le plan xz,

$$L \geqq u_3 \geqq -L.$$

De même convenons de prendre la coordonnée $\bar{u}_3$ de la seconde espèce relative à deux points du plan xz, telle que

$$L \geqq \bar{u}_3 \geqq -L.$$

Cela posé, il est bien aisé de déduire des formules (2) les équations suivantes

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}
\lim_{y=+0} u = -\lim_{y=-0} u &= \int_{\sigma_2-\sigma_4} b\mu \operatorname{sn} u_3 f(t+u_1, \xi, \zeta)\, du_1\, du_3 \\
&+ \int_{\sigma_1+\sigma_3} b \operatorname{dn} \bar{u}_3 \bar{f}(t+\bar{u}_1, \xi, \zeta)\, d\bar{u}_1\, d\bar{u}_3, \\
\lim_{y=+0} v = \lim_{y=-0} v &= \int_{\sigma_1-\sigma_3} bf(t+u_1, \xi, \zeta)\, du_1\, du_2 \\
&+ \int_{\sigma_2-\sigma_4} b\bar{f}(t+\bar{u}_1, \xi, \zeta)\, d\bar{u}_1\, d\bar{u}_2, \\
\lim_{y=+0} w = -\lim_{y=-0} w &= \int_{\sigma_2+\sigma_4} b \operatorname{dn} u_3 f(t+u_1, \xi, \zeta)\, du_1\, du_3 \\
&+ \int_{\sigma_1-\sigma_3} b\bar{\mu} \operatorname{sn} \bar{u}_3 \bar{f}(t+\bar{u}_1, \xi, \zeta)\, d\bar{u}_1\, d\bar{u}_3.
\end{aligned}\right.$$

Pareillement on obtient les limites de U , V , W lorsqu'on s'approche du plan xz. On a

$$(5)\quad \begin{cases} \lim\limits_{y=+0} U = \lim\limits_{y=-0} U = \int\limits_{\sigma_1+\sigma_3} \frac{b}{a} \operatorname{dn} u_2 \frac{\partial}{\partial t} f(t+u_1, \xi, \zeta)\, du_1\, du_2 \\ \qquad + \int\limits_{\sigma_2-\sigma_4} \frac{k}{a} \operatorname{sn} u_2 \frac{\partial}{\partial t} \bar{f}(t+\bar{u}_1, \xi, \zeta)\, d\bar{u}_1\, d\bar{u}_2, \\ \lim\limits_{y=+0} V = -\lim\limits_{y=-0} V = \int\limits_{\sigma_2-\sigma_4} \frac{\partial}{\partial t} f(t+u_1, \xi, \zeta)\, du_1\, du_3 \\ \qquad + \int\limits_{\sigma_1-\sigma_3} \frac{\partial}{\partial t} \bar{f}(t+\bar{u}_1, \xi, \zeta)\, d\bar{u}_1\, d\bar{u}_3, \\ \lim\limits_{y=+0} W = \lim\limits_{y=-0} W = \int\limits_{\sigma_1-\sigma_3} \frac{k}{c} \operatorname{sn} u_2 \frac{\partial}{\partial t} f(t+u_1, \xi, \zeta)\, du_1\, du_2 \\ \qquad + \int\limits_{\sigma_2+\sigma_4} \frac{b}{c} \operatorname{dn} \bar{u}_2 \frac{\partial}{\partial t} \bar{f}(t+\bar{u}_1)\, du_1\, du_2 . \end{cases}$$

5. Enfin nous remarquerons que les intégrales des équations de LAMÉ que nous avons trouvées (formules (2)) vérifient la condition

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

c'est à dire elles correspondent à des vibrations transversales du milieu élastique.

Cela ressort de l'observation que nous avons faite dans le § 5 de l'article 4.

ART. 8. – INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DE L'OPTIQUE.

1. Si les vibrations du milieu élastique sont transversales il faut adjoindre aux équations (2) du 1[er] article l'équation

$$(1)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 .$$

On peut alors éliminer la fonction v et l'on trouve les deux équations

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u + (c^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \Delta w + (b^2 - a^2) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right). \end{cases}$$

Soient $\tilde{\omega}$, σ un système d'intégrales des équations

$$(2)\qquad \begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \tilde{\omega} + (c^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial z}\right), \\ \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = a^2 \Delta \sigma + (b^2 - a^2) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial z}\right). \end{cases}$$

Il suffit de prendre

$$(3) \qquad u = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} \quad , \quad v = -\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma}{\partial z} \quad , \quad w = \frac{\partial \sigma}{\partial y}$$

pour obtenir un système d'intégrales des équations (2) du premier article qui satisfont à la condition (1) posée ci–dessus.

Réciproquement démontrons qu'à tout système d'intégrales u, v, w des équations de LAMÉ, qui vérifie la condition (1), correspondent deux fonctions $\tilde{\omega}$, σ qui satisfont aux équations (2) et qui sont liées à u, v, w par les relations (3).

En effet, u, v, w étant données, prenons deux fonctions $\tilde{\omega}_1$, σ_1 telles que

$$(4) \qquad u = \frac{\partial \tilde{\omega}_1}{\partial y} \quad , \quad v = -\frac{\partial \tilde{\omega}_1}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial z} \quad , \quad w = \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} .$$

On pourra ajouter à $\tilde{\omega}_1$ et σ_1 deux fonctions $\tilde{\omega}_2(x, z)$, $\sigma_2(x, z)$ qui remplissent la condition

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial z} = 0$$

sans que les relations (4) soient altérées.

C'est pourquoi, en posant

$$\tilde{\omega}_3 = \tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2 \quad , \quad \sigma_3 = \sigma_1 + \sigma_2 ,$$

on aura

$$u = \frac{\partial \tilde{\omega}_3}{\partial y} \quad , \quad v = -\frac{\partial \tilde{\omega}_3}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_3}{\partial z} \quad , \quad w = \frac{\partial \sigma_3}{\partial y} .$$

En substituant les valeurs (4) dans les équations de LAMÉ, on trouvera

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 \tilde{\omega}_1}{\partial t^2} - c^2 \Delta \tilde{\omega}_1 - (c^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\omega}_1}{\partial z}\right)\right] = 0 ,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 \tilde{\omega}_1}{\partial t^2} - c^2 \Delta \tilde{\omega}_1 - (c^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\omega}_1}{\partial z}\right)\right]$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial t^2} - a^2 \Delta \sigma_1 - (b^2 - a^2) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\omega}_1}{\partial z}\right)\right] = 0 ,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial t^2} - a^2 \Delta \sigma_1 - (b^2 - a^2) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\omega}_1}{\partial z}\right)\right] = 0 .$$

Par suite

$$\frac{\partial^2 \tilde{\omega}_1}{\partial t^2} - c^2 \Delta \tilde{\omega}_1 - (c^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\omega}_1}{\partial z}\right) = f(x, z) ,$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial t^2} - a^2 \Delta \sigma_1 - (b^2 - a^2) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\omega}_1}{\partial z}\right) = \varphi(x, z) ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 .$$

Mais il est toujours possible de prendre $\tilde{\omega}_2$, σ_2, telles que

$$\frac{\partial^2 \tilde{\omega}_2}{\partial t^2} - c^2 \Delta \tilde{\omega}_2 - (c^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial z}\right) = -f(x, z) ,$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial t^2} - a^2 \Delta \sigma_2 - (b^2 - a^2) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial z}\right) = -\varphi(x, z) .$$

Donc on aura que $\tilde{\omega}_3, \sigma_3$ rempliront les équations (2), ce qu'il fallait démontrer.

2. D'après cela on conclut qu'il suffit d'intégrer le système (2) pour intégrer les équations de l'optique. Appliquons les formules (2) de l'article précédent. On aura que

$$(5)\quad \begin{cases} u = u' + u'' = \int \psi_1 f(t + u_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta + \int \overline{\psi}_1 \overline{f}(t + \bar{u}_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta, \\ v = v' + v'' = \int \psi_2 f(t + u_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta + \int \overline{\psi}_2 \overline{f}(t + \bar{u}_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta \end{cases}$$

formeront un système d'intégrales des équations (2).

Même

$$\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y}$$

seront des intégrales des équations (2). Pour calculer ces quantités, remarquons que l'on a

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \quad \mathrm{W} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\mathrm{U} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

où

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial (v' + v'')}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial (v' + v'')}{\partial z}.$$

Mais

$$\frac{\partial v'}{\partial x} = \int \frac{\partial}{\partial x} [\psi_2 f(u_1 + t, \xi, \zeta)]\, d\xi\, d\zeta$$

$$= \int \left[\frac{\partial \psi_2}{\partial x} f(u_1 + t, \xi, \zeta) + \psi_2 \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] d\xi\, d\zeta.$$

Or il est aisé de voir que

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x} = -\frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} \quad , \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{\partial u_1}{\partial \xi}.$$

Par suite

$$\frac{\partial v'}{\partial x} = \int \left[-\frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} f(t + u_1, \xi, \zeta) - \psi_2 \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right] d\xi\, d\zeta.$$

En supposant f continue et nulle pour ξ, ζ infinies, on aura par une intégration par parties

$$(6)\quad \frac{\partial v'}{\partial x} = \int \psi_2 f'_\xi (t + u_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta.$$

Un calcul tout à fait analogue nous conduit aux équations

$$(6')\quad \frac{\partial v''}{\partial x} = \int \overline{\psi}_2 \overline{f}'_\xi (t + \bar{u}_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta,$$

$$(7)\quad \frac{\partial v'}{\partial z} = \int \psi_2 f'_\zeta (t + u_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta,$$

$$(7')\quad \frac{\partial v''}{\partial z} = \int \overline{\psi}_2 \overline{f}'_\zeta (t + \bar{u}_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta.$$

Dans les formules précédentes on a désigné par

$$f'_\xi, \bar{f}'_\xi, f'_\zeta, \bar{f}'_\zeta,$$

les dérivées partielles des fonctions $f, \bar{f}$ par rapport à ξ, ζ calculées en regardant u_1, ξ, ζ comme des variables indépendentes.

On aura donc

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = \mathrm{W} + \displaystyle\int \psi_2 f'_\xi (t+u_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta + \int \bar{\psi}_2 \bar{f}'_\xi (t+\bar{u}_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta, \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} = -\mathrm{U} + \displaystyle\int \psi_2 f'_\zeta (t+u_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta + \int \bar{\psi}_2 \bar{f}'_\zeta (t+\bar{u}_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta. \end{cases}$$

Par l'addition des expression (5) avec les expressions (8) dans lesquelles on ait remplacé les fonctions arbitraires f et $\bar{f}$ par les autres fonctions arbitraires $g, \bar{g}$ on trouvera les intégrales suivantes des équations (2)

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} \tilde{\omega} = & \int \Big[-\frac{\mu^2 b}{a} \operatorname{sn} u_2 \operatorname{cn} u_3 f(t+u_1, \xi, \zeta) - \frac{k^2}{b} \operatorname{sn} u_2 \operatorname{cn} u_2 \frac{\partial}{\partial t} g(t+u_1, \xi, \zeta) \\ & \qquad - \operatorname{cn} u_2 \operatorname{dn} u_3\, g'_\xi (t+u_1, \xi, \zeta) \Big] \frac{\operatorname{sn} u_3}{a u_1 \Delta}\, d\xi\, d\zeta \\ & + \int \Big[\operatorname{dn} \bar{u}_2 \operatorname{cn} \bar{u}_3 \bar{f}(t+\bar{u}_1, \xi, \zeta) + \frac{\operatorname{cn} \bar{u}_2 \operatorname{dn} \bar{u}_2}{c} \frac{\partial}{\partial t} \bar{g}(t+\bar{u}_1, \xi, \zeta) \\ & \qquad - \operatorname{cn} \bar{u}_2 \operatorname{sn} \bar{u}_3\, \bar{g}'_\xi (t+\bar{u}_1, \xi, \zeta) \Big] \frac{\operatorname{dn} \bar{u}_3}{c \bar{u}_1 \bar{\Delta}}\, d\xi\, d\zeta, \\ \sigma = & \int \Big[\operatorname{dn} u_2 \operatorname{cn} u_3 f(t+u_1, \xi, \zeta) - \frac{\operatorname{cn} u_2 \operatorname{dn} u_2}{a} \frac{\partial}{\partial t} g(t+u_1, \xi, \zeta) \\ & \qquad - \operatorname{cn} u_2 \operatorname{sn} u_3\, g'_\zeta (t+u_1, \xi, \zeta) \Big] \frac{\operatorname{dn} u_3}{a u_1 \Delta}\, d\xi\, d\zeta \\ & + \int \Big[-\frac{\bar{\mu}^2 b}{c} \operatorname{sn} \bar{u}_2 \operatorname{cn} \bar{u}_3 \bar{f}(t+\bar{u}_1, \xi, \zeta) + \frac{\bar{k}^2}{b} \operatorname{sn} \bar{u}_2 \operatorname{cn} \bar{u}_2 \frac{\partial}{\partial t} g(t+\bar{u}_1, \xi, \zeta) \\ & \qquad - \operatorname{cn} \bar{u}_2 \operatorname{dn} \bar{u}_3\, \bar{g}'_\zeta (t+u_1, \xi, \zeta) \Big] \frac{\operatorname{sn} \bar{u}_3}{c \bar{u}_1 \Delta}\, d\xi\, d\zeta. \end{aligned} \right.$$

3. Il suffit maintenant de se rappeler que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - (c^2 - b^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right],$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - b^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (b^2 - a^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right]$$

pour calculer les dérivées

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y}, \frac{\partial \sigma}{\partial y}.$$

En supposant que les dérivées $f'_\xi, \bar{f}'_\xi, f'_\zeta, \bar{f}'_\zeta, g'_\xi, \bar{g}'_\xi, g'_\zeta, \bar{g}'_\zeta$, soient continues dérivables et s'annullent pour ξ, ζ infinies on trouvera par des intégrations par parties

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial y} &= \int\Big\{\Big[-\frac{k^2}{b}\,\mathrm{sn}\,u_2 f'_t - \mathrm{dn}\,u_3 f'_\xi\Big]\frac{\mathrm{cn}\,u_2\,\mathrm{sn}\,u_3}{a u_1 \Delta} \\
&+ \frac{1}{c^2}\Big[-\frac{\mu^2 b}{a}\,\mathrm{sn}\,u_2\,\mathrm{sn}\,u_3\,(g''_t - c^2 g''_\xi - b^2 g''_\zeta) - (c^2-b^2)\,\mathrm{dn}\,u_2\,\mathrm{dn}\,u_3\, g''_{\xi\zeta}\Big]\frac{\mathrm{cn}\,u_3}{a u_1\Delta}\Big\}\,d\xi\,d\zeta \\
&+ \int\Big\{\Big[\frac{1}{c}\,\mathrm{dn}\,\bar{u}_2\,\bar{f}'_t - \mathrm{sn}\,\bar{u}_3\,\bar{f}'_\xi\Big]\frac{\mathrm{cn}\,\bar{u}_2\,\mathrm{dn}\,\bar{u}_3}{c\bar{u}_1\bar{\Delta}} + \frac{1}{c^2}\Big[\mathrm{dn}\,\bar{u}_2\,\mathrm{dn}\,\bar{u}_3\,(\bar{g}''_t - c^2\bar{g}''_\xi - b^2\bar{g}''_\zeta) \\
&\qquad + (c^2-b^2)\frac{\bar{\mu}^2 b}{c}\,\mathrm{sn}\,\bar{u}_2\,\mathrm{sn}\,\bar{u}_3\,\bar{g}''_{\xi\zeta}\Big]\frac{\mathrm{cn}\,\bar{u}_3}{c\bar{u}_1\bar{\Delta}}\Big\}\,d\xi\,d\zeta\,, \\
\frac{\partial\sigma}{\partial y} &= \int\Big\{\Big[-\frac{1}{a}\,\mathrm{dn}\,u_2 f'_t - \mathrm{sn}\,u_3 f'_\zeta\Big]\frac{\mathrm{cn}\,u_2\,\mathrm{dn}\,u_3}{a u_1\Delta} \\
&+ \frac{1}{a^2}\Big[\mathrm{dn}\,u_2\,\mathrm{dn}\,u_3\,(g''_t - b^2 g''_\xi - a^2 g''_\zeta) - \frac{\mu^2 b}{a}(b^2-a^2)\,\mathrm{sn}\,u_2\,\mathrm{sn}\,u_3\, g''_{\xi\zeta}\Big]\frac{\mathrm{cn}\,u_3}{a u_1\Delta}\Big\}\,d\xi\,d\zeta \\
&+ \int\Big\{\Big[\frac{k^2}{b}\,\mathrm{sn}\,\bar{u}_2\,\bar{f}'_t - \mathrm{dn}\,\bar{u}_3\,\bar{f}'_\zeta\Big]\frac{\mathrm{cn}\,\bar{u}_2\,\mathrm{sn}\,\bar{u}_3}{c\bar{u}_1\bar{\Delta}} + \frac{1}{a^2}\Big[-\frac{\bar{\mu}^2 b}{c}\,\mathrm{sn}\,\bar{u}_2\,\mathrm{sn}\,\bar{u}_3\,(\bar{g}''_t - b^2\bar{g}''_\xi - a^2\bar{g}''_\zeta) \\
&\qquad + (b^2-a^2)\,\mathrm{dn}\,\bar{u}_2\,\mathrm{dn}\,\bar{u}_3\,\bar{g}''_{\xi\zeta}\Big]\frac{\mathrm{cn}\,\bar{u}_2}{c\bar{u}_1\bar{\Delta}}\Big\}\,d\xi\,d\zeta
\end{aligned}
\right.
$$

où $g''_t, g''_\xi, g''_{\xi\zeta}$, etc. sont les dérivées partielles du 2[e] ordre de la fonction g par rapport aux variables t, ξ, ζ, en supposant u_1, ξ, ζ des variables indépendantes.

4. Il est aisé maintenant de déterminer les limites de $\omega, \sigma, \frac{\partial\bar{\omega}}{\partial y}, \frac{\partial\sigma}{\partial y}$ lorsqu'on s'approche indéfiniment aux points du plan xz. On a (voir article 7, § 4.)

$$
\begin{aligned}
(11)\qquad \lim_{y=\pm 0}\bar{\omega} &= \int_{\sigma_1}\Big[\Big(\frac{k}{c}\,\mathrm{sn}\,u_2\, g'_t + b g'_\xi\Big) du_1\, du_2 \pm b\,\mathrm{dn}\,\bar{u}_3\,\bar{f} d\bar{u}_1\, d\bar{u}_3\Big] \\
&+ \int_{\sigma_2}\Big[\pm b\mu\,\mathrm{sn}\,u_3 f du_1\, du_3 + \Big(\frac{b}{c}\,\mathrm{dn}\,\bar{u}_2\,\bar{g}'_t + b\bar{g}'_\xi\Big) d\bar{u}_1\, d\bar{u}_2\Big] \\
&+ \int_{\sigma_3}\Big[\pm b\,\mathrm{dn}\,\bar{u}_3\,\bar{f} d\bar{u}_1\, d\bar{u}_3 - \Big(b g'_\xi + \frac{k}{c}\,\mathrm{sn}\,u_2\, g'_t\Big) du_1\, du_2\Big] \\
&+ \int_{\sigma_4}\Big[\mp b\mu\,\mathrm{sn}\,u_3 f du_1\, du_3 + \Big(\frac{b}{c}\,\mathrm{dn}\,\bar{u}_2\,\bar{g}'_t - b\bar{g}'_\xi\Big) d\bar{u}_1\, d\bar{u}_2\Big],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(12)\qquad \lim_{y=\pm 0}\sigma &= \int_{\sigma_1}\Big[\Big(-\frac{b}{a}\,\mathrm{dn}\,u_2\, g'_t + b g'_\zeta\Big) du_1\, du_2 \pm b\bar{\mu}\,\mathrm{sn}\,\bar{u}_3\,\bar{f} d\bar{u}_1\, d\bar{u}_3\Big] \\
&+ \int_{\sigma_2}\Big[\pm b\,\mathrm{dn}\,u_3 f du_1\, du_3 + \Big(-\frac{\bar{k}}{a}\,\mathrm{sn}\,\bar{u}_2\,\bar{g}'_t + b\bar{g}'_\zeta\Big) d\bar{u}_1\, d\bar{u}_2\Big] \\
&+ \int_{\sigma_3}\Big[\Big(-\frac{b}{a}\,\mathrm{dn}\,u_2\, g'_t - b g'_\zeta\Big) du_1\, du_2 \mp b\bar{\mu}\,\mathrm{sn}\,\bar{u}_3\,\bar{f} d\bar{u}_1\, d\bar{u}_3\Big] \\
&+ \int_{\sigma_4}\Big[\pm b\,\mathrm{dn}\,u_3 f du_1\, du_3 + \Big(\frac{\bar{k}}{a}\,\mathrm{sn}\,\bar{u}_2\,\bar{g}'_t - b\bar{g}'_\zeta\Big) d\bar{u}_1\, d\bar{u}_2\Big],
\end{aligned}
$$

$$(13)\qquad \lim_{y=\pm 0} \frac{\partial \tilde\omega}{\partial y} = \int_{\sigma_1}\Big\{ \left[\frac{k}{c} \operatorname{sn} u_2 f_t' + b f_\xi'\right] du_1\, du_2$$

$$\pm \left[\frac{b}{c^2} \operatorname{dn} \bar u_3 (\bar g_t'' - c^2 \bar g_\xi'' - b^2 \bar g_\zeta'') - \frac{c^2-b^2}{c^2} b\bar\mu \operatorname{sn} \bar u_3\, \bar g_{\xi\zeta}''\right] d\bar u_1\, d\bar u_3 \Big\}$$

$$+ \int_{\sigma_2}\Big\{ \pm \left[\frac{b\mu}{c^2} \operatorname{sn} u_3 (g_t'' - c^2 g_\xi'' - b^2 g_\zeta'') - \frac{c^2-b^2}{c^2} b \operatorname{dn} u_3\, g_{\xi\zeta}''\right] du_1\, du_3$$

$$+ \left[\frac{b}{c} \operatorname{dn} \bar u_2\, \bar f_t' + b \bar f_\xi'\right] d\bar u_1\, d\bar u_2 \Big\} + \int_{\sigma_3}\Big\{ - \left[\frac{k}{c} \operatorname{sn} u_2 f_t' + b f_\xi'\right] du_1\, du_2$$

$$\pm \left[\frac{b}{c^2} \operatorname{dn} \bar u_3 (\bar g_t'' - c^2 \bar g_\xi'' - b^2 \bar g_\zeta'') + \frac{c^2-b^2}{c^2} b\bar\mu \operatorname{sn} \bar u_3\, \bar g_{\xi\zeta}''\right] d\bar u_1\, d\bar u_3 \Big\}$$

$$+ \int_{\sigma_4}\Big\{ \mp \left[\frac{b\mu}{c^2} \operatorname{sn} u_3 (g_t'' - c^2 g_\xi'' - b^2 g_\zeta'') + \frac{c^2-b^2}{c^2} b \operatorname{dn} u_3\, g_{\xi\zeta}''\right] du_1\, du_3$$

$$+ \left[\frac{b}{c} \operatorname{dn} \bar u_2\, \bar f_t' - b \bar f_\xi'\right] d\bar u_1\, d\bar u_2 \Big\},$$

$$(14)\qquad \lim_{y=\pm 0} \frac{\partial \sigma}{\partial y} = \int_{\sigma_1}\Big\{ \left[-\frac{b}{a} \operatorname{dn} u_2 f_t' + b f_\zeta'\right] du_1\, du_2$$

$$\pm \frac{1}{a^2} [b\bar\mu \operatorname{sn} \bar u_3 (\bar g_t' - b^2 \bar g_\xi'' - a^2 \bar g_\zeta'') + (b^2 - a^2) b \operatorname{dn} \bar u_3\, \bar g_{\xi\zeta}''] d\bar u_1\, d\bar u_3 \Big\}$$

$$+ \int_{\sigma_2}\Big\{ \pm \frac{1}{a^2} [b \operatorname{dn} u_3 (g_t'' - b^2 g_\xi'' - a^2 g_\zeta'') + b\mu (b^2 - a^2) \operatorname{sn} u_3\, g_{\xi\zeta}''] du_1\, du_3$$

$$+ \left[-\frac{\bar k}{a} \operatorname{sn} \bar u_2\, \bar f_t' + b \bar f_\zeta'\right] d\bar u_1\, d\bar u_2 \Big\} + \int_{\sigma_3}\Big\{ \left[-\frac{b}{a} \operatorname{dn} u_2 f_t' - b f_\zeta'\right] du_1\, du_2$$

$$\mp \frac{1}{a^2} [b\bar\mu \operatorname{sn} \bar u_3 (\bar g_t'' - b^2 \bar g_\xi'' - a^2 \bar g_\zeta'') - (b^2 - a^2) b \operatorname{dn} \bar u_3\, \bar g_{\xi\zeta}''] d\bar u_1\, d\bar u_3 \Big\}$$

$$+ \int_{\sigma_4}\Big\{ \pm \frac{1}{a^2} [b \operatorname{dn} u_3 (g_t'' - b^2 g_\xi'' - a^2 g_\zeta'') - b\mu (b^2 - a^2) \operatorname{sn} u_3\, g_{\xi\zeta}''] du_1\, du_3$$

$$+ \left[\frac{\bar k}{a} \operatorname{sn} \bar u_2\, \bar f_t' - b \bar f_\zeta'\right] d\bar u_1\, d\bar u_2 \Big\}.$$

5. On peut conclure que les fonctions (9) remplissent les conditions suivantes:

1° Elles sont finies monodromes et continues pour toutes les valeurs de x, z et pour $y > 0$.

2° Elles satisfont aux équations différentielles (2).

3° Les valeurs de ces fonctions et de leurs dérivées par rapport à y, pour $y = 0$ dépendent de quatre fonctions arbitraires $f, \bar f, g, \bar g$ de trois variables indépendentes.

Pour prouver tout à fait rigoureusement qu'on a trouvé ainsi les intégrales générales, il faudrait démontrer que les valeurs de $\tilde\omega$ et de σ et de leurs dérivées par rapport à y pour $y = 0$ sont arbitraires. Pour qu'il n'y ait pas d'ambiguité, nous faisons noter que lorsque nous avons parlé dans l'introduction d'intégrales générales, nous avons entendu les intégrales qui satisfont aux trois conditions précédentes.

ART. 9. – APPLICATION AUX ÉQUATIONS DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE.

1. L'expérience montre que les cristaux transparents peuvent être regardés approximativement comme des corps isotropes pour le magnétisme. Dans la théorie électromagnétique de la lumière on prouve que les équations de l'électrodynamique dans le cas d'un milieu qui n'est pas conducteur et qui est électriquement anisotrope et magnétiquement isotrope se réduisent aux équations de LAMÉ [5].

Il est tout à fait aisé de montrer que l'on peut appliquer les résultats que nous avons trouvés aux équations de l'électrodynamique pour un milieu qui n'est pas conducteur, même s'il n'est pas isotrope pour le magnétisme, pourvu que l'on suppose, comme fait M. HERTZ, que les axes de symétrie de l'énergie électrique et magnétique coïncident entre eux.

Partons des équations (20 *a*), (20 *b*) données par M. HERTZ dans son mémoire sur les équations de l'électrodynamique pour les corps en repos [6]:

$$(1\,a)\qquad \begin{cases} A\mu_1 \dfrac{\partial L}{\partial t} = \dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial z}, \\ A\mu_2 \dfrac{\partial M}{\partial t} = \dfrac{\partial X}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial x}, \\ A\mu_3 \dfrac{\partial N}{\partial t} = \dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y}, \end{cases}$$

$$(1\,b)\qquad \begin{cases} A\varepsilon_1 \dfrac{\partial X}{\partial t} = \dfrac{\partial M}{\partial z} - \dfrac{\partial N}{\partial y}, \\ A\varepsilon_2 \dfrac{\partial Y}{\partial t} = \dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial L}{\partial z}, \\ A\varepsilon_3 \dfrac{\partial Z}{\partial t} = \dfrac{\partial L}{\partial y} - \dfrac{\partial M}{\partial x}, \end{cases}$$

auxquelles il faut ajouter

$$(2\,a)\qquad \mu_1 \frac{\partial L}{\partial x} + \mu_2 \frac{\partial M}{\partial y} + \mu_3 \frac{\partial N}{\partial z} = 0,$$

$$(2\,b)\qquad \varepsilon_1 \frac{\partial X}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial Y}{\partial y} + \varepsilon_3 \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

Posons

$$\sqrt{\mu_1}\, X = X' \quad , \quad \sqrt{\mu_2}\, Y = Y' \quad , \quad \sqrt{\mu_3}\, Z = Z',$$

$$\mu_1 \sqrt{\mu_2 \mu_3}\, L = u \quad , \quad \mu_2 \sqrt{\mu_3 \mu_1}\, M = v \quad , \quad \mu_3 \sqrt{\mu_1 \mu_2}\, N = w,$$

$$\sqrt{\mu_1}\, \xi = x \quad , \quad \sqrt{\mu_2}\, \eta = y \quad , \quad \sqrt{\mu_3}\, \zeta = z;$$

(5) Voir VOLKMANN, *Vorlesungen über die Theorie des Lichtes*, § 56.

(6) « Göttinger Nachr. », v. 19 März 1890. « Wiedemanns Ann. », T. 40. p. 577.

on aura

$$A\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial Z'}{\partial \eta}-\frac{\partial Y'}{\partial \zeta},$$

$$A\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial X'}{\partial \zeta}-\frac{\partial Z'}{\partial \xi},$$

$$A\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial Y'}{\partial \xi}-\frac{\partial X'}{\partial \eta},$$

$$A\varepsilon_1\mu_2\mu_3\frac{\partial X'}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial \zeta}-\frac{\partial w}{\partial \eta},$$

$$A\varepsilon_2\mu_3\mu_1\frac{\partial Y'}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \zeta},$$

$$A\varepsilon_3\mu_1\mu_2\frac{\partial Z'}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\partial v}{\partial \xi}.$$

Remplaçons

$$A^2\varepsilon_1\mu_2\mu_3\quad,\quad A^2\varepsilon_2\mu_3\mu_1\quad,\quad A^2\varepsilon_3\mu_1\mu_2$$

par

$$\frac{1}{a^2},\ \frac{1}{b^2},\ \frac{1}{c^2}.$$

Les égalités précédentes deviendront

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial W}{\partial \eta}-b^2\frac{\partial V}{\partial \zeta},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial U}{\partial \zeta}-c^2\frac{\partial W}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=b^2\frac{\partial V}{\partial \xi}-a^2\frac{\partial U}{\partial \eta},$$

$$U=\frac{\partial v}{\partial \zeta}-\frac{\partial w}{\partial \eta},$$

$$V=\frac{\partial w}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \zeta},$$

$$W=\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\partial v}{\partial \xi}$$

et l'égalité ($2\,a$) pourra s'écrire

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial v}{\partial \eta}+\frac{\partial w}{\partial \zeta}=0.$$

Par conséquent on trouve les équations de LAMÉ.

2. Examinons maintenant un cas plus général. Supposons que le corps soit conducteur et les axes de symétrie par rapport à la conductibilité coïncident avec ceux relatifs aux énergies électrique et magnétique. En prenant les lignes x, y, z parallèles à ces axes, les équations ($7\,a$), ($7\,b$) du mémoire de M. HERTZ pourront s'écrire

$$(3\,a)\quad \begin{cases} A\mu_1 \dfrac{\partial L}{\partial t} = \dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial z}, \\ A\mu_2 \dfrac{\partial M}{\partial t} = \dfrac{\partial X}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial x}, \\ A\mu_3 \dfrac{\partial N}{\partial t} = \dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y}, \end{cases}$$

$$(3\,b)\quad \begin{cases} A\varepsilon_1 \dfrac{\partial X}{\partial t} + 4\pi A\lambda_1 (X - X') = \dfrac{\partial M}{\partial z} - \dfrac{\partial N}{\partial y}, \\ A\varepsilon_2 \dfrac{\partial Y}{\partial t} + 4\pi A\lambda_2 (Y - Y') = \dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial L}{\partial z}, \\ A\varepsilon_3 \dfrac{\partial Z}{\partial t} + 4\pi A\lambda_3 (Z - Z') = \dfrac{\partial L}{\partial y} - \dfrac{\partial M}{\partial x}. \end{cases}$$

Posons

$$\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_3}\, X = u \quad , \quad \varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_3 \varepsilon_1}\, Y = v \quad , \quad \varepsilon_3 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\, Z = w ,$$

$$\sqrt{\varepsilon_1}\, L = L' \quad , \quad \sqrt{\varepsilon_2}\, M = M' \quad , \quad \sqrt{\varepsilon_3}\, N = N',$$

$$\sqrt{\varepsilon_1}\, \xi = x \quad , \quad \sqrt{\varepsilon_2}\, \eta = y \quad , \quad \sqrt{\varepsilon_3}\, \zeta = z ,$$

$$A^2 \mu_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = \frac{1}{a^2} \quad , \quad A^2 \mu_2 \varepsilon_3 \varepsilon_1 = \frac{1}{b^2} \quad , \quad A^2 \mu_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 = \frac{1}{c^2} ,$$

$$4\pi \frac{\lambda_1}{\varepsilon_1} = k_1 \quad , \quad 4\pi \frac{\lambda_2}{\varepsilon_2} = k_2 \quad , \quad 4\pi \frac{\lambda_3}{\varepsilon_3} = k_3 ;$$

on trouvera par le même procédé que nous avons suivi dans le paragraphe précédent

$$(4\,a)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k_1 \dfrac{\partial u}{\partial t} = b^2 \dfrac{\partial V}{\partial \zeta} - c^2 \dfrac{\partial W}{\partial \eta}, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} + k_2 \dfrac{\partial v}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial W}{\partial \xi} - a^2 \dfrac{\partial U}{\partial \zeta}, \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k_3 \dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial U}{\partial \eta} - b^2 \dfrac{\partial V}{\partial \xi}, \end{cases}$$

$$(4\,b)\quad \begin{cases} U = \dfrac{\partial w}{\partial \eta} - \dfrac{\partial v}{\partial \zeta}, \\ V = \dfrac{\partial u}{\partial \zeta} - \dfrac{\partial w}{\partial \xi}, \\ W = \dfrac{\partial v}{\partial \xi} - \dfrac{\partial u}{\partial \eta}. \end{cases}$$

Supposons

$$k_1 = k_2 = k_3 = k .$$

Posons

$$u = f(t)\, u_1(\xi, \eta, \zeta),$$
$$v = f(t)\, v_1(\xi, \eta, \zeta),$$
$$w = f(t)\, w_1(\xi, \eta, \zeta),$$

u_1, v_1, w_1, étant des fonctions indépendantes de t.

En substituant ces valeurs dans les équations $(4\,a)$, $(4\,b)$ on trouvera

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + k\frac{\partial f}{\partial t} + \alpha f = 0,$$

$$(5\,a) \qquad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \alpha u_1 + b^2 \frac{\partial V_1}{\partial \zeta} - c^2 \frac{\partial W_1}{\partial \eta}, \\ 0 &= \alpha v_1 + c^2 \frac{\partial W_1}{\partial \xi} - a^2 \frac{\partial U_1}{\partial \zeta}, \\ 0 &= \alpha w_1 + a^2 \frac{\partial U_1}{\partial \eta} - b^2 \frac{\partial V_1}{\partial \xi}, \end{aligned} \right.$$

$$(5\,b) \qquad \left\{ \begin{aligned} U_1 &= \frac{\partial w_1}{\partial \eta} - \frac{\partial v_1}{\partial \zeta}, \\ V_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} - \frac{\partial w_1}{\partial \xi}, \\ W_1 &= \frac{\partial v_1}{\partial \xi} - \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \end{aligned} \right.$$

où α est une quantité constante.

Même les équations de Lamé se réduisent à la forme précédente en posant

$$u = e^{\sqrt{-\alpha}\,t}\,u_1,$$

$$v = e^{\sqrt{-\alpha}\,t}\,v_1,$$

$$w = e^{\sqrt{-\alpha}\,t}\,w_1.$$

Particularisons les fonctions arbitraires qui paraissent dans les intégrales de Lamé en prenant

$$f(x) = \bar{f}(x) = e^{\sqrt{-\alpha}\,x},$$

$$\varphi(x) = \bar{\varphi}(x) = 0$$

on trouvera, après avoir divisé par $e^{\sqrt{-\alpha}\,t}$, des intégrales des équations $(5\,a)$, $(5\,b)$ et par là on aura des intégrales des équations $(4\,a)$, $(4\,b)$. On pourra appliquer évidemment le même procédé aux intégrales trouvées dans le art. 8 et par une méthode bien connue on obtiendra ainsi l'intégration des équations $(4\,a)$, $(4\,b)$.

Les résultats qu'on a trouvés dans les articles précédents peuvent donc s'étendre aisément aux équations de l'électrodynamique lorsque les rapports k_1, k_2, k_3 sont egaux.