XIV.

SUR LES INTÉGRALES QUADRATIQUES DES ÉQUATIONS DE LA MÉCANIQUE

« Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris, » t. CXXIV (1897), pp. 1434-1438.

M. PAINLEVÉ vient de découvrir une classe extrêmement remarquable de problèmes dynamiques, qui admettent des intégrales quadratiques en dehors de celle des forces vives. Le résultat obtenu par M. PAINLEVÉ, malgré sa grande généralité, est encore loin d'épuiser la question. Je demande à l'Académie la permission d'y revenir.

Soit en variables canoniques x_i, p_i,

$$H \equiv \sum_{rs}^{n}{}_{1} a^{(rs)} p_r p_s$$

une force vive, dont les géodésiques (j'envisage ce cas pour plus de netteté) admettent l'intégrale quadratique

$$H_1 \equiv \sum_{rs}^{n}{}_{1} \alpha^{(rs)} p_r p_s = \text{const.}$$

Considérons l'équation $\| \alpha^{(rs)} - \varrho a^{(rs)} \| = 0$ de $n^{\text{ième}}$ degré en ϱ et appelons $\varrho_1, \dots, \varrho_{\nu_1}, \varrho_{\nu_1+1}, \dots, \varrho_{\nu_2}, \dots, \varrho_{\nu_{l-1}+1}, \dots, \varrho_{\nu_{q-1}+1}, \dots, \varrho_{\nu_q}$ $(\nu_q = n)$ ses racines, en supposant que $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{\nu_1}$ et ainsi $\varrho_{\nu_1+1}, \varrho_{\nu_1+2}, \dots, \varrho_{\nu_2}, \dots$, soient égales entre elles, de façon que les racines distinctes soient au nombre de q.

Il est bien connu qu'on peut toujours déterminer n^2 quantités $\lambda_h^{(r)}$ telles qu'en posant

$$\Theta_l = \sum_{h=\nu_{l-1}+1}^{\nu_l} \left[\sum_{r=1}^{n} \lambda_h^{(r)} p_r \right]^2 \qquad (l = 1, 2, \dots, q),$$

on ait

$$H = \sum_1^q {}_l\, \Theta_l\,, \qquad H_1 = \sum_1^q {}_l\, \varrho_{\nu_l} \Theta_l\,.$$

J'ai démontré que les conditions nécessaires et suffisantes pour que $H_1 = \text{const.}$ soit une intégrale quadratique des géodésiques de H sont en tous cas exprimées par

$$\text{(I)} \qquad (\varrho_h - \varrho_i)\gamma_{hij} + (\varrho_i - \varrho_j)\gamma_{ijh} + (\varrho_j - \varrho_h)\gamma_{jhi} = 0$$

$$(h, i, j = 1, 2, \ldots, n \quad \text{et} \quad h \gtrless i \gtrless j)\,,$$

$$\text{(II)} \qquad \sum_1^n {}_r\, \frac{\partial \varrho_h}{\partial x_r} \lambda_i^{(r)} = 2(\varrho_h - \varrho_i)\gamma_{ihh} \qquad (h, i = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

où

$$2\gamma_{hij} = \sum_1^n {}_{rs} \left\{ \frac{\partial \lambda_{h|r}}{\partial x_s} (\lambda_i^{(r)} \lambda_j^{(s)} - \lambda_j^{(r)} \lambda_i^{(s)}) + \frac{\partial \lambda_{j|r}}{\partial x_s} (\lambda_i^{(r)} \lambda_h^{(s)} - \lambda_h^{(r)} \lambda_i^{(s)}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \lambda_{i|r}}{\partial x_s} (\lambda_j^{(r)} \lambda_h^{(s)} - \lambda_h^{(r)} \lambda_j^{(s)}) \right\},$$

$\lambda_{h|r}$ étant le mineur complémentaire de $\lambda_h^{(r)}$, dans le déterminant des n^2 λ, divisé par ce même déterminant.

Les systèmes (I), (II) peuvent s'intégrer complètement dans l'hypothèse particulière qu'il soit possible, par un choix convenable des variables canoniques x_i, p_i, réduire chaque Θ_l à ne contenir que $\nu_l - \nu_{l-1}$ des variables p_i. Les $\lambda_h^{(r)}$ se partagent alors en q groupes de $(\nu_l - \nu_{l-1})^2$ éléments, qui correspondent aux diverses Θ_l, et l'on a

$$\Theta_l = \sum_{\nu_{l-1}+1}^{\nu_l} {}_h \left\{ \sum_{\nu_{l-1}+1}^{\nu_l} {}_r\, \lambda_h^{(r)} p_r \right\}^2,$$

ou, si l'on fait

$$K_l^{(rs)} = \sum_{\nu_{l-1}+1}^{\nu_l} {}_h\, \lambda_h^{(r)} \lambda_h^{(s)} \qquad (l = 1, 2, \ldots, q;\ r, s = \nu_{l-1} + 1, \ldots, \nu_l),$$

$$\Theta_l = \sum_{\nu_{l-1}+1}^{\nu_l} {}_{rs}\, K_l^{(rs)} p_r p_s\,.$$

La recherche des forces vives H, dont les géodésiques admettent une intégrale quadratique, se réduit, dans ce cas, à la détermination de la forme la plus générale des fonctions $K_l^{(rs)}$, pour lesquelles soient satisfaites les équations (I), (II), d'où l'on ait éliminé les ϱ.

En appelant Δ le discriminant de Θ et en posant

$$\Lambda_h = \Delta_l^{\frac{1}{\nu_l - \nu_{l-1}}}$$

(où h peut prendre indifféremment toutes les valeurs, depuis $\nu_{l-1} + 1_l$ jusqu'à ν_l), on peut donner au résultat de l'élimination la forme suivante

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 \Lambda_h}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{1}{\Lambda_i} \dfrac{\partial \Lambda_i}{\partial x_j} \dfrac{\partial \Lambda_h}{\partial x_i} + \dfrac{1}{\Lambda_j} \dfrac{\partial \Lambda_j}{\partial x_i} \dfrac{\partial \Lambda_h}{\partial x_j} \\[2ex] (h = 1, 2, \ldots, n;\ \text{ou, ce qui suffit, } h = \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q) \end{array} \right.$$

pour toutes les couples i, j qui n'appartiennent pas au même intervalle; et, en outre,

$$(2)\qquad \frac{\partial \log K_l^{(rs)}}{\partial x_i} = \frac{1}{\nu_l - \nu_{l-1}} \frac{\partial \log \Delta_l}{\partial x_i},$$

pour toutes les valeurs de i, qui ne sont pas comprises dans l'intervalle $(\nu_{l-1} + 1, \nu_l)$.

Si l'on suppose, ce qui est toujours permis, que l'intégrale générale de (1) soit définie par q équations de la forme

$$\sum_1^q {}_l\, \Lambda_{\nu_l} \varphi_l^m = \text{const.} \qquad (m = 1, 2, \ldots, q),$$

on reconnaît aisément que les φ_l^m doivent être de la forme signalée par M. Painlevé, et, à cause des équations (2), on retrouve nécessairement les forces vives construites par cet auteur.

Mais les systèmes (I), (II) comportent bien d'autres solutions. Soit par exemple $q = n$; l'existence d'un système de variable x_i, p_i, propres à réduire chaque Θ_l à la forme $K_l p_l^2$, est caractérisée, d'après M. Ricci, par ce fait que $\gamma_{hij} = 0$ $(h \gtrless i \gtrless j)$. Or, il n'est pas indispensable qu'il en soit ainsi pour satisfaire à (I), (II). Il suffit de considérer la force vive

$$H \equiv \mathcal{A} p^2 + \mathcal{B} q^2 + \mathcal{C} r^2,$$

d'un corps solide, ayant un point fixe; lorsque le moment résultant des forces extérieures, par rapport à ce point, est nul, ce qui correspond aux géodésiques de la force vive, il existe l'intégrale

$$H_1 \equiv \mathcal{A}^2 p^2 + \mathcal{B}^2 q^2 + \mathcal{C}^2 r^2 = \text{const.},$$

et l'on a, en supposant les moments d'inertie distincts, $n = q = 3$, $\varrho_1 = \mathcal{A}$, $\varrho_2 = \mathcal{B}$, $\varrho_3 = \mathcal{C}$. En vertu de la propriété invariante de l'équation

$$\| \alpha^{(rs)} - \varrho a^{(rs)} \| = 0,$$

si le couple H, H_1 rentre dans ceux de M. PAINLEVÉ, il devrait appartenir à la première classe $(q = n)$, c'est-à-dire être réductible à la forme de M. STÄCKEL, ou bien encore avoir les invariants γ_{123}, γ_{231}, γ_{312} tous nuls. Voilà précisément ce qui n'arrive pas, car en exprimant H, H_1 au moyen des angles d'EULER Θ, φ, Ψ, on trouve

$$\gamma_{123} = -\gamma_{213} = \frac{\sin\Theta}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{B} - \mathcal{C}),$$

$$\gamma_{231} = -\gamma_{321} = \frac{\sin\Theta}{2}(-\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C}),$$

$$\gamma_{312} = -\gamma_{132} = \frac{\sin\Theta}{2}(\mathcal{A} - \mathcal{B} + \mathcal{C}).$$

D'après ces remarques, la recherche de tous les cas où un problème de Mécanique admet une intégrale quadratique paraît une question trop compliquée pour qu'on puisse espérer en trouver prochainement une solution définitive.

(*22 février 1897*).