NOTA II.

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. VII (1° sem. 1898),

pp. 113-121 (*)

4. – Prescindiamo, per i sistemi $\boldsymbol{N}$, dall'assioma di ARCHIMEDE, e indichiamoli, in tal condizione, con $\boldsymbol{M}$. Son questi evidentemente sistemi assai generali, richiedendosi soltanto che i loro elementi sieno ordinati e costituiscano un corpo rispetto alla somma e alla sottrazione, cioè, ripetiamolo ancora una volta, rispetto a due operazioni, comunque definite, che sieno algoritmicamente identiche alla somma e alla sottrazione, talchè i segni $>$ e $<$, $+$ e $-$ continuino a soddisfare alle regole ordinarie.

Ogni sistema di tipo A, ovvero di tipo $\boldsymbol{N}$ è senz'altro un $\boldsymbol{M}$, ma non reciprocamente.

Consideriamo, per esempio, i monosemii a_ν con indice e caratteristica reali. Ad ogni aggregato di monosemii, i cui indici costituiscano un insieme ellittico, si può far corrispondere, come sappiamo, un numero a' di un nuovo sistema di tipo A. Se ci limitiamo a quegli a', che constano (cioè, si può anche dire in questo caso, sono somma) di *un numero finito* di monosemii a caratteristica intera e indice intero e positivo (o nullo), abbiamo ancora un insieme ordinato $V^{(1)}$, i cui elementi formano un corpo rispetto alla somma, alla sottrazione e alla moltiplicazione (⁶); dunque intanto un sistema di tipo $\boldsymbol{M}$. Esso non è però nè A, nè $\boldsymbol{N}$. Non è A, perchè in generale la divisione fa uscire dagli elementi dell'insieme; non è $\boldsymbol{N}$, poichè non vale l'assioma di ARCHIMEDE; e, per verità, fissiamo i tre elementi $\omega = 1_1$, $\omega' = 1$, $\omega'' = 2$. Si ha $\omega'' > \omega'$, ma, comunque si prenda il numero intero k, riman sempre (§ 2) $\omega > k(\omega'' - \omega')$.

Sia in generale ω un elemento di un sistema $\boldsymbol{M}$; anche $-\omega$ appartiene al sistema. Chiamerò, come di solito, valore assoluto di ω (e lo designerò con $|\omega|$) quello dei due numeri ω, $-\omega$, che non è negativo.

(*) Presentata dal corrispondente GIUSEPPE VERONESE nella seduta del 6 marzo 1898.

(⁶) È chiaro che $V^{(1)}$ coincide sostanzialmente col sistema dei numeri interi di VERONESE, infiniti di ordine finito; basterebbe designare ogni monosemio a_ν (dove a e ν si intendono ora interi e $\nu \geq 0$) con $a\infty_1^\nu$.

Due elementi non nulli ω ed ω' di $\boldsymbol{M}$ si diranno *finiti* tra di loro e si scriverà $\omega \doteq \omega'$, quando esiste un numero intero e positivo k, tale che il maggiore dei valori assoluti, poniamo $|\omega|$, sia più piccolo di $k|\omega'|$. Se non esiste un tal numero k, si dirà ω *infinito rispetto ad* ω' ($\omega \cdot\!> \omega'$), ovvero ω' *infinitesimo rispetto ad* ω ($\omega' <\!\cdot\, \omega$). Si vede facilmente che i segni $\doteq$, $\cdot\!>$ e $<\!\cdot$ si comportano al tutto come gli analoghi $=, >$ e $<$.

Fissato ad arbitrio un elemento ω di $\boldsymbol{M}$, è sempre possibile immaginare un sistema di tipo $\boldsymbol{N}$, che comprende ω ed è contenuto in $\boldsymbol{M}$. Infatti tale sistema sarà per lo meno costituito dagli elementi:

$$\ldots, \ -2\omega\,, \ -\omega\,, \ 0\,, \ \omega\,, \ 2\omega\,, \ \ldots,$$

che formano un corpo rispetto alla somma e alla sottrazione e soddisfanno all'assioma di ARCHIMEDE (per esempio, sotto la forma, indicata a § 1). Se tutti gli elementi di $\boldsymbol{M}$ sono finiti con ω, lo stesso $\boldsymbol{M}$ è un $\boldsymbol{N}$; in caso diverso esisterà un qualche elemento ω', non finito con ω, e potremo considerare un secondo sistema di tipo $\boldsymbol{N}$, che lo comprende. Due tali sistemi non hanno, all'infuori dello zero, alcun elemento comune, anzi è manifesto che gli elementi non nulli dell'uno sono tutti infiniti, ovvero tutti infinitesimi, rispetto ad ogni elemento non nullo dell'altro. Chiamerò *indipendenti* due qualunque sistemi $\boldsymbol{N}'$, $\boldsymbol{N}''$, che si trovino in questa condizione e scriverò $\boldsymbol{N}' \cdot\!\gtrless\!\cdot \boldsymbol{N}''$, secondochè gli elementi di $\boldsymbol{N}'$ sono infiniti od infinitesimi, rispetto a quelli di $\boldsymbol{N}''$.

Ancora, denominerò *intero* un sistema $\boldsymbol{M}$, se esiste una varietà, del resto qualunque, di sistemi $\boldsymbol{N}$ indipendenti (che dirò, per brevità, *generatori*), tali che ogni elemento di $\boldsymbol{M}$ sia somma di un numero finito di elementi di questi sistemi.

Nei sistemi interi rientrano come caso particolare quelli di tipo $\boldsymbol{N}$ che ammettono un unico sistema generatore e coincidono con esso. Intero è anche il sistema $V^{(1)}$, ricordato poc'anzi, i cui elementi risultano dalla somma di un numero finito di monosemii a_ν. Infatti tutti gli a_ν, che hanno un medesimo indice ν, costituiscono, al variare di a, un sistema di tipo $\boldsymbol{N}$; a valori diversi dell'indice corrispondono sistemi indipendenti; sono dunque sistemi generatori i singoli a_ν, ν potendo assumere i valori $0, 1, 2, \ldots$.

5. – Vengo finalmente al punto essenziale di questo scritto, che è di generalizzare la deduzione di un sistema A' da un dato A, usufruendo di un sistema intero $\boldsymbol{M}$, anzichè di un $\boldsymbol{N}$, come si è fatto a § 2.

Sieno $a, b, \ldots$ elementi di A; $\nu, \mu, \ldots$ elementi di $\boldsymbol{M}$. Formo in primo luogo i monosemii a_ν, adottando le stesse convenzioni ordinative e operative che a § 2. Definisco poi degli insiemi di elementi di M nel modo seguente:

Dati n sistemi generatori indipendenti $N^{(i)}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ di M (⁷) e supposto, come è sempre permesso:

$$N^{(n)} \cdot\!> N^{(n-1)} \cdot\!> ... \cdot\!> N^{(1)},$$

fisso in $N^{(n)}$ un insieme ellittico $\nu^{n)p_n}$ $(p_n = 0, 1, 2, ...)$; per ogni elemento $\nu^{n)p_n}$, un insieme ellittico $\nu^{n-1)p_n p_{n-1}}$ $(p_{n-1} = 0, 1, 2, ...)$ in $N^{(n-1)}$, e così di seguito; infine, per ogni elemento $\nu^{2)p_n p_{n-1} ... p_2}$, un insieme ellittico $\nu^{1)p_n p_{n-1} ... p_2 p_1}$ $(p_1 = 0, 1, 2, ...)$ in $N^{(1)}$. Chiamo *iperellittico d'ordine* n l'insieme Y di tutti gli elementi di M, che risultano dalla somma di un $\nu^{n)p_n}$ con un $\nu^{n-1)p_n p_{n-1}}$, ..., con un $\nu^{1)p_n p_{n-1} ... p_2 p_1}$.

Ad ogni insieme di monosemii, i cui indici costituiscono un insieme iperellittico, faccio corrispondere un nuovo ente a'. È possibile stabilire fra questi a' le relazioni di disuguaglianza e le operazioni aritmetiche in modo da avere ancora un sistema di tipo A?

La risposta è affermativa.

Per riconoscerlo, giova prima di tutto osservare come, dati due a' (o in generale un numero finito di essi), si può sempre ritenere che gli indici dei loro monosemii risultino dai medesimi sistemi generatori.

Siano infatti due numeri a' e b' e gli insiemi iperellittici corrispondenti, d'ordine rispettivo $m + h$, $m + k$, provengano dai sistemi generatori:

$$N'^{(1)}, N'^{(2)}, ..., N'^{(m)}, \quad N''^{(1)}, N''^{(2)}, ..., N''^{(h)};$$

$$N'^{(1)}, N'^{(2)}, ..., N'^{(m)}, \quad N'''^{(1)}, N'''^{(2)}, ..., N'''^{(k)},$$

di cui son messi in evidenza quelli comuni ai due insiemi, senza badare alle relazioni di infinità.

È chiaro che, facendo $m + h + k = n$ e designando $N'^{(1)}$ con $N^{(r_1)}$, $N'^{(2)}$ con $N^{(r_2)}$, ..., $N'^{(m)}$ con $N^{(r_m)}$; $N''^{(1)}$ con $N^{(r_{m+1})}$, ..., $N''^{(h)}$ con $N^{(r_{m+h})}$; $N'''^{(1)}$ con $N^{(r_{m+h+1})}$, ..., $N'''^{(k)}$ con $N^{(r_n)}$ (dove le r_i si immaginano prese in guisa che riesca $N^{(n)} \cdot\!> N^{(n-1)} \cdot\!> ... \cdot\!> N^{(1)}$), Y e Z si possono risguardare come insiemi iperellittici d'ordine n, corrispondenti ai medesimi sistemi generatori $N^{(1)}, N^{(2)}, ..., N^{(n)}$.

Basta ritenere, per ogni elemento di Y, nulle le $\nu^{r_{m+1})...}$, $\nu^{r_{m+2})...}$, ..., $\nu^{r_{m+h})...}$ (e prescinder quindi, nelle ν dei sistemi inferiori, dagli apici $p_{r_{m+1}}, p_{r_{m+2}}, ..., p_{r_{m+h}}$); per ogni elemento di Z, nulle invece le $\nu^{r_{m+h+1})...}$, $\nu^{r_{m+h+2})...}$, ..., $\nu^{r_n)...}$, (e prescindere analogamente dagli apici $p_{r_{m+h+1}}, ..., p_{r_n}$).

(⁷) L'intero n è affatto arbitrario, purchè, si capisce, non superiore al numero totale dei sistemi generatori di M, caso mai questi fossero in numero finito.

Ciò posto, considero l'insieme $\{N^{(1)}, N^{(2)}, \dots, N^{(n)}\}$ (che dirò *d'ordine n*) di tutti i numeri a', che corrispondono ad insiemi iperellittici costituiti coi sistemi generatori $N^{(1)}, N^{(2)}, \dots, N^{(n)}$. Dico intanto che si possono adottare tali convenzioni da rendere questo sistema di tipo A.

Ammettiamo per un momento di aver dimostrata la cosa per i sistemi d'ordine $n-1$ ed in particolare per $\{N^{(1)}, N^{(2)}, \dots, N^{(n-1)}\}$, intendendo sempre $N^{(n)} > N^{(i)}$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$.

Se al sistema $\{N^{(1)}, N^{(2)}, \dots, N^{(n-1)}\}$ si applica la costruzione del § 2, assumendo come indici gli elementi di $N^{(n)}$, si trova, come sappiamo, un nuovo sistema di tipo A. Esso differisce da $\{N^{(1)}, N^{(2)}, \dots, N^{(n-1)}, N^{(n)}\}$ soltanto nella notazione [8], talchè basta convenire che in $\{N^{(1)}, N^{(2)}, \dots, N^{(n)}\}$ le regole ordinative e operative sono le stesse, per aver mezzo di estendere la proprietà enunciata ai sistemi d'ordine n, quando essa vale per quelli d'ordine $n-1$. Risalendo da $n-1$ a $n-2$, da $n-2$ a $n-3$, ecc., si è ricondotti ai sistemi di prim'ordine; e per questi risponde il § 2.

Ogni sistema $\{N^{(1)}, N^{(2)}, \dots, N^{(n)}\}$ è dunque di tipo A. Bisogna tuttavia accertare, affinchè riesca appieno giustificato il procedimento, che i monosemii a_ν $(\nu = \nu^{1)} + \nu^{2)} + \dots + \nu^{n)})$ si comportano effettivamente come si è stabilito in principio di questo paragrafo, seguono cioè le stesse regole, valide pei monosemii, che provengono da un solo sistema di tipo N.

Qui ancora, basta ammettere la cosa per i monosemii, di $\{N^{(1)}, N^{(2)}, \dots, N^{(n-1)}\}$, che allora la si prova subito per i monosemii di $\{N^{(1)}, N^{(2)}, \dots, N^{(n-1)}, N^{(n)}\}$.

Sieno $a' = a_{y+\nu^{n)}}$, $b' = b_{z+\mu^{n)}}$ (con a e b elementi di A, $y = \nu^{1)} + \nu^{2)} + + \dots + \nu^{n-1)}$, $z = \mu^{1)} + \mu^{2)} + \dots + \mu^{n-1)}$) due monosemii di $\{N^{(1)}, N^{(2)}, \dots, N^{(n)}\}$.

Ponendo $\mathfrak{a} = a_y$, $\mathfrak{b} = b_z$, dovremo, secondo il convenuto, considerare i monosemii $\mathfrak{a}_{\nu^{n)}}$, $\mathfrak{b}_{\mu^{n)}}$, e ricavare da essi le norme, che reggono gli elementi corrispondenti a', b'.

Le relazioni di disuguaglianza tra a' e b' dovranno dunque stabilirsi come segue:

1) $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ del medesimo segno e $\nu^{n)} = \mu^{n)}$:

$$a' \gtreqless b', \quad \text{secondochè} \quad \mathfrak{a} \gtreqless \mathfrak{b};$$

---

(8) Infatti la forma generale dei monosemii dei due sistemi è $a_{\nu^{1)} + \nu^{2)} + \dots + \nu^{n-1)} + \nu^{n)}}$, per l'uno, $\left(a_{\nu^{1)} + \nu^{2)} + \dots + \nu^{n-1)}}\right)_{\nu^{n)}}$, per l'altro; differiscono dunque soltanto nella notazione quei monosemii, che corrispondono agli stessi elementi a, $\nu^{1)}, \nu^{2)}, \dots, \nu^{n)}$. È manifesto dopo ciò che ogni insieme di monosemii di un sistema, diviene, cambiando solo la notazione, insieme di monosemii dell'altro sistema; in particolare un numero dell'uno si cambia in un numero dell'altro. Conviene aggiungere, per giustificare quest'ultimo asserto, che le condizioni, sotto cui un insieme di monosemii dà luogo ad un numero, sono effettivamente le stesse, in entrambi i casi.

2) $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ del medesimo segno e $\nu^{n)} \gtrless \mu^{n)}$:

$$a' \gtrless b', \quad \text{secondochè} \quad \nu^{n)} \gtrless \mu^{n)} ;$$

3) $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ entrambi nulli:

$$a' = b' = 0 ;$$

4) $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ di segno opposto e non entrambi nulli; detto $\mathfrak{a}$ quello non negativo:

$$a' > b' .$$

Per essersi ammesso che $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ si comportano come monosemii di caratteristiche a, b e di indici y, z l'ipotesi « $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ del medesimo o di opposto segno » significa che sono del medesimo o di opposto segno a e b, e le relazioni $\mathfrak{a} \gtreqqless \mathfrak{b}$ vanno interpretate in due modi diversi, secondochè $y = z$, ovvero $y \lessgtr z$. Nella prima ipotesi (notando che, per la indipendenza dei sistemi generatori, le due eguaglianze $y = z$, $\nu^{n)} = \mu^{n)}$ si possono raccogliere nell'unica $y + \nu^{n)} = z + \mu^{n)}$) si ha da 1):

1$^{\text{bis}}$) a e b del medesimo segno e $y^{n)} + \nu^{n)} = z + \mu^{n)}$:

$$a' \gtreqqless b' , \quad \text{secondochè} \quad a \gtreqqless b .$$

Nella seconda ipotesi, la 1) stessa ci dice che, per a e b dello stesso segno e $\nu^{n)} = \mu^{n)}$, è $a' \lessgtr b'$, secondochè $y \gtrless z$, o, se si vuole, $y + \nu^{n)} \gtrless z + \mu^{n)}$. Questo caso e quello contemplato da 2) si possono raccogliere nella proposizione:

2$^{\text{bis}}$) a e b del medesimo segno e $y + \nu^{n)} \gtrless z + \mu^{n)}$:

$$a' \gtrless b' , \quad \text{secondochè} \quad y + \nu^{n)} \gtrless z + \mu^{n)} .$$

Infatti, se $\nu^{n)} = \mu^{n)}$, da $y + \nu^{n)} \gtrless z + \mu^{n)}$, segue $y \gtrless z$, e ricadiamo nella seconda parte di 1); se invece $\nu^{n)} \gtrless \mu^{n)}$, per essere y e z infinitesimi rispetto a $\nu^{n)}$ e $\mu^{n)}$, si ha $y + \nu^{n)} \gtrless z + \mu^{n)}$ assieme a $\nu^{n)} \gtrless \mu^{n)}$, e quindi il caso 2).

A 3) e 4) si attribuisce senz'altro la forma equivalente:

3$^{\text{bis}}$) a e b entrambi nulli:

$$a' = b' = 0 ,$$

4$^{\text{bis}}$) a e b di segno opposto e non entrambi nulli; supposto a quello non negativo:

$$a' > b' .$$

Le proposizioni $1^{\text{bis}})$, $2^{\text{bis}})$, $3^{\text{bis}})$, $4^{\text{bis}})$ esprimono precisamente che i monosemii, desunti da un sistema intero $\boldsymbol{M}$, si comportano, rispetto all'ordine, come quelli, che provengono da un $\boldsymbol{N}$.

Verifichiamo ancora la regola di moltiplicazione, mostriamo cioè che il prodotto di $a' = a_{y+\nu^{n)}}$ per $b' = b_{z+\mu^{n)}}$ è:

$$a'b' = (ab)_{y+z+\nu^{n)}+\mu^{n)}} .$$

Avremo, per definizione, che $a'b'$ è quell'elemento di $\{ \boldsymbol{N}^{(1)}, \boldsymbol{N}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{N}^{(n)} \}$, che corrisponde al prodotto di $\mathfrak{a}_{\nu^{n)}}$ per $\mathfrak{b}_{\mu^{n)}}$. Ora:

$$\mathfrak{a}_{\nu^{n)}} \mathfrak{b}_{\mu^{n)}} = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})_{\nu^{n)}+\mu^{n)}} = (a_y b_z)_{\nu^{n)}+\mu^{n)}} = \left[(ab)_{y+z}\right]_{\nu^{n)}+\mu^{n)}} ,$$

e al monosemio $\left[(ab)_{y+z}\right]_{\nu^{n)}+\mu^{n)}}$ corrisponde precisamente il monosemio $(ab)_{y+z+\nu^{n)}+\mu^{n)}}$ di $\{ \boldsymbol{N}^{(1)}, \boldsymbol{N}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{N}^{(n)} \}$.

Si vede facilmente che m qualunque sistemi generatori $\boldsymbol{N}^{(r_1)}$, $\boldsymbol{N}^{(r_2)}$, ..., $\boldsymbol{N}^{(r_m)}$ di un $\{ \boldsymbol{N}^{(1)}, \boldsymbol{N}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{N}^{(n)} \}$ determinano un sistema $\{ \boldsymbol{N}^{(r_1)}, \boldsymbol{N}^{(r_2)}, \ldots, \boldsymbol{N}^{(r_m)} \}$, contenuto in $\{ \boldsymbol{N}^{(1)}, \boldsymbol{N}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{N}^{(n)} \}$. Ne viene che le relazioni fra due o più a' hanno carattere invariantivo rispetto a tutti i possibili sistemi $\{ \boldsymbol{N}^{(1)}, \boldsymbol{N}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{N}^{(n)} \}$, in cui questi a' si immaginino contenuti.

Ciò permette di risguardare l'insieme di tutti gli a' come un sistema di tipo A.

6. – Ad illustrazione del procedimento, testè delineato, prendiamo per sistema A i numeri reali, per sistema $\boldsymbol{M}$ il $V^{(1)}$ del § 4. I sistemi generatori sono del tipo a_ν (dove ν è fisso ed a può assumere tutti i valori interi); fissiamone due: $\boldsymbol{N}^{(1)} = a_\nu$, $\boldsymbol{N}^{(2)} = b_\mu$ $(\mu > \nu)$, e consideriamo il sistema $\{ \boldsymbol{N}^{(1)}, \boldsymbol{N}^{(2)} \}$.

Essendo $c^{(ij)}$, $\gamma^{(ij)}$ numeri reali arbitrarii, e $a_\nu^{(ij)} + b_\mu^{(i)}$, $\alpha_\nu^{(ij)} + \beta_\mu^{(i)}$ $(i, j = 0, 1, 2, \ldots)$ due insiemi iperellittici provenienti dai sistemi $\boldsymbol{N}^{(1)}$, $\boldsymbol{N}^{(2)}$:

$$a' = \sum_{0}^{\infty}{}_{ij} \left(c^{(ij)}\right)_{a_\nu^{(ij)} + b_\mu^{(i)}} ,$$

$$b' = \sum_{0}^{\infty}{}_{ij} \left(\gamma^{(ij)}\right)_{\alpha_\nu^{(ij)} + \beta_\mu^{(i)}}$$

rappresenteranno (⁹) due generici numeri del sistema $\{ \boldsymbol{N}^{(1)}, \boldsymbol{N}^{(2)} \}$.

(⁹) Si avverta che il simbolo sommatorio serve soltanto a rappresentare in modo comodo l'aggregato dei monosemii, che costituiscono un numero. Esso acquista effettivo significato di *somma*, solo quando i monosemii stessi sieno in numero finito; *formalmente però si comporta come una somma*. Ciò risulta dai §§ 2 e 5.

Come si confronteranno tra loro? Dovremo ricorrere agli aggregati:

$$\sum_0^\infty{}_j \left(c^{(ij)}\right)_{a_\nu^{(ij)} + b_\mu^{(i)}},$$

$$\sum_0^\infty{}_j \left(\gamma^{(ij)}\right)_{\alpha_\nu^{(ij)} + \beta_\mu^{(i)}},$$

che corrispondono ad un medesimo valore di i, risguardandoli in sostanza come monosemii, i cui indici sieno rispettivamente $b_\mu^{(i)}$, $\beta_\mu^{(i)}$ e le caratteristiche i numeri di $\{N^{(1)}\}$:

$$\mathfrak{a}^{(i)} = \sum_0^\infty{}_j \left(c^{(ij)}\right)_{a_\nu^{(ij)}},$$

$$\mathfrak{b}^{(i)} = \sum_0^\infty{}_j \left(\gamma^{(ij)}\right)_{\alpha_\nu^{(ij)}}.$$

Si incomincierà col fare $i = 0$, poi, 1, poi 2, ecc.; o le due successioni $\mathfrak{a}_{b_\mu^{(i)}}^{(i)}$, $\mathfrak{b}_{\beta_\mu^{(i)}}^{(i)}$ riusciranno identiche e allora $a' = b'$, o vi sarà una prima coppia $\mathfrak{a}_{b_\mu^{(i)}}^{(i)}$, $\mathfrak{b}_{\beta_\mu^{(i)}}^{(i)}$ di elementi diversi, e allora $a' \gtrless b'$, secondochè $\mathfrak{a}_{b_\mu^{(i)}}^{(i)} \gtrless \mathfrak{b}_{\beta_\mu^{(i)}}^{(i)}$.

Come esempio di operazione, calcoliamo il quoziente di $a' = 1$ per $b' = 1_1 - u_0 - v_{1-1_1}$ (u e v essendo quantità reali arbitrarie). I sistemi generatori $N^{(1)}$, $N^{(2)}$ sono i monosemii di indice 0 ed 1. Per eseguire la divisione, bisogna porre:

$$\mathfrak{a} = 1_0\,, \quad \mathfrak{b} = 1_1 - u_0\,, \quad \mathfrak{c} = v_1\,;$$

$$a' = \mathfrak{a}_0\,, \quad b' = \mathfrak{b}_0 - \mathfrak{c}_{-1_1}\,,$$

ed operare su questi colle solite regole (§ 2). Ciò dà:

$$\frac{a'}{b'} = \sum_0^\infty{}_i \left(\frac{\mathfrak{c}^i}{\mathfrak{b}^{i+1}}\right)_{-i_1}.$$

Essendo $\mathfrak{c}$ e $\mathfrak{b}$ numeri di $\{N^{(1)}\}$, va applicato analogo criterio per il calcolo di un generico termine

$$\frac{\mathfrak{c}^i}{\mathfrak{b}^{i+1}} = v_i^i \frac{1}{(1_1 - u_0)^{i+1}}.$$

Ora si ha:

$$\frac{1}{(1_1 - u_0)^{i+1}} = 1_{-(i+1)} \sum_i^\infty{}_j \binom{i}{j} u^{i-j}_{-(j-i)},$$

quindi:

$$\frac{\mathfrak{c}^i}{\mathfrak{b}^{i+1}} = 1_{-1} v^i \sum_i^\infty{}_j \binom{i}{j} u^{j-i}_{-(j-i)}.$$

Se si porta questo valore nella espressione precedente di a'/b', e si ripassa al sistema $\{N^{(1)}, N^{(2)}\}$, lasciando in evidenza il fattore 1_{-1}, si trova in definitiva:

$$\frac{a'}{b'} = 1_{-1} \sum_0^\infty{}_i \sum_j^\infty{}_i \left\{ \binom{j}{i} u^{j-i} v^i \right\}_{-(j-i)-i_1}.$$

7. – Riprendiamo il sistema $V^{(1)}$ e combiniamolo col sistema A dei numeri reali, secondo le norme del § 5. Ne otterremo un $A^{(1)}$ e da esso potremo cavare un $V^{(2)}$, che comprende tutti e soli quegli a', per cui:

1) L'insieme iperellittico corrispondente consta di un numero *finito* di elementi *positivi* $y = \nu^{n)p_n} + \nu^{n-1)p_n p_{n-1}} + ... + \nu^{1)p_n p_{n-1}...p_1}$ (talchè gli apici p_i variano da 0 a un limite superiore determinato s_i, e, in ogni y, la prima delle ν, che non è nulla, è positiva).

2) Le caratteristiche dei relativi monosemii a_y sono intere.

Tale $V^{(2)}$ (che comprenda in sè il primitivo $V^{(1)}$) è a sua volta un sistema $\boldsymbol{M}$ intero, da cui, assumendo sempre come A i numeri reali, si può dedurre un $A^{(2)}$. Le stesse limitazioni, con cui da $A^{(1)}$ si passa a $V^{(2)}$, danno ora un $V^{(3)}$ e così di seguito ([10]).

Si può pensare l'insieme V di tutte le $V^{(i)}$ $(i = 1, 2, ...)$ (o, ciò che è lo stesso, in quanto ciascuna $V^{(i)}$ comprende quelle, che la precedono, l'insieme limite di $V^{(i)}$ per $i = \infty$); anche questo è un sistema intero. Infatti ogni elemento deve, per definizione, appartenere a qualche $V^{(i)}$ e, come tale, risultare da un numero finito di sistemi generatori.

La classe (II) *dei numeri interi del prof.* VERONESE *equivale a* V.

A questo punto si è facilmente tratti a ritenere che, applicando ai numeri reali la costruzione del § 5, con V per sistema intero $\boldsymbol{M}$, risulti un A', che rappresenti completamente il continuo rettilineo di VERONESE. Se ne è in realtà molto vicini, ma bisogna ancora una volta ampliare il sistema A', introducendo nuovi elementi.

([10]) Secondo la notazione di VERONESE, $V^{(2)}$ sarebbe il sistema, che si ottiene dal simbolo Z, supponendovi μ infinito d'ordine finito (cfr. *Fondamenti*, ecc., p. 107; si badi che Z consta in ogni caso di un numero *finito* di addendi). Dallo stesso simbolo Z, usufruendo i numeri di $V^{(2)}$, si han quelli di $V^{(3)}$, ecc.

Giova frattanto rilevare che lo stesso A' rispecchia una forma ad una dimensione, per cui valgono le ipotesi I-VII ([11]) di VERONESE, ma non l'VIII ([12]).

8. – Per abbracciare anche quest'ultima, si procede nel modo seguente.

Un numero di A' si dice *appartenente al sistema* $N^{(i)}$, se $N^{(i)}$ è il più elevato dei suoi sistemi generatori, e se di più, negli indici dei singoli monosemii, l'addendo $\nu^{(i)}$ è negativo (non nullo). In tale condizione, gli indici stessi sono negativi e il numero si presenta come un infinitesimo, il cui ordine è in certa guisa misurato dal detto sistema generatore $N^{(i)}$.

Ciò posto, si consideri una successione $a'^{(1)}$, $a'^{(2)}$, $a'^{(3)}$, ... di elementi di A', e si supponga che, scelto ad arbitrio un elemento ω in V, la differenza $a'^{(h)} - a'^{(k)}$ $(h, k < n)$ *appartenga, da un certo n in avanti, a degli* $N^{(hk)} .> \omega$. Diremo che la differenza $a'^{(h)} - a'^{(k)}$ diventa *indefinitamente piccola in senso assoluto* e chiameremo *convergente* una successione ([13]), i cui elementi godono di questa proprietà.

Ad ognuna di esse potrà farsi corrispondere un nuovo elemento l ([14]). Si converrà che l sia eguale ad un a' allora e solo allora che, nella corrispondente successione, gli elementi, a partire da un certo, sono eguali a questo a'.

Nulla di più facile che estendere al complesso degli a' e degli l le relazioni di disuguaglianza e le operazioni aritmetiche in modo da costituirne un sistema A'' di tipo A.

Basta riportarsi a quanto si fa nell'algebra elementare per i numeri irrazionali, con questo vantaggio che la convergenza in senso assoluto delle nostre successioni permette di procedere in modo assai più semplice e spedito, senza neanche rendere necessario, o almeno opportuno (come avviene nel campo ordinario) di sostituire ad un'unica successione due classi contigue, ovvero una ripartizione di DEDEKIND.

Il sistema A'' fa perfetto riscontro alla forma fondamentale del prof. VERONESE. Per questo, valgono tutte le ordinarie regole di calcolo; conservano dunque per quella la loro validità tutte le ordinarie costruzioni geometriche. In particolare la geometria proiettiva, come già ebbe a notare il prof. VERONESE.

([11]) Cfr. pp. 67, 84, 92, 106, 128, 147.

([12]) Pag. 150.

([23]) Sarebbe, per esempio, convergente (usando la nomenclatura di VERONESE) la successione:

$$1,\ 1 + \frac{1}{\infty_1},\ 1 + \frac{1}{\infty_1} + \frac{1}{\infty_1^{\infty_1}},\ 1 + \frac{1}{\infty_1} + \frac{1}{\infty_1^{\infty_1}} + \frac{1}{\infty_1^{\infty \cdot \infty_1}},\ \dots .$$

([14]) Questa convenzione sostituisce l'ipotesi VIII di VERONESE. Volendo mantenere l'analogia, anche nella forma, si potrebbe sostituire alla successione $a'^{(1)}$, $a'^{(2)}$, ... una coppia di classi contigue (in senso assoluto).