XXXI.

FUNZIONI ARMONICHE E TRASFORMAZIONI DI CONTATTO (*)

« Atti Ist. Veneto di sc., lett. ed arti », t. LIX,

pp. 671-675

1. – Sia una trasformazione di contatto nel piano (biunivoca e continua nel campo che si considera) definita dalle formule

$$(1)\qquad \begin{cases} X = f(x, y, p) \\ Y = \varphi(x, y, p) \\ P = \psi(x, y, p)\,. \end{cases}$$

Per la definizione stessa di trasformazione di contatto, rimane invariante la equazione pfaffiana

$$(2)\qquad dy - p\,dx = 0\,.$$

Immaginiamo di attribuire alle variabili x, y, p valori complessi $x_1 + ix_2$, $y_1 + iy_2$, $p_1 - ip_2$ e scindiamo in f, φ, ψ, e corrispondentemente in X, Y, P, la parte reale dalla immaginaria, ponendo

$$f = f_1 + if_2\,, \qquad \varphi = \varphi_1 + i\varphi_2\,, \qquad \psi = \psi_1 - i\psi_2\,;$$

$$X = X_1 + iX_2\,, \qquad Y = Y_1 + iY_2\,, \qquad P = P_1 - iP_2\,.$$

f_1, f_2, φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 risultano funzioni reali delle sei variabili x_1, x_2, y_1, y_2, p_1, p_2, e le (1), interpretate nel campo reale, definiscono complessiva-

(*) Presentata dal Socio corrispondente F. D'Arcais nella adunanza del 20 maggio 1900.

mente una trasformazione

$$(1') \quad \begin{cases} X_1 = f_1(x_1, x_2;\ y_1, y_2;\ p_1, p_2) \\ X_2 = f_2(x_1, x_2;\ y_1, y_2;\ p_1, p_2) \\ Y_1 = \varphi_1(x_1, x_2;\ y_1, y_2;\ p_1, p_2) \\ Y_2 = \varphi_2(x_1, x_2;\ y_1, y_2;\ p_1, p_2) \\ P_1 = \psi_1(x_1, x_2;\ y_1, y_2;\ p_1, p_2) \\ P_2 = \psi_2(x_1, x_2;\ y_1, y_2;\ p_1, p_2) \end{cases}$$

delle sei variabili x_1, x_2, y_1, y_2, p_1, p_2 nelle omologhe maiuscole.

Quali sono le proprietà caratteristiche della trasformazione (1')?

Quelle evidentemente, che scaturiscono dal lasciar invariante la (2), ossia

$$dy_1 + i\,dy_2 - (p_1 - ip_2)(dx_1 + i\,dx_2) = 0\,,$$

il che è quanto dire il sistema delle due equazioni di PFAFF

$$(2') \quad \begin{cases} dy_1 - (+\,p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2) = 0 \\ dy_2 - (-\,p_2\,dx_1 + p_1\,dx_2) = 0\,. \end{cases}$$

Queste esprimono che y_1, y_2 sono funzioni armoniche *associate* delle variabili x_1, x_2. Risulta infatti da esse che y_1, y_2, considerate come funzioni delle variabili indipendenti x_1, x_2, ammettono rispettivamente per derivate p_1, p_2 e $-p_2$, p_1. Si ha dunque

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\,,$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\,,$$

donde appunto apparisce che y_1, y_2 sono funzioni armoniche associate.

Le trasformazioni del tipo (1') *conservano la relazione, espressa dalle* (2'). *Esse fanno perciò corrispondere ad ogni coppia* y_1, y_2 *di funzioni armoniche associate delle variabili* x_1, x_2, *e loro derivate, funzioni associate* Y_1, Y_2, *delle nuove variabili* X_1, X_2, *e derivate relative.*

2. – *Reciprocamente la più generale trasformazione fra sei variabili, dotata di queste proprietà, rientra nella classe* (1').

Per riconoscerlo, consideriamo le funzioni

$$X = X_1 + iX_2\,, \qquad Y = Y_1 + iY_2\,, \qquad P = P_1 - iP_2$$

delle sei variabili x_1, x_2, y_1, y_2, p_1, p_2.

Dacchè, per ipotesi, la trasformazione ha da lasciare invariante il sistema (2′), o, ciò che è lo stesso, la (2), dovrà sussistere una identità della forma

$$dY - P\,dX \equiv \varrho(dy - p\,dx)\,, \tag{3}$$

il fattore ϱ essendo a priori indeterminato.

Ciò posto, tutto si riduce a far vedere che X, Y, P dipendono esclusivamente dai tre argomenti

$$x = x_1 + ix_2\,, \qquad y = y_1 + iy_2\,, \qquad p = p_1 - ip_2\,,$$

(non da tutte le sei variabili x_1, x_2, y_1, y_2, p_1, p_2).

Poniamo a tale scopo

$$x_1 - ix_2 = \xi\,, \qquad y_1 - iy_2 = \eta\,, \qquad p_1 + ip_2 = \pi\,,$$

e notiamo che dalla (3), risguardando, come è lecito, x, y, p, ξ, η, π quali variabili indipendenti, scendono le relazioni

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial Y}{\partial x} - P\frac{\partial X}{\partial x} = -\varrho p\,,\\ &\frac{\partial Y}{\partial y} - P\frac{\partial X}{\partial y} = \varrho\,,\\ &\frac{\partial Y}{\partial p} - P\frac{\partial X}{\partial p} = 0\,,\end{aligned}\right. \tag{4}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \xi} - P\frac{\partial X}{\partial \xi} = 0\,, \tag{5}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \eta} - P\frac{\partial X}{\partial \eta} = 0\,, \tag{6}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \pi} - P\frac{\partial X}{\partial \pi} = 0\,. \tag{7}$$

Occupiamoci per un momento del solo sistema (4), (5).

Le (4), eliminandone ϱ e P, danno

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ x & p \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} X & Y \\ y & p \end{pmatrix} = 0 \quad (^1). \tag{8}$$

In modo analogo, dalle due prime equazioni (4) e dalla (5) segue

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ x & \xi \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} X & Y \\ y & \xi \end{pmatrix} = 0, \tag{9}$$

mentre l'ultima delle (4) e la (5) stessa porgono

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ p & \xi \end{pmatrix} = 0\,. \tag{10}$$

Formiamo la combinazione differenziale

$$\frac{\partial}{\partial p}\left[\begin{pmatrix} X & Y \\ x & \xi \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} X & Y \\ y & \xi \end{pmatrix}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} X & Y \\ p & \xi \end{pmatrix} - p \frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} X & Y \\ p & \xi \end{pmatrix} = 0.$$

Il primo membro può essere scritto

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\begin{pmatrix} X & Y \\ x & p \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} X & Y \\ y & p \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} X & Y \\ y & \xi \end{pmatrix} = 0\,,$$

e, in virtù della (8), rimarrà

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ y & \xi \end{pmatrix} = 0\,,$$

che è la condizione di integrabilità del sistema (9), (10). Dovremo di conseguenza avere simultaneamente

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ x & \xi \end{pmatrix} = 0\,, \quad \begin{pmatrix} X & Y \\ y & \xi \end{pmatrix} = 0\,, \quad \begin{pmatrix} X & Y \\ p & \xi \end{pmatrix} = 0\,.$$

---

(1) Per brevità di scrittura, rappresentiamo colla notazione $\begin{pmatrix} X & Y \\ u & v \end{pmatrix}$ il determinante funzionale di X, Y rapporto a due generiche variabili u e v.

In modo analogo, la considerazione dei sistemi (4), (6) e (4), (7) porta alle equazioni

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ x & \eta \end{pmatrix} = 0\,, \quad \begin{pmatrix} X & Y \\ y & \eta \end{pmatrix} = 0\,, \quad \begin{pmatrix} X & Y \\ p & \eta \end{pmatrix} = 0\,;$$

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ x & \pi \end{pmatrix} = 0\,, \quad \begin{pmatrix} X & Y \\ y & \pi \end{pmatrix} = 0\,, \quad \begin{pmatrix} X & Y \\ p & \pi \end{pmatrix} = 0\,.$$

Ora, se X, Y dipendessero effettivamente da qualcuno dei tre argomenti ξ, η o π, le soprascritte equazioni esigerebbero che fossero eguali a zero i minori della matrice

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial X}{\partial x} & \dfrac{\partial X}{\partial y} & \dfrac{\partial X}{\partial p} \\[2ex] \dfrac{\partial Y}{\partial x} & \dfrac{\partial Y}{\partial y} & \dfrac{\partial Y}{\partial p} \end{matrix} \right\|,$$

talchè in definitiva risulterebbe identicamente nulla la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial X}{\partial x} & \dfrac{\partial X}{\partial y} & \dfrac{\partial X}{\partial p} & \dfrac{\partial X}{\partial \xi} & \dfrac{\partial X}{\partial \eta} & \dfrac{\partial X}{\partial \pi} \\[2ex] \dfrac{\partial Y}{\partial x} & \dfrac{\partial Y}{\partial y} & \dfrac{\partial Y}{\partial p} & \dfrac{\partial Y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial Y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial Y}{\partial \pi} \end{matrix} \right\|$$

e non sarebbero perciò indipendenti X e Y. Questo è impossibile, perchè le variabili trasformate X_1, X_2, Y_1, Y_2, P_1, P_2 debbono necessariamente supporsi funzioni indipendenti delle primitive.

Concludiamo pertanto che X, Y (e così P, in causa delle (4)) non contengono ξ, η, ζ, ossia sono funzioni delle variabili complesse x, y, p. La trasformazione appartiene dunque al tipo (1′), come dovevasi dimostrare.