

Sur le champ des températures obtenues en thermoélastoviscoplasticité

W. K. NOWACKI et J. ZARKA (PARIS)

QUELQUES éléments sur l'énergie emmagasinée dans un métal (monocristal et polycristal) sont d'abord exposés. On montre ensuite, dans l'exemple particulier d'une tige élastoviscoplastique soumise à des chargements quasi-statique et dynamique, l'influence de quelques hypothèses pour l'équation de la thermodynamique sur le champ des températures.

W pracy przedstawiono pewne rozważania nad energią zmagazynowaną w metalu (monokryształ, polikryształ). Pokazano następnie, na przykładzie pręta sprężysto/lepkoplastycznego, poddanego obciążeniom quasi-statycznym i dynamicznym, wpływ pewnych przyjętych hipotez w równaniu termodynamiki na pole temperatury.

В работе представлены некоторые рассуждения касающиеся энергии накопленной в металле (монокристалл, поликристалл). Затем показано на примере упруговязкопластического стержня, подвергнутого квазистатическим и динамическим нагрузкам, влияние некоторых принятых гипотез в уравнении термодинамики на поле температуры.

1. Introduction

TRÈS peu de problèmes ont été, jusqu'à présent, résolus dans le cadre de la thermo-plasticité ou la thermoviscoplasticité. Cela non seulement en raison des grandes difficultés que l'on peut rencontrer dans la résolution numérique des équations, mais aussi en raison de l'indétermination des équations elles-mêmes. En effet, la forme exacte des relations de comportement des matériaux n'est pas encore bien connue ; de plus, on ne sait pas comment écrire convenablement l'équation de la thermodynamique.

Généralement, quelques hypothèses simplificatrices sont classiquement admises :

1. Lorsqu'il y a un important apport extérieur de chaleur, on suppose qu'il existe un découplage total entre le champ des températures et les champs des déplacements et des contraintes. La température vérifie l'équation de la chaleur et le matériau est alors assimilé à un matériau dont les propriétés mécaniques dépendent du point (matériau non homogène).

2. Lorsqu'au contraire, il n'y a pas d'échange de chaleur avec l'extérieur au cours du chargement :

a) on suppose que la variation de température provoquée par les contraintes appliquées est négligeable, la transformation est isotherme. (Cela signifie que l'on supprime complètement l'équation de la thermodynamique !) ;

b) ou, si l'on en tient compte, on admet alors très souvent qu'en chaque point la transformation s'effectue adiabatiquement (on néglige le terme de conduction), en précisant que cela est surtout vérifié dans un chargement très rapide. On suppose de plus qu'il y a parfois une énergie emmagasinée.

Le but de cette étude est double. Il s'agit tout d'abord d'indiquer brièvement quelques éléments sur l'énergie emmagasinée dans un métal (monocristal et polycristal). Il s'agit aussi de montrer sur l'exemple particulier d'une tige soumise à un chargement quasi-statique et dynamique l'influence des différentes hypothèses sur les champs des contraintes, des déformations et des températures.

Dans tout ce texte nous nous limitons aux petites déformations.

2. Energie emmagasinée dans un métal

2.1. Energie emmagasinée dans le monocristal

Pour un élément de volume monocristallin convenablement choisi, nous avons montré dans de précédentes communications (cf. par exemple, ZARKA, 1973) que, dans une transformation adiabatique, l'équation de la thermodynamique s'écrivait sous la forme :

$$(2.1) \quad \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p = \rho \frac{\partial U_2}{\partial y} \dot{y} + \alpha_{ij} \theta \dot{\sigma}_{ij} + \rho c \dot{\theta}.$$

Dans cette équation (1er principe de la thermodynamique exprimé sous forme locale) :

- σ_{ij} est le tenseur contrainte;
- $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ est la vitesse de déformation plastique;
- ρ est la masse spécifique;
- $U_2(\theta, \{y\})$ est l'énergie interne spécifique due aux défauts représentés symboliquement par les paramètres $\{y\}$ (ou énergie emmagasinée);
- θ est la température absolue du cristal;
- α_{ij} est la matrice des coefficients de dilatation thermique;
- c est la chaleur spécifique.

Ce résultat avait été obtenu grâce à certaines hypothèses sur les vitesses de déformations thermoélastique $\dot{\epsilon}^{e+\theta}$ et plastique $\dot{\epsilon}_{ij}^p$, et sur les fonctions thermodynamiques spécifiques, U énergie interne et \mathcal{S} entropie :

$$(2.2) \quad \text{i) } \dot{\epsilon}^{e+\theta} \equiv \Lambda_{ijkl}(\boldsymbol{\sigma}, \theta) \dot{\sigma}_{kl} + \alpha_{ij}(\boldsymbol{\sigma}, \theta) \dot{\theta},$$

avec Λ et α indépendants de $\{y\}$ et satisfaisant aux conditions d'intégrabilité :

$$(2.3) \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \Lambda_{ijkl} = \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \sigma_{kl}}.$$

$$(2.4) \quad \text{ii) } \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}^p &\equiv \dot{\epsilon}_{ij}^p(\boldsymbol{\sigma}, \theta, \{y\}), \\ \dot{y} &\equiv \dot{y}(\boldsymbol{\sigma}, \theta, \{y\}), \end{aligned}$$

les vitesses de contraintes et de température n'intervenant pas dans ces variations (viscoplasticité).

$$\text{iii) } U \equiv U(\boldsymbol{\sigma}, \theta, \{y\}), \quad \mathcal{S} \equiv \mathcal{S}(\boldsymbol{\sigma}, \theta, \{y\}).$$

L'application du 2ème principe de la thermodynamique, (production d'entropie toujours positive ou nulle) entraîne alors :

i) la séparation :

$$(2.5) \quad \begin{aligned} U &\equiv U_1(\boldsymbol{\sigma}, \theta) + U_2(\{y\}, \theta), \\ \mathcal{S} &\equiv \mathcal{S}_1(\boldsymbol{\sigma}, \theta) + \mathcal{S}_2(\{y\}, \theta), \end{aligned}$$

avec :

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij} A_{ijkl} &= \varrho \left(\frac{\partial U_1}{\partial \sigma_{kl}} - \theta \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial \sigma_{kl}} \right), \\ \sigma_{ij} \alpha_{ij} &= \varrho \left(\frac{\partial U_1}{\partial \theta} - \theta \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial \theta} \right), \end{aligned}$$

et

$$(2.7) \quad \frac{\partial U_2}{\partial \theta} = \theta \frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial \theta}.$$

ii) Il ne reste alors, en supposant l'adiabaticité, qu'à satisfaire à :

$$(2.8) \quad \frac{\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p}{\varrho} \geq \left(\frac{\partial U_2}{\partial y} - \theta \frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial y} \right) \dot{y}.$$

Les équations (2.6) compte-tenu de (2.3) imposent :

$$(2.9) \quad \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial \sigma_{kl}} = \alpha_{kl}.$$

Le 1er principe donne localement:

$$(2.10) \quad \varrho \dot{U} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \sigma_{ij} (\dot{\epsilon}_{ij}^{e+\theta} + \dot{\epsilon}_{ij}^p).$$

On en déduit alors facilement l'équation (2.1) où l'on a posé :

$$(2.11) \quad c = \theta \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta}.$$

Nous avons aussi caractérisé la nature physique des paramètres $\{y\}$ et donné la forme explicite des fonctions $\dot{\epsilon}^p$, \dot{y} et $U_2(\{y\}, \theta)$. Les $\{y\}$ caractérisent la distribution des défauts cristallins essentiellement les dislocations. U_2 est surtout due aux énergies propres des dislocations, l'énergie d'interaction étant en moyenne négligeable dans l'élément de volume.

2.2. Energie emmagasinée dans le polycristal

Le polycristal est l'état normal des métaux, c'est un agrégat de cristaux séparés par des joints de grains. Compte-tenu des équations obtenues pour le monocristal et de certaines conditions liées aux joints de grains, il est possible en principe de déterminer son comportement en résolvant un problème aux limites. Ce problème n'est pas réaliste. On préfère caractériser son comportement global en effectuant quelques hypothèses simplificatrices. On choisit un élément de volume polycristallin qui contient un grand nombre de cristaux et on détermine les relations entre les grandeurs microscopiques attachées au cristal et les grandeurs macroscopiques correspondantes attachées au polycristal.

2.2.1. *Transformation isotherme.* De nombreux auteurs (MANDEL, 1964; HILL, 1967; BUI, 1969; RICE, 1970), lorsque la température était en tout point maintenue constante (isotherme) et lorsque certaines conditions de macrohomogénéité sont réalisées, ont

indiqué qu'il était possible de définir, pour tout champ de contrainte σ statiquement admissible et pour tout champ de déformation ϵ cinématiquement admissible :

i) le tenseur contrainte macroscopique par :

$$(2.12) \quad \Sigma \cong \frac{1}{V} \int_V \sigma dV,$$

ii) le tenseur déformation macroscopique par :

$$(2.13) \quad E \cong \frac{1}{V} \int_V \epsilon dV,$$

iii) le travail de déformation macroscopique par :

$$(2.14) \quad \Sigma E = \Sigma_{ij} E_{ij} \cong \frac{1}{V} \int_V (\sigma \epsilon) dV = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV.$$

Ces grandeurs macroscopiques fondamentales sont les valeurs moyennes directes des grandeurs microscopiques correspondantes.

a) **Comportement élastique.** Supposons tout d'abord que l'élément polycristallin soit purement élastique. En appliquant un tenseur contrainte Σ^* , on obtient en résolvant le problème élastique exact qu'en chaque point à l'échelle du cristal, le tenseur contrainte microscopique σ^* est égal à :

$$(2.15) \quad \sigma^* = A \Sigma^*, \quad \sigma_{ij}^* = A_{ijkl} \Sigma_{kl}^*,$$

où A est par définition le tenseur concentration de contrainte élastique. Ce tenseur est lié à la géométrie et aux propriétés élastiques de chaque cristal.

De plus, pour la déformation microscopique élastique, nous avons :

$$\epsilon^* = \Lambda \sigma^* = \Lambda A \Sigma^*,$$

d'où par (2.13) :

$$E^* = \frac{1}{V} \int_V \epsilon^* dV = \frac{1}{V} \int_V \Lambda A \Sigma^* dV = \left(\frac{1}{V} \int_V \Lambda A dV \right) \Sigma^*,$$

et par suite, pour la matrice des coefficients élastiques macroscopique Λ°

$$(2.16) \quad \Lambda^\circ = \frac{1}{V} \int_V \Lambda A dV.$$

b) **Comportement elastoviscoplastique.** A l'échelle du monocristal on sait comment séparer les vitesses de déformation élastique et viscoplastique :

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p \quad \text{avec} \quad \dot{\epsilon}^e = \Lambda \dot{\sigma}.$$

A l'échelle macroscopique la même décomposition est effectuée

$$(2.17) \quad \dot{E} = \dot{E}^e + \dot{E}^p \quad \text{avec} \quad \dot{E}^e \equiv \Lambda^\circ \dot{\Sigma}.$$

Mais en général, \dot{E}^e et \dot{E}^p ne sont pas les valeurs moyennes des $\dot{\epsilon}^e$ et $\dot{\epsilon}^p$.

i) On démontre en effet que :

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}^e &= \frac{1}{V} \int_V \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{e}}^e dV, & \dot{E}_{ij}^e &= \frac{1}{V} \int_V A_{klij} \dot{e}_{kl}^e dV, \\ \dot{\mathbf{E}}^p &= \frac{1}{V} \int_V \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{e}}^p dV, \end{aligned}$$

où \mathbf{A}^T est la matrice transposée de \mathbf{A} .

ii) On démontre aussi, pour la puissance plastique macroscopique $\Sigma \dot{\mathbf{E}}^p$ que :

$$(2.19) \quad \Sigma \dot{\mathbf{E}}^p = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma}^r \boldsymbol{\Lambda} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^r dV + \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma} \dot{\mathbf{e}}^p dV,$$

où

$$(2.20) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^r &= \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma} \quad \text{est le champ de contrainte résiduelle} \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}^r &= \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\Sigma}} \quad (\text{il n'y a pas de terme en } \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\Sigma}}). \end{aligned}$$

Il apparaît ainsi un terme qui marque les interactions entre les cristaux et qui est semblable à l'énergie emmagasinée due aux défauts dans le cristal.

Cependant, comme il s'agit d'une transformation isotherme, l'équation de la thermodynamique n'a pas d'importance. Cela implique que la séparation (2.19) n'apporte rien.

2.2.2. Transformation adiabatique. La transformation est à présent supposée localement adiabatique; on n'agit sur l'élément de volume polycristallin qu'en appliquant des efforts ou des déplacements.

a) Comportement thermoélastique. L'équation (2.1) se réduit à :

$$(2.21) \quad \alpha_{kl} \theta \dot{\sigma}_{kl}^* + \rho c \dot{\theta}^* = 0,$$

d'où

$$(2.21)' \quad \dot{\theta}^* = - \frac{\alpha_{kl} \theta}{\rho c} \dot{\sigma}_{kl}^*,$$

et par conséquent :

$$(2.22) \quad \dot{e}_{ij}^{*e+\theta} = \left(A_{ijkl} - \frac{\alpha_{ij} \alpha_{kl} \theta}{\rho c} \right) \dot{\sigma}_{kl}^* \equiv A'_{ijkl}(\boldsymbol{\sigma}, \theta) \dot{\sigma}_{kl}^*.$$

En supposant que la variation de température provoquée élastiquement est assez faible, on retrouve un problème analogue à 2.2.1.a, la matrice $\boldsymbol{\Lambda}$ étant remplacée par $\boldsymbol{\Lambda}'$.

Cela signifie :

$$(2.23) \quad \boldsymbol{\sigma}^* \equiv \mathbf{A}' \boldsymbol{\Sigma}^* \quad (\mathbf{A}' \text{ est le tenseur concentration de contrainte thermoélastique})$$

et

$$\boldsymbol{\Lambda}' \equiv \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\Lambda}' \mathbf{A}' dV.$$

b) Comportement thermoélastoviscoplastique. A l'échelle microscopique, nous écrivons :

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{e}}^{e+\theta} + \dot{\mathbf{e}}^p, \quad \dot{e}_{ij} = \dot{e}_{ij}^{e+\theta} + \dot{e}_{ij}^p = A_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} + \alpha_{ij} \dot{\theta} + \dot{e}_{ij}^p,$$

et nous décomposons $\dot{\theta}$ en :

$$(2.24) \quad \dot{\theta} = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2,$$

avec $\dot{\theta}_1$ donnée par (2.21)'.

Nous obtenons ensuite :

$$(2.25) \quad \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}'^e + \dot{\epsilon}'^p, \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \Lambda'_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} + \alpha_{ij} \dot{\theta}_2 + \dot{\epsilon}'^p_{ij} \equiv \dot{\epsilon}'^e_{ij} + \dot{\epsilon}'^p_{ij},$$

avec

$$(2.26) \quad \dot{\epsilon}'^e = \Lambda' \dot{\sigma} \quad \text{et} \quad \dot{\epsilon}'^p = \alpha \dot{\theta}_2 + \dot{\epsilon}'^p.$$

(Comme nous avons supposé la transformation adiabatique, $\dot{\epsilon}'^p$ est bien irréversible).

L'équation (2.1) se réduit alors à :

$$(2.27) \quad \sigma_{ij} \dot{\epsilon}'^p_{ij} = \rho \frac{\partial U_2}{\partial y} \dot{y} + \rho c \dot{\theta}_2.$$

A l'échelle macroscopique, par des raisonnements identiques à ceux qui ont permis d'établir (2.18) et (2.19) on trouve, avec :

$$(2.28) \quad \dot{E} = \dot{E}'^e + \dot{E}'^p \quad \text{et} \quad \dot{E}'^0 = \Lambda' \dot{\Sigma},$$

que :

$$(2.29) \quad \text{i) } \dot{E}'^e = \frac{1}{V} \int_V \Lambda'^T \dot{\epsilon}'^e dV,$$

$$\dot{E}'^p = \frac{1}{V} \int_V \Lambda'^T \dot{\epsilon}'^p dV,$$

$$(2.30) \quad \text{ii) } \Sigma \dot{E}'^p = \frac{1}{V} \int_V \sigma \dot{\epsilon}'^p dV + \frac{1}{V} \int_V \sigma'^r \Lambda' \dot{\sigma}'^r dV,$$

où :

$$\sigma'^r = \sigma - \Lambda' \Sigma, \quad \dot{\sigma}'^r = \dot{\sigma} - \Lambda' \dot{\Sigma},$$

ce qui donne :

$$(2.31) \quad \Sigma \dot{E}'^p = \frac{1}{V} \int_V \sigma \dot{\epsilon}'^p dV + \frac{1}{V} \int_V \sigma'^r \Lambda' \dot{\sigma}'^r dV + \frac{1}{V} \int_V \sigma \alpha \dot{\theta}_2 dV.$$

Nous voyons bien à présent comment se répartit la puissance plastique macroscopique lors d'une transformation localement adiabatique. L'énergie emmagasinée se trouve dans trois termes différents :

- i) le premier correspond à l'énergie due aux défauts dans les cristaux ;
- ii) le second est lié aux interactions élastiques entre cristaux ;
- iii) le dernier est dû aux températures irréversibles.

Nous voyons aussi qu'il est difficile de définir la température et les fonctions thermodynamiques pour l'élément polycristallin.

Il n'est en effet pas possible d'admettre que l'énergie interne spécifique \mathcal{U} du polycristal soit la somme des énergies internes de ses constituants (les cristaux) puisqu'il faut tenir compte de leur énergie d'interaction... (KRÖNER 1972, indique que pour un tel milieu le principe de l'action locale n'est pas vérifié).

Ici aussi, quelques hypothèses simplificatrices peuvent être proposées :

i) la température T de l'élément polycristallin est la valeur moyenne des températures microscopiques θ des cristaux ;

ii) globalement, on définit les fonctions \mathcal{U} et \mathcal{S} pour le polycristal comme dépendant a priori de Σ , T et $\{Y\}$, où $\{Y\}$ représente tous les paramètres $\{y\}$ des cristaux, les contraintes résiduelles, les différentes températures.

Dans ce cadre, si de plus :

i) les cristaux sont élastiquement et thermiquement isotropes,

ii) les coefficients élastiques et thermique ainsi que la chaleur spécifique sont constants et indépendants des cristaux (la variation des températures n'est pas très importante), une décomposition élémentaire peut être effectuée :

$$(2.32) \quad \dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}^e + \dot{\mathbf{E}}^T + \dot{\mathbf{E}}^p$$

avec

$$\dot{\mathbf{E}}^e = \frac{1}{V} \int_V \dot{\mathbf{e}}^e dV = \frac{1}{V} \int_V \Lambda^\circ \dot{\boldsymbol{\sigma}} dV = \Lambda^\circ \dot{\Sigma},$$

$$(2.33) \quad \dot{\mathbf{E}}^T = \frac{1}{V} \int_V \dot{\mathbf{e}}^{\theta} dV = \frac{1}{V} \int_V \alpha \delta \dot{\theta} dV = \alpha \delta \dot{T}, \quad (\alpha = \alpha \delta, \delta_{i,j} \text{ symbole de Kronecker}),$$

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \frac{1}{V} \int_V \dot{\mathbf{e}}^p dV.$$

L'équation (2.31) se réduit alors à :

$$(2.34) \quad \Sigma \dot{\mathbf{E}}^p = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma} \dot{\mathbf{e}}^p dV,$$

cela signifie que l'énergie d'interaction entre les cristaux est nulle. (Ne pas confondre $\dot{\mathbf{E}}^p$ avec $\dot{\mathbf{E}}^p$).

L'équation de la thermodynamique locale pour l'élément polycristallin s'écrit par conséquent :

$$(2.35) \quad \Sigma \dot{\mathbf{E}}^p \approx \rho \frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial Y} \dot{Y} + \alpha T \delta \dot{\Sigma} + \rho c \dot{T}.$$

Cette équation s'obtient en prenant la valeur moyenne directe de l'équation (2.1).

Nous avons présenté ces quelques éléments sur l'énergie emmagasinée pour en souligner toutes ses caractéristiques et indiquer qu'il est difficile de concevoir qu'elle soit constamment égale à une fraction constante de la puissance plastique fournie ($\Sigma \dot{\mathbf{E}}^p / R$ avec $R \approx 10$) comme le supposent de nombreux auteurs. Nous verrons au paragraphe suivant une discussion quantitative de cette dernière hypothèse.

3. Champ des températures obtenues dans une tige viscoplastique

(σ, ϵ, T, U se rapportent ici au polycristal).

3.1. Chargement quasi-statique

Dans ZARKA 1968 ou 1973b, un modèle unidimensionnel pour le comportement viscoplastique du polycristal avait été décrit. Nous avons supposé que :

- i) un seul paramètre X , lié à la distribution moyenne des dislocations dans le polycristal, suffit à caractériser l'état interne (X étant choisi sans dimension) ;
- ii) les seuils limites d'élasticité sont proportionnels à X ;
- iii) la vitesse de déformation viscoplastique $\dot{\varepsilon}^p$ est une fonction des valeurs actuelles de σ , T et X ;
- iv) la variation du paramètre d'état X est elle aussi une fonction de σ , T , X ;
- v) l'énergie emmagasinée est proportionnelle à X^2 .

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}^p &= f(\sigma, T, X), \\ \dot{X} &= g(\sigma, T, X), \\ U_2 &= AX^2, \quad \text{avec } A \text{ constant.} \end{aligned}$$

Nous considérons ici une forme particulière des relations (3.1). En posant $S = \sigma/E$ où E est le module d'Young, nous écrivons :

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}^p &= \frac{|S|}{S} C_1(T) \langle |S| - X \rangle X, \\ \dot{X} &= C_2(T) \langle |S| - X \rangle X^{-\nu+1}, \\ u_2 &= \frac{U_2}{E} = aX^2, \end{aligned}$$

où les fonctions $C_1(T)$ et $C_2(T)$ sont définies par :

$$(3.3) \quad \begin{aligned} C_1(T) &\approx \frac{A_1}{kT} \exp\left\{-\frac{V}{kT}\right\}, \\ C_2(T) &\approx \frac{A_2}{kT} \exp\left\{-\frac{V}{kT}\right\}, \end{aligned}$$

$|S|$ est la valeur absolue de S ,

$\langle S-X \rangle$ est la partie positive de $S-X = \begin{cases} 0 & \text{si } S-X \leq 0 \\ S-X & \text{si } S-X \geq 0, \end{cases}$

ν , a , A_1 , A_2 , V , k sont des constantes physiques caractéristiques du métal.

R e m a r q u e. Les déformations viscoplastiques sont dues aux déplacements activés thermiquement des dislocations, cela explique la forme (3.3).

Nous chargeons la tige à vitesse de déformation constante C . Nous supposons cette vitesse assez élevée pour que l'hypothèse d'adiabaticité soit raisonnable ⁽¹⁾.

Il faut intégrer le système d'équations différentielles en S , X et T :

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \dot{S} + \alpha \dot{T} + \frac{|S|}{S} C_1(T) \langle |S| - X \rangle X &= C, \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^T + \dot{\varepsilon}^p, \\ \dot{X} &= C_2(T) \langle |S| - X \rangle X^{-\nu+1}, \\ |S| C_1(T) \langle |S| - X \rangle X &= 2aX\dot{X} + \alpha T\dot{S} + \rho c\dot{T}/E. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Il s'agit ici uniquement d'un exemple de calcul en thermoviscoplasticité. En réalité les équations (3.2) ne sont pas valables pour des vitesses très élevées.

avec les données initiales pour $t = 0$

$$(3.5) \quad S(0) = 0, \quad X(0) = X_0, \quad T(0) = T_0.$$

Le rapport R entre la puissance plastique fournie et l'énergie emmagasinée est donné par :

$$(3.6) \quad R \equiv \frac{|S| C_1(T) X^{\alpha-1}}{2a C_2(T)}.$$

Nous considérons à présent le cas d'une tige en aluminium pur pour laquelle nous pouvons prendre lorsque $T \approx T_0 \approx 300^\circ\text{C}$,

$$(3.7) \quad \begin{aligned} E &= 7.2 \cdot 10^5 \text{ Kgf/cm}^2, & X_0 &= 5 \cdot 10^{-4}, & \nu &\approx 4, \\ C_1(T_0) &\approx 4.13 \cdot 10^9/\text{s}, & C_2(T_0) &\approx 3.444 \cdot 10^{-6}/\text{s}, \\ \rho &= 2.7 \cdot 10^{-3} \text{ kg/cm}^3, & c &\approx 9 \cdot 10^6 \text{ cm}^2\text{s}^{-2}\text{C}^{-1}, \\ V &\approx 8kT_0 (\approx 0.2 \text{ e.v}), & a &\approx 36 & \alpha &= 25 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Nous avons effectué de nombreux calculs afin d'étudier l'influence des différentes hypothèses :

(1) toute la puissance plastique est dissipée thermiquement, c'est-à-dire : $a = 0$ dans la dernière équation de (3.4) ;

(2) il y a une énergie emmagasinée avec $a = 36$;

(3) Il y a une énergie emmagasinée mais l'équation est modifiée en :

$$(3.8) \quad 0.9|S|C_1(T)\langle|S|-X\rangle X = \alpha T \dot{S} + \rho c \dot{T} / E,$$

c'est-à-dire avec R , pris phénoménologiquement, = 10 comme de nombreux auteurs.

Nous avons aussi étudié si la solution est perturbée lorsque l'on admet que $C_1(T)$ et $C_2(T)$ ne varient pas avec la température.

Dans la Fig. 1, nous avons représenté :

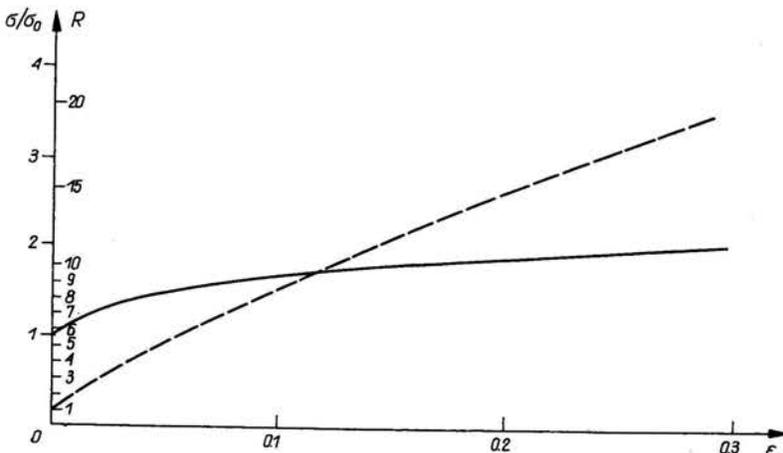


FIG. 1. Courbe statique $C \leq 1/\text{s}$ (trait continu). Rapport R (trait discontinu).

i) la courbe statique définie conventionnellement par $\dot{\varepsilon} \approx 0$ et dont l'équation est:

$$(3.9) \quad \varepsilon \approx S + \frac{C_1(T_0)}{C_2(T_0)(1+\nu)} \langle |S|^{1+\nu} - X_0^{1+\nu} \rangle,$$

ii) le rapport R en fonction de la déformation pour $\dot{\varepsilon} \approx 0$:

$$(3.10) \quad R \approx \frac{C_1(T_0)}{2aC_2(T_0)} |S|^p, \quad (\text{puisque } |S| \approx X).$$

Nous constatons que pour les valeurs des paramètres données en (3.7) ce rapport R est voisin de 1 initialement, mais devient ensuite très grand. (Toutes les vitesses $\dot{\varepsilon} \ll 1/s$ donnent les mêmes courbes).

Dans les Figs. 2 et 3, nous avons représenté les courbes obtenues pour la contrainte et les variations de température lorsque $C \approx 50/s$ et $C \approx 500/s$.

Nous avons intégré le système (3.4) en utilisant la méthode de Tréanor à pas variable. Nous ne constatons de légers écarts entre les solutions (lorsque les coefficients varient avec la température) que pour $C \approx 500/s$.

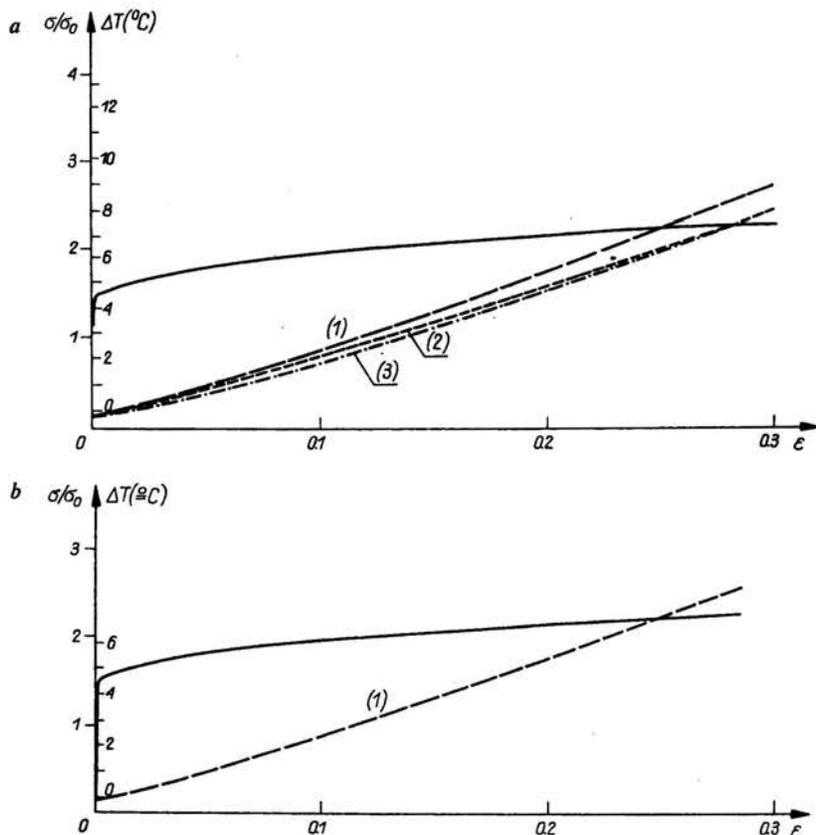
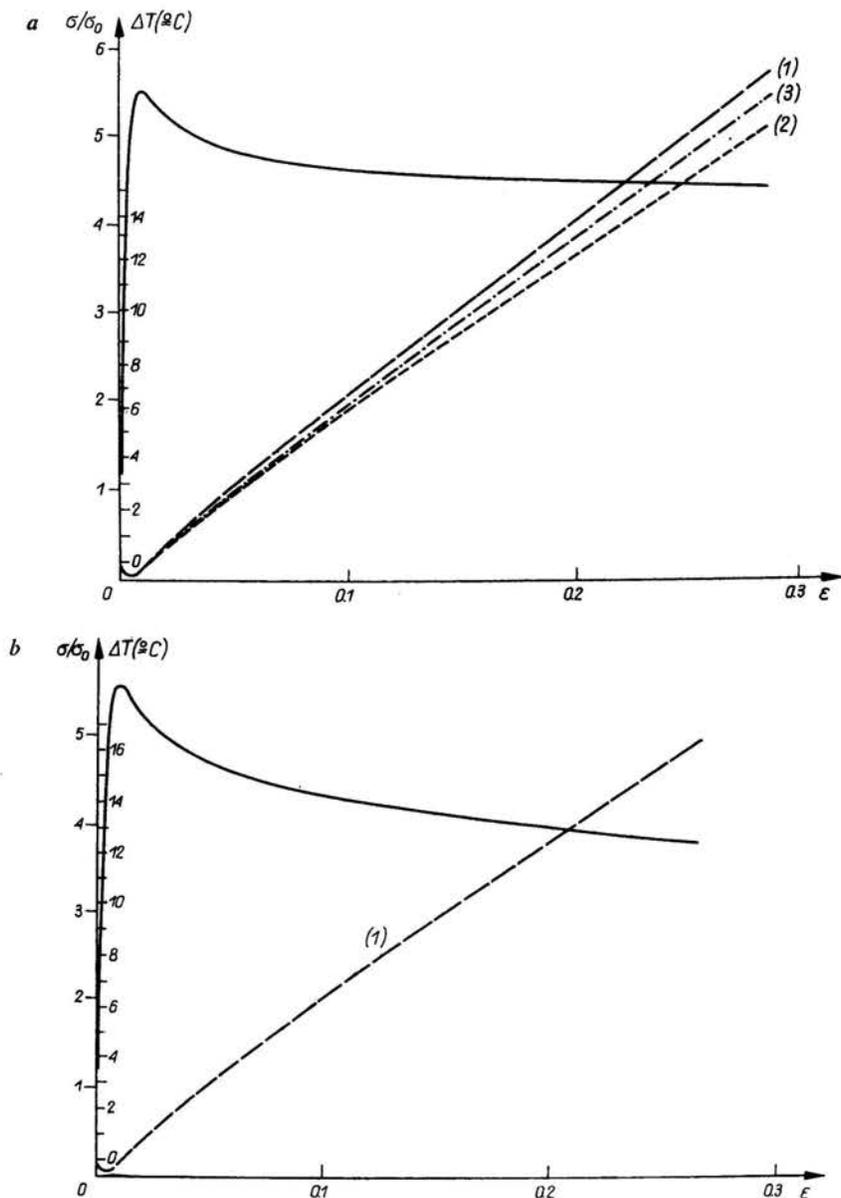


FIG. 2. Courbe quasi-statique et variation des températures pour $C \approx 50/s$.

Différentes hypothèses sur les coefficients C_1 et C_2 : (a) — indépendants des variations de température, (b) — liés aux variations de température. Différentes hypothèses sur l'équation de la thermodynamique: (1) — pas d'énergie emmagasinée, (2) — $\dot{U}_2 = 0.1\sigma\varepsilon^p$, est la variation d'énergie emmagasinée, (3) — $\dot{U}_2 = aX\dot{X}$, est la variation d'énergie emmagasinée.

FIG. 3. Mêmes légendes que sur la Fig. 2, mais $C \approx 500/\text{s}$.

3.2. Chargement dynamique

Nous supposons que le comportement viscoplastique de la tige est encore donné par (3.2), (3.3) et (3.7), mais nous considérons ici son impact sur une paroi rigide lorsque sa vitesse initiale est v_0 et sa longueur L .

Il faut par conséquent résoudre le système d'équations aux dérivées partielles qui expriment:

i) l'équation du mouvement:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t},$$

ii) l'équation de continuité:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

(3.11) iii) les relations de comportement:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \alpha \frac{\partial T}{\partial t} + f(\sigma, T, X),$$

$$\frac{\partial X}{\partial t} = g(\sigma, T, X);$$

iv) l'équation de la thermodynamique:

$$\sigma f(\sigma, T, X) = 2AX \frac{\partial X}{\partial t} + \alpha T \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

et où les inconnues sont $\sigma, v, \varepsilon, X$ et T , avec les données initiales pour $t = 0^-$:

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \sigma(x, 0) &= 0, & \varepsilon(x, 0) &= 0, \\ X(x, 0) &= X_0, & T(x, 0) &= T_0, \\ v(x, 0) &= v_0, \end{aligned}$$

et les conditions aux limites

pour $x = 0$

$$(3.13) \quad v(0, t) = 0 \quad \text{si} \quad \sigma(0, t) < 0,$$

ou $\sigma(0, t) = 0$

et pour $x = L$

$$\sigma(L, t) = 0.$$

Pour effectuer cette intégration numériquement, il est préférable d'utiliser les variables sans dimension suivantes:

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{x}{L}, & \tilde{t} &= \frac{a_0 t}{L}, & \tilde{S} &= \frac{S}{X_0}, & \tilde{X} &= \frac{X}{X_0}, & \tilde{T} &= \alpha T, \\ \tilde{V} &= \frac{\rho a_0 v}{EX_0} \end{aligned}$$

où $a_0 = \sqrt{E/\rho}$ est la vitesse des ondes élastiques.

On introduit ensuite les paramètres sans dimension:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \eta_1(T) &= C_1(T) X_0^2 L / a_0, \\ \eta_2(T) &= C_2(T) X_0^{1-\nu} L / a_0, \\ \eta_3 &= 2a X_0^2, & B &= \frac{\alpha X_0 E}{\rho c}. \end{aligned}$$

Le système (3.11) est hyperbolique; les lignes caractéristiques sont définies par:

$$(3.16) \quad \tilde{x} = \pm \tilde{t} + \text{const} \quad \text{et} \quad \tilde{x} = \text{const}.$$

Nous avons alors les relations le long de ces lignes :

i) sur $\tilde{x} = \pm \tilde{t} + \text{const}$,

$$(3.17) \quad d\tilde{S} \mp d\tilde{V} + \eta_1(T) \frac{|\tilde{S}|}{\tilde{S}} \langle |\tilde{S}| - \tilde{X} \rangle \tilde{X} d\tilde{t} = 0,$$

ii) et sur $\tilde{x} = \text{const}$,

$$(3.18) \quad \begin{aligned} d\tilde{X} &= \eta_2(T) \langle |\tilde{S}| - \tilde{X} \rangle \tilde{X}^{1-\nu} d\tilde{t}, \\ \tilde{T} d\tilde{S} + \frac{d\tilde{T}}{B} + \eta_3 \tilde{X} d\tilde{X} &= |\tilde{S}| \eta_1(T) \langle |\tilde{S}| - \tilde{X} \rangle \tilde{X} d\tilde{t}, \\ d\epsilon &= d\tilde{S} X_0 + d\tilde{T} + \eta_1(T) \frac{|\tilde{S}|}{\tilde{S}} \langle |\tilde{S}| - \tilde{X} \rangle \tilde{X} d\tilde{t}. \end{aligned}$$

La résolution numérique s'effectue alors facilement. L'intégration par la méthode de Tréanor le long des ondes de choc, $\tilde{x} = \pm \tilde{t} + nL$ permet d'obtenir des calculs très précis en des temps sur ordinateur très faibles.

Nous avons considéré le cas particulier d'une tige de longueur $L = 10\text{cm}$ qui arrive sur la paroi à une vitesse de 52m/s (c'est-à-dire $v_0 = 20$). Dans les Figs. 4, 5 et 6 nous avons représenté les principaux résultats obtenus pour :

$$(3.19) \quad \begin{aligned} \eta_1(T_0) &= 0.02, & \eta_2(T_0) &= 0.5335, \\ \eta_3 &= 0.03 & \text{et} & \quad B = 3.704 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Là aussi, nous n'observons que de faibles variations entre les solutions.

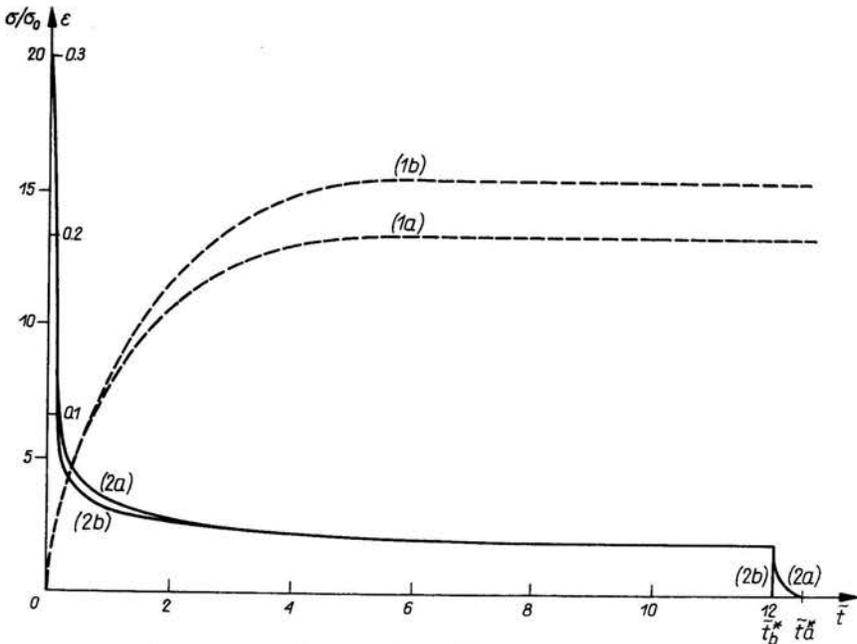


FIG. 4. Contrainte et déformation sur la base d'impact:

(1a) — déformation; (2a) — contrainte; pas d'énergie emmagasinée, coefficients C_1 et C_2 indépendants des variations de température; (1b) — déformation et (2b) contrainte: pas d'énergie emmagasinée C_1 et C_2 liés aux variations de température.

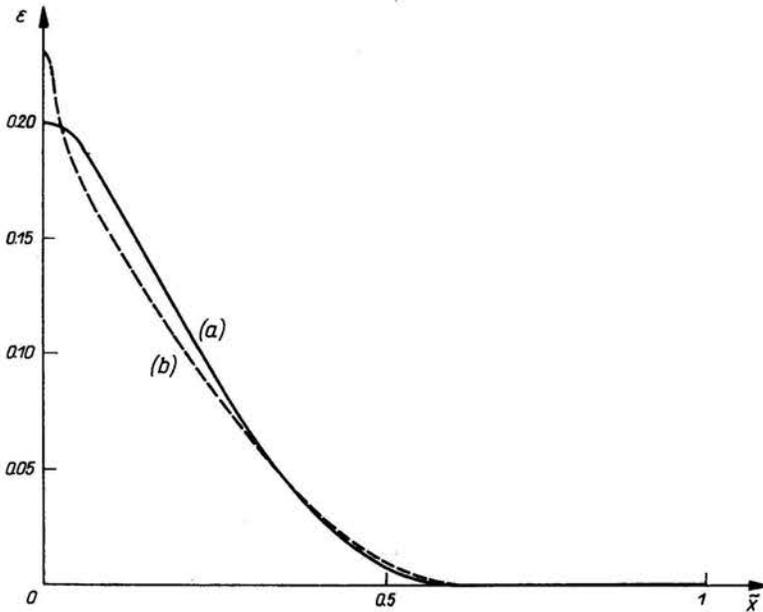


FIG. 5. Déformation permanente le long de la tige:

(a) — C_1 et C_2 indépendants des variations de température; (b) — C_1 et C_2 liés aux variations de température.

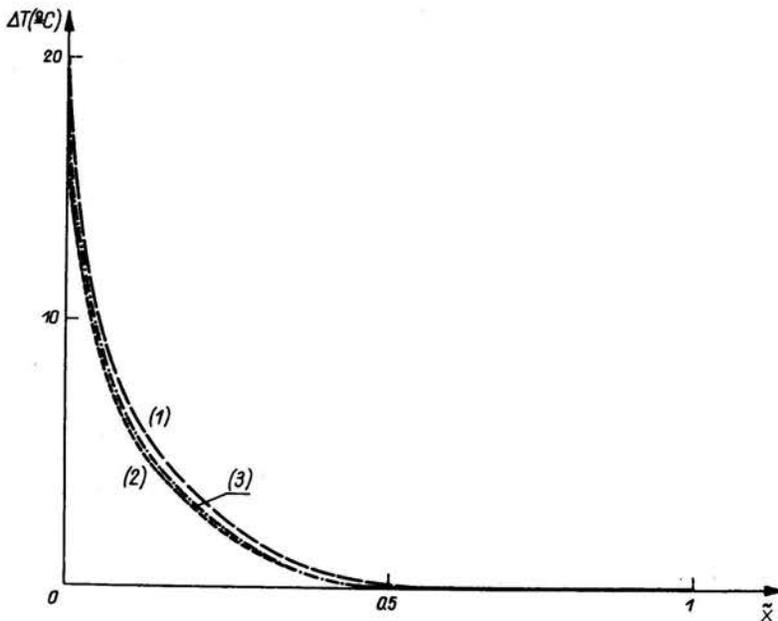


FIG. 6. Variation des températures le long de la tige après l'impact:

1) — pas d'énergie emmagasinée; (2) — variation d'énergie emmagasinée $\dot{U}_2 = 0.1\sigma\bar{x}^2$; (3) — variation d'énergie emmagasinée $\dot{U}_2 = a\bar{x}\bar{x}$.

4. Conclusions

Les résultats décrits dans l'exemple de la tige pour ces quelques cas de chargement démontrent qu'il y a très peu d'écart entre les solutions correspondant à des hypothèses différentes sur l'équation de la thermodynamique. Elles montrent aussi que l'influence des coefficients fonctions de la température est très faible ; il est donc impossible qu'elle puisse expliquer, comme l'ont admis de nombreux auteurs, certaines instabilités (en particulier formation de bandes et concentration des déformations dans ces bandes). Cette étude nous permet par conséquent d'indiquer qu'il n'est utile de tenir compte de la température que s'il y a un apport important de chaleur de l'extérieur (dans l'hypothèse des petites déformations).

Références

- A. BALTOV et TUONG VINH, C. R. Acad. Sci. Paris, 275, série A, 291, 1972.
H. D. BUI, Thèse, Paris dans Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches de l'E.D.F., série A, n° 3, 1969.
P. GERMAIN, et E. H. LEE, International Symposium, Foundations of Plasticity, 257, Ed. A. SAWCZUK, Warsaw 1972.
R. HILL, J. Mech. Phys. Solids, 15, (8), 79, 1967.
E. KRÖNER, dans Fundamentals Aspects of Dislocations Theory, édité par J. A. SIMMONS, R. de Wit et R. BULLOUGH, N.B.S. special publication 317, 2, 1972.
J. MANDEL, 11th Int. Congress Appl. Mech., 1964; Springer-Verlag 1966.
J. MANDEL, *Plasticité classique et viscoplasticité*, Cours C.I.S.M., Udine 1971.
W. K. NOWACKI, *Problèmes des ondes dans la théorie de plasticité* [en polonais], Editions Scientifiques Polonaises, 1973.
P. PERZYNA et T. WIERZBICKI, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 12, 225, 1964.
B. RANIECKI, Symposium Franco-Polonais, Problèmes de la Rhéologie, 307, 1971. Ed. W. K. NOWACKI. P.W.N., Varsovie 1973.
J. R. RICE, J. Appl. Mech., 37, 728, 1970.
G. I. TAYLOR, and H. QUINNEY, dans Scientific Papers of G. I. Taylor, 310, Cambridge 1958, 1934.
J. ZARKA, dans Mém. Art. Fr. 2^{ème} fascicule, 223, 1970.
J. ZARKA, J. Méc., 12, 2, 275, 1973.
J. ZARKA, Industrie Minérale, Cahier Spécial Rhéologie, 1, 1973b.

LABORATOIRE DE MÉCANIQUE DES SOLIDES
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, PARIS.

et

INSTITUT DES RECHERCHES FONDAMENTALES DE LA TECHNIQUE, VARSOVIE.

Reçu 2.XI.1973.