Sur les fonctions dérivées bornées.

(Résumé).

Par

Stefan Kempisty.

Toute fonction dérivée est mesurable, étant de première classe de Baire. Par conséquent une fonction $f(x)$ dérivée bornée dans l'intervalle (a, b) est toujours sommable dans cet intervalle. De plus l'intégrale de Lebesgue

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi$$

admet pour dérivée la fonction $f(x)$

Or, en invertissant l'ordre de deux passages à la limite qui nous conduisent à $F'(x)$, on arrive aux proprietés de l'ensemble des valeurs limites d'une fonction dérivée bornée.

Soient

$$l_0,\ l_1, \ldots l_n$$

des nombres divisant l'intervalle de variation de $f(x)$. Désignons par $\overset{x}{\underset{x_0}{mes}}(E_i)$ la mesure de la partie commune de l'ensemble

$$E_i = E\,[l_i \leqq f(x) < l_{i+1}]$$

et de l'intervalle (x_0, x_1), lorsque $x_0 \leqslant x$, au cas contraire nous poserons

$$\overset{x}{\underset{x_0}{mes}}(E_i) = -\overset{x_0}{\underset{x}{mes}}(E_i).$$

D'aprés la définition de l'intégrale de Lebesgue, si

$$l_{i+1} - l_i \leqslant \varepsilon,$$

on a

$$0 \leqslant \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d(\xi) - \frac{1}{x-x_0}\sum_{i=0}^{n} l_i \operatorname*{mes}_{x_0}^{x}(E_i) < \varepsilon$$

ou

$$0 \leqslant \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - \sum_{i=0}^{n} l_i \frac{\operatorname*{mes}_{x_0}^{x}(E_i)}{x-x_0} < \varepsilon.$$

Quand chacun des ensembles E_i possède une densité déterminée en x_0 [1]), soit $d_{x_0}(E_i)$, on obtient, en passant à la limite, la relation

$$0 \leqslant F'(x_0) - \sum_{i=0}^{n} l_i\, d_{x_0}(E_i) < \varepsilon.$$

Or il existe des fonctions telles que l'ensemble

$$E[\alpha < f(x) < \beta]$$

peut être dépourvu de la densité définie. Mais, le nombre d'ensembles E_i étant fini, nous pouvons toujours déterminer un passage à la limite qui conduit aux densités définies relativement à ce passage.

Ainsi, en désignant ces densités par $\delta_{x_0}(E_i)$, nous avons

$$0 \leqslant f(x_0) - \sum_{i=0}^{n} l_i\, \delta_{x_0}(E_i) < \varepsilon.$$

en tout point x_0 de (a, b), lorsque $f(x)$ est une fonction dérivée et $l_{i+1} - l_i \leqslant \varepsilon$.

Afin de déduire de ce théorème général les propriétés des valeurs limites d'une fonction dérivée, j'introduis la notion de la valeur limite appraximative. Nous dirons que β est une valeur limite approximative de $f(x)$ en un point x_0 lorsque la densité supérieure [2]) de l'ensemble E, définie par la condition

$$|f(x) - \beta| < \varepsilon,$$

est positive en x_0, quelque soit $\varepsilon > 0$.

---

[1]) La densité de E, c'est la dérivée de la fonction $\operatorname*{mes}_{a}^{x}(E)$, la notion est due à M. Lebesgue, Annales de l'Éc. Norm. XXVII, p. 406.

[2]) c. à d. la dérivée supérieure de la fonction $\operatorname*{mes}_{a}^{x}(E)$ en x_0.

L'influence de ces nombres sur la valeur de la somme $\sum_{i=0}^{n} l_i \delta_{x_0}(E_i)$ consiste en ce q'on a

$$\delta_{x_0}(E_i) = 0,$$

quand l'intervalle

$$l_i \leqslant y < l_{i+1}$$

ne contient pas de valeurs limites approximatives.

Comme l'ensemble de nombres β en x_0 est borné et fermé, on en distingue la plus grande des limites approximatives $L(x_0)$ et la plus petite $l(x_0)$.

Or je démontre que, $f(x)$ étant dérivée bornée dans (a, b), on a

$$l(x) \leqslant f(x) \leqslant L(x).$$

Si

$$l(x_0) = f(x_0) = L(x_0),$$

la fonction $f(x)$ est approvimativement continue en x_0, d'après la définition de M. Denjoy, c'est à dire la densité de l'ensemble

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

est égale à un, quelque soit ε positif[1]).

En choisissant convenablement les nombres l_i pour $f(x)$ approximative on peut arriver à réduire la somme $\sum_{i=0}^{n} l_i \delta_{x_0}(E_i)$ à un seul terme qui tend vers $f(x_0)$ quand ε décroit infiniment. Alors $f(x)$ est égale en x_0 à la dérivée de son intégrale. On obtient ainsi un théorème de M. Denjoy[2]).

Ensuite je démontre que, $f(x)$ étant une fonction dérivée bornée dans (a, b), l'égalité

$$f(x) = L(x)$$

implique que $f(x)$ est la seule valeur limite principale en x ou, ce qui revient au même, $f(x)$ est approximativemet continue.

Or cette égalité a lieu quand $f(x)$ est approximativement semi-continue supérieurement, puisque alors

$$f(x) \geqslant L(x).$$

Ainsi une fonction dérivée bornée ne peut pas être approximativement semicontinue sans être approximativement continue.

---

[1]) A. Denjoy, Sur les fonctions dérivées sommables, Bull. de la Soc. Math. de France 1915, p. 165.

[2]) loc. cit. p. 172.

En particulier, pour qu'une fonction semicontinue bornée soit dérivée, il faut et il suffit qu'elle soit approximativement continue.

Les théorèmes généraux énoncés plus haut sur les fonctions dérivées subsistent pour les nombres dérivés. Pour généraliser les théorèmes sur les fonctions approximativement continues il suffit de remplacer dans la définition de cette classe de fonctions le terme „densité" par „densité supérieure".

On arrive alors à la notion de la continuité „quasi-approximative". Cette dernière peut être considérée comme une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction semicontinue supérieurement soit une fonction dérivée supérieure d'une fonction continue.

Comme, d'après M. Young[1]), une fonction dérivée supérieure d'une fonction continue est semicontinue supérieurement en chaque point d'un ensemble E partout dense sur tout ensemble parfait, on voit que cette dérivée est quasi-approximativement continue dans les points de E, dès qu'elle est bornée. Il en est de même de toute fonction dérivée de Dini.

---

[1]) W. N. Young. A new method in the theory of integration, Proc. Lond. Math. Soc. 1911.

Wilno, décembre 1922.