XIV.

SUL MOTO DI UN SISTEMA NEL QUALE SUSSISTONO MOTI INTERNI VARIABILI

« Rend. Acc. Lincei », Ser. 5ª, vol. IV, 2° sem. 1895, pp. 107–110.

Il prof. PEANO in una Nota presentata all'Accademia di Torino nella seduta del 23 giugno u. s., e testé uscita alla luce, mostra che, in un sistema simmetrico attorno ad un asse che mantiene costante la forma e la distribuzione di densità, possono farsi variare i moti interni (conservandone piccolissima la coppia di quantità di moto) con una legge tale che il polo di rotazione vada continuamente allontanandosi dal polo d'inerzia.

Poiché questo risultato può ottenersi come una evidente ed immediata conseguenza di formule e di considerazioni da me esposte in alcune precedenti Memorie, che il prof. PEANO si dimentica di citare, sebbene pubblicate quest'anno negli stessi « Atti dell'Accademia di Torino », così mi permetto di mostrarlo qui evitando l'impiego, fatto dal detto autore, di metodi e di notazioni non accettati generalmente e di procedimenti poco appropriati a rendere chiara la via tenuta ed il risultato conseguito.

Le formule a cui mi riferisco sono le seguenti:

$$(a)\quad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)\,qr + m_3 q - m_2 r + \dfrac{dm_1}{dt} = 0 \\[2ex] B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)\,rp + m_1 r - m_3 p + \dfrac{dm_2}{dt} = 0 \\[2ex] C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)\,pq + m_2 p - m_1 q + \dfrac{dm_3}{dt} = 0\,, \end{cases}$$

nelle quali m_1, m_2, m_3 denotano le componenti della coppia di quantità di moto dovuta ai moti interni secondo gli assi principali centrali d'inerzia; p, q, r sono le componenti della rotazione secondo gli stessi assi e A, B, C sono i momenti principali centrali d'inerzia, che debbono supporsi costanti finché si ammette che i moti interni non alterino la forma e la distribuzione di densità del corpo [1].

In una Memoria pubblicata nelle « Astronomische Nachrichten » [2] ho mostrato che, scelto ad arbitrio il moto del polo, e quindi la relativa *polodia*

(1) *Sulla teoria dei moti del polo terrestre.* « Atti R. Acc. di Torino », 1895 [in questo vol.: VI, pp. 108–112].

(2) Bd. 138, N. 3291–92. Art. IV [in questo vol.: V, pp. 87–107]. Vedi anche la Nota citata precedentemente.

sull'ellissoide d'inerzia, si possono calcolare i moti interni che inducono il detto movimento del polo ed ho anche indicato le formule per raggiungere il risultato.

Si osservi ora che se l'ellissoide d'inerzia è di rivoluzione ed i moti interni sono nulli, le polodie sono, come è ben noto, i paralleli dell'ellissoide. Volendo dunque ottenere un moto che allontani sempre più il polo di rotazione dal polo d'inerzia mediante moti interni piccolissimi, basterà evidentemente scegliere come polodia una curva a spirale sull'ellissoide d'inerzia, le cui spire si avvicinino ai paralleli dell'ellissoide, e determinare quindi moti interni che corrispondano alla detta polodia. Quanto più strette saranno le spire e quindi quanto meno si discosteranno dai paralleli, tanto più piccola risulterà la quantità di moto dei moti interni necessaria ad indurre la deviazione del polo dai paralleli stessi, e perciò tanto più grande sarà il cammino che dovrà descrivere il polo di rotazione per raggiungere una data deviazione da quello di inerzia.

Per rendere assolutamente intuitivo il calcolo, si facciano comparire nella *(a)* i coseni γ_1, γ_2, γ_3 che l'asse fisso della coppia di quantità di moto forma con gli assi d'inerzia. Posta la quantità costante

$$(Ap + m_1)^2 + (Bq + m_2)^2 + (Cr + m_3)^2 = K^2$$

avremo (vedi note citate)

$$\gamma_1 = \frac{Ap + m_1}{K} \quad , \quad \gamma_2 = \frac{Bq + m_2}{K} \quad , \quad \gamma_3 = \frac{Cr + m_3}{K} \tag{1}$$

onde se $B = A$, e si pone

$$K\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right) = \lambda \quad , \quad a = \frac{m_1}{A} \quad , \quad b = \frac{m_2}{A} \quad , \quad c = \frac{m_3}{C},$$

le *(a)* diverranno

$$\frac{d\gamma_1}{dt} + \lambda\gamma_2\gamma_3 + c\gamma_2 - b\gamma_3 = 0$$

$$\frac{d\gamma_2}{dt} - \lambda\gamma_3\gamma_1 + a\gamma_3 - c\gamma_1 = 0$$

$$\frac{d\gamma_3}{dt} + b\gamma_1 - a\gamma_2 = 0$$

le quali, in ultima analisi, non rappresentano che le formule di POISSON, in cui le componenti p, q, r della rotazione siano ricavate dalle (1) espresse mediante i coseni di direzione γ_1, γ_2, γ_3.

Posto

$$\gamma_1 = \operatorname{sen}\theta\cos\varphi \quad , \quad \gamma_2 = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \quad , \quad \gamma_3 = \cos\theta,$$

con

$$\varphi = \lambda\int\cos\theta\, dt$$

le equazioni precedenti assumeranno la forma

$$\theta' \cos\theta \cos\varphi + c\gamma_2 - b\gamma_3 = 0$$

$$\theta' \cos\theta \operatorname{sen}\varphi + a\gamma_3 - c\gamma_1 = 0$$

$$-\theta' \operatorname{sen}\theta \qquad + b\gamma_1 - a\gamma_2 = 0\,,$$

le quali sono soddisfatte prendendo

$$a = -\theta' \operatorname{sen}\varphi \quad , \quad b = \theta' \cos\varphi \quad , \quad c = 0\,;$$

quindi

$$\mathrm{M} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2} = \theta' \mathrm{A}\,.$$

Prendendo θ' costante e piccolissimo, la grandezza M delle coppie di quantità di moto dei movimenti interni si conserverà piccolissima, mentre avremo

$$p = \frac{\mathrm{K}\gamma_1 - m_1}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{A}} \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + \theta' \operatorname{sen}\varphi$$

$$q = \frac{\mathrm{K}\gamma_2 - m_2}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{A}} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi - \theta' \cos\varphi$$

$$r = \frac{\mathrm{K}\gamma_3 - m_3}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{C}} \cos\theta\,,$$

d'onde chiamando ψ l'angolo che l'asse d'inerzia forma con quello di rotazione

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{r} = \frac{\sqrt{\dfrac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{A}^2} \operatorname{sen}^2\theta + \theta'^2}}{\dfrac{\mathrm{K}}{\mathrm{C}} \cos\theta}$$

formula che prova che ψ va continuamente aumentando se θ' è positivo, e può raggiungere e sorpassare il valore $\pi/2$.

La possibilità che dopo un certo tempo l'azione dei moti interni produca uno spostamento grande del polo di rotazione rende insufficiente, allorché si vogliono studiare i piccoli moti del polo di rotazione (indotti da moti interni variabili), di porre la condizione che la grandezza della coppia di quantità di moto di questi non oltrepassi un certo limite.

È perciò che volendo seguire una trattazione rigorosa nell'esame di questa questione, ho tenuto un cammino diverso in una mia precedente Memoria [(3)]. In essa sono partito esplicitamente dalla ipotesi che durante tutto l'intervallo di tempo (dell'ordine delle grandezze finite) in cui si studia il moto, il polo di rotazione eseguisca dei piccoli movimenti attorno al polo d'inerzia con date leggi e ho cercato quali sono i moti interni capaci di indurre i detti movimenti. Quindi nulla infirma la legittimità della determinazione dei moti interni fatta in questa maniera.

(3) *Sui moti periodici del polo terrestre.* « Atti R. Acc. di Torino », 5 maggio 1895. *Osservazioni* sulla detta Memoria, 23 giugno 1895. - Vedi specialmente la Nota posta alla fine della prima Memoria [in questo vol.: X, XI, pp. 141-154].