Nota II.

Ibidem, vol. XXXI, 1896, pp. 400–408.

1. In una Nota presentata nella scorsa seduta esposi un teorema sulla inversione degli integrali definiti per la cui validità basta soltanto che le funzioni che compariscono nel problema siano continue, derivabili e finite. È da osservare ora che in alcuni casi importanti che si presentano effettivamente in pratica quest'ultima condizione non è soddisfatta.

Si ricordi l'importanza che riconoscemmo avere quella funzione che nella Nota precedente chiamammo $h(y)$ e che fu supposta finita e diversa da zero. È appunto questa quantità che nei casi a cui ora abbiamo accennato diviene infinita.

Mi propongo quindi di svolgerli (come già annunziai nella Nota citata) togliendo così una limitazione alle funzioni date nel problema.

2. Supponiamo perciò che nella formula da invertire

$$f(y) - f(\alpha) = \int_\alpha^y \varphi(x)\, \mathrm{H}(x, y)\, dx \tag{1}$$

$\mathrm{H}(x, y)$ divenga infinita per $x = y$ di ordine inferiore all'unità, in modo che si possa porre

$$\mathrm{H}(x, y) = \frac{\mathrm{G}(x, y)}{(y - x)^\lambda} \tag{2}$$

in cui $\lambda < 1$. Questa ipotesi corrisponde evidentemente a quella in cui si abbia

$$h(x) = \infty.$$

Ammettiamo $f(y)$ e $f'(y)$ finite e continue per y compreso fra α e $\alpha + \mathrm{A}$ $(\mathrm{A} > 0)$; $\mathrm{G}(x, y)$, $\mathrm{G}_2(x, y) = \partial \mathrm{G}/\partial y$ pure finite e continue per tutti i valori di x, y compresi fra α e $\alpha + \mathrm{A}$, e si supponga maggiore di zero il limite inferiore dei valori assoluti di $\mathrm{G}(x, x)$.

Cerchiamo di ricondurre questo caso a quello trattato nella Nota precedente.

3. A tal fine supponiamo che la funzione finita e continua $\varphi(x)$ soddisfi la (1).

Moltiplicando ambo i membri di questa equazione per $dy/(z-y)^{1-\lambda}$ in cui $\alpha + \mathrm{A} > z > \alpha$ e integrando fra i limiti α e z, si otterrà

$$\int_\alpha^z \{f(y) - f(\alpha)\} \frac{dy}{(z-y)^{1-\lambda}} = \int_\alpha^z \frac{dy}{(z-y)^{1-\lambda}} \int_\alpha^y \varphi(x) \frac{\mathrm{G}(x, y)}{(y-x)^\lambda}\, dx$$

onde applicando il principio di Dirichlet

$$(3)\qquad \int_\alpha^z \{f(y) - f(\alpha)\} \frac{dy}{(z-y)^{1-\lambda}} = \int_\alpha^z \varphi(x)\, dx \int_x^z \frac{G(x, y)}{(z-y)^{1-\lambda}(y-x)^\lambda} dy .$$

Poniamo

$$(4)\qquad \int_\alpha^z \{f(y) - f(\alpha)\} \frac{dy}{(z-y)^{1-\lambda}} = \psi(z)$$

$$(5)\qquad \int_x^z \frac{G(x, y)}{(z-y)^{1-\lambda}(y-x)^\lambda} dy = L(x, z);$$

allora l'equazione precedente diverrà

$$(6)\qquad \psi(z) = \int_\alpha^z \varphi(x)\, L(x, z)\, dx.$$

Possiamo dunque concludere che, *se la funzione finita e continua* $\varphi(x)$ *soddisfa la* (1), *verificherà la* (6).

4. Dalla (4) segue, mediante una integrazione per parti,

$$\psi(z) = \frac{1}{\lambda} \int_\alpha^z f'(y)\,(z-y)^\lambda\, dy$$

quindi derivando

$$(7)\qquad \psi'(z) = \int_\alpha^z f'(y) \frac{dy}{(z-x)^{1-\lambda}} .$$

Ne segue che $\psi'(z)$ si mantiene finita e continua per i valori di z compresi fra α e $\alpha + A$. Inoltre dalla (4) si deduce

$$\psi(\alpha) = 0 .$$

Si ponga nella (5)

$$y = (z - x)\, u + x$$

allora si avrà

$$(5')\qquad L(x, z) = \int_0^1 G(x, (z-x)\, u + x) \frac{du}{u^\lambda (1-u)^{1-\lambda}} ,$$

perciò indicando con z_1 un valore compreso fra x e z risulterà

$$(5'')\qquad L(x, z) = G(x, z_1) \int_0^1 \frac{du}{u^\lambda (1-u)^{1-\lambda}} = G(x, z_1) \frac{\pi}{\operatorname{sen} \lambda\pi} .$$

Se ne conchiude che $L(x, z)$ è una funzione sempre finita pei valori di x, z compresi fra α e $\alpha + A$. Avremo poi

$$L(z, z) = l(z) = G(z, z) \frac{\pi}{\operatorname{sen} \lambda\pi}$$

onde, posto

$$G(z, z) = g(z)$$

si otterrà

$$l(z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \lambda\pi} g(z). \tag{5'''}$$

Dalla (5) risulta pure la continuità di $L(x, z)$. Derivando la (5') rapporto a z si ha

$$L_2(x, z) = \frac{\partial L(x, z)}{\partial z} = \int_0^1 G_2(x, (z - x) u + x) \left(\frac{u}{1 - u}\right)^{1-\lambda} du \tag{8}$$

$$= \int_x^z G_2(x, y) \left(\frac{y - x}{z - y}\right)^{1-\lambda} \frac{dy}{z - x}.$$

Ne segue che

$$L_2(x, z) = G_2(x, z_2) \int_0^1 \left(\frac{u}{1 - u}\right)^{1-\lambda} du = G_2(x, z_2) \frac{\pi(1 - \lambda)}{\operatorname{sen} \lambda\pi} \tag{8'}$$

in cui z_2 è un valore compreso fra x e z.

Possiamo dunque concludere che $L_2(x, z)$ è finita per x e z compresi fra α e $\alpha + A$; oltre a ciò essa è anche continua.

5. La questione dunque di invertire la formula (6) rientra nella classe di problemi esaminati nella precedente Nota e si potrà concludere che *vi è una ed una sola funzione finita e continua* $\varphi(x)$ *che soddisfa la* (6) la quale sarà data da

$$\varphi(y) = \frac{\psi'(y)}{l(y)} - \frac{1}{l(y)} \int_\alpha^y \psi'(x) \sum_0^\infty {}_i S_i(x, y)\, dx$$

in cui

$$S_0 = \frac{L_2(x, y)}{l(x)}$$

$$S_i = \int_y^x S_{i-j}(x, \xi) S_{j-1}(\xi, y)\, d\xi.$$

Applicando dunque le (5'''), (7), otterremo

$$\varphi(z) = \frac{\operatorname{sen} \lambda\pi}{\pi g(z)} \int_\alpha^z f'(x) \frac{dx}{(z - x)^{1-\lambda}} - \frac{\operatorname{sen} \lambda\pi}{\pi g(z)} \int_\alpha^z \left\{ \int_\alpha^y f'(x) \frac{dx}{(y - x)^{1-\lambda}} \right\} \sum_0^\infty {}_i S_i(y, z)\, dy$$

ovvero, mediante il principio di DIRICHLET,

$$\varphi(z)=\frac{\operatorname{sen}\lambda\pi}{\pi g(z)}\int_\alpha^z f'(x)\left\{\frac{1}{(z-x)^{1-\lambda}}-\int_x^z\sum_0^\infty{}_i\frac{S_i(y,z)}{(y-x)^{1-\lambda}}dy\right\}dx$$

e finalmente, a cagione della convergenza in egual grado della serie,

$$\varphi(z)=\frac{\operatorname{sen}\lambda\pi}{\pi g(z)}\int_\alpha^z f'(x)\left\{\frac{1}{(z-x)^{1-\lambda}}-\sum_0^\infty{}_i\int_z^x\frac{S_i(y,z)}{(y-x)^{1-\lambda}}dy\right\}dx\,. \tag{9}$$

6. Bisognerà ora provare che questa funzione verifica l'equazione data (1). A tal fine basterà dimostrare inversamente a quanto si è fatto nel § 3 che, *se la funzione finita e continua* $\varphi(z)$ *soddisfa la* (6), *essa verificherà la* (1).

Infatti osserviamo che se è verificata la (6), ossia la (3), derivando rapporto a z ambo i membri avremo (tenendo presente la (7))

$$\int_\alpha^z f'(y)\frac{dy}{(z-y)^{1-\lambda}}=\frac{d}{dz}\int_\alpha^z\varphi(x)\,dx\int_x^z\frac{G(x,y)}{(z-y)^{1-\lambda}(y-x)^\lambda}dy$$

e moltiplicando ambo i membri per $dz/(v-z)^\lambda$ in cui $\alpha+A>v>\alpha$ e integrando fra a e v, si otterrà

$$\int_\alpha^v\frac{dz}{(v-z)^\lambda}\int_\alpha^z f'(y)\frac{dy}{(z-y)^{1-\lambda}}=\int_\alpha^v\frac{dz}{(v-z)^\lambda}\frac{d}{dz}\int_\alpha^z\varphi(x)\,dx\int_x^z\frac{G(x,y)}{(z-y)^{1-\lambda}(y-x)^\lambda}dy \tag{10}$$

$$=\frac{d}{dv}\int_\alpha^v\frac{dz}{(v-z)^\lambda}\int_\alpha^z\varphi(x)\,dz\int_x^z\frac{G(x,y)}{(z-y)^{1-\lambda}(y-x)^\lambda}dy\,.$$

Ora per il principio di DIRICHLET

$$\int_\alpha^v\frac{dz}{(v-z)^\lambda}\int_\alpha^z f'(y)\frac{dy}{(z-y)^{1-\lambda}}=\int_\alpha^v f'(y)\,dy\int_y^v\frac{dz}{(v-z)^\lambda(z-y)^{1-\lambda}}$$

$$=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\lambda\pi}\{f(v)-f(\alpha)\};$$

$$\int_\alpha^v\frac{dz}{(v-z)^\lambda}\int_\alpha^z\varphi(x)\,dx\int_x^z\frac{G(x,y)}{(z-y)^{1-\lambda}(y-x)^\lambda}dy$$

$$=\int_\alpha^v\varphi(x)\,dx\int_x^v\frac{dz}{(v-z)^\lambda}\int_x^z\frac{G(x,y)}{(z-y)^{1-\lambda}(y-x)^\lambda}dy$$

$$=\int_\alpha^v\varphi(x)\,dx\int_x^v\frac{G(x,y)\,dy}{(y-x)^\lambda}\int_y^v\frac{dz}{(v-z)^\lambda(z-y)^{1-\lambda}}=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\lambda\pi}\int_\alpha^v\varphi(x)\,dx\int_x^v\frac{G(x,y)}{(y-x)^\lambda}dy\,.$$

Quindi la (10) diventerà

$$\frac{\pi}{\operatorname{sen}\lambda\pi}\{f(v)-f(\alpha)\}=\frac{d}{dv}\left\{\frac{\pi}{\operatorname{sen}\lambda\pi}\int_\alpha^v\varphi(x)\,dx\int_x^v\frac{G(x,y)\,dy}{(y-x)^\lambda}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\lambda\pi}\int_\alpha^v\varphi(x)\frac{G(x,v)}{(v-x)^\lambda}\,dx$$

e per la (2)

$$f(v)-f(\alpha)=\int_\alpha^v\varphi(x)\,H(x,v)\,dx$$

come volevasi dimostrare.

7. Avremo dunque il teorema seguente:
Se si ha la equazione funzionale

$$\text{(A)}\qquad f(y)-f(\alpha)=\int_\alpha^y\varphi(x)\frac{G(x,y)}{(y-x)^\lambda}\,dx\qquad(\lambda<1)$$

in cui $f(y)$ *e* $f'(y)$ *si mantengono finite e continue per* y *compreso fra* α *e* $\alpha+$ (A >0); *e* $G(x,y)$ *e* $\partial G/\partial y=G_2(x,y)$ *sono pure finite e continue per tutti i valori di* x*,* y *compresi entro i limiti* α e $\alpha+A$ *mentre è maggiore di zero il limite inferiore dei valori assoluti di* $g(y)=G(y,y)$ *per* y *compreso nello stesso intervallo, esisterà una ed una sola funzione finita e continua* φ *che soddisfa l'equazione funzionale per* y *compreso fra* α *e* $\alpha+A$*, la quale sarà data da*

$$\text{(B)}\qquad \varphi(z)=\frac{\operatorname{sen}\lambda\pi}{\pi}\frac{1}{g(z)}\int_\alpha^z f'(x)\sum_0^\infty{}_i\,T_i(x,z)\,dx$$

in cui

$$\text{(C)}\qquad\left\{\begin{aligned}S_0(y,z)&=\frac{\operatorname{sen}\lambda\pi}{\pi}\frac{1}{g(z)}\int_y^z G_2(y,\xi)\left(\frac{\xi-y}{z-\xi}\right)^{1-\lambda}\frac{d\xi}{z-y}\\ T_0(x,z)&=\frac{1}{(z-x)^{1-\lambda}}\\ T_i(x,z)&=\int_z^x S_0(\xi,z)\,T_{i-1}(x,\xi)\,d\xi.\end{aligned}\right.$$

Infatti dalla (9) segue

$$T_i(x,z)=\int_z^x\frac{S_{i-1}(y,z)}{(y-x)^{1-\lambda}}\,dy=\int_z^x S_{i-1}(y,z)\,T_0(x,y)\,dy,$$

quindi

$$\mathrm{T}_i(x,z)=\int_z^x \mathrm{T}_0(x,y)\,dy\int_z^y \mathrm{S}_{i-j-1}(y,\xi)\,\mathrm{S}_{j-1}(\xi,z)\,d\xi$$

$$=\int_z^x \mathrm{S}_{j-1}(\xi,z)\,d\xi\int_\xi^x \mathrm{T}_0(x,y)\,\mathrm{S}_{i-j-1}(y,\xi)\,dy$$

e per conseguenza

$$\mathrm{T}_i(x,z)=\int_z^x \mathrm{S}_{j-i}(\xi,z)\,\mathrm{T}_{i-j}(x,\xi)\,d\xi$$

onde facendo $j=1$

$$\mathrm{T}_i(x,z)=\int_x^x \mathrm{S}_0(\xi,z)\,\mathrm{T}_{i-1}(x,\xi)\,d\xi.$$

8. Possiamo facilmente vedere in quale relazione sta questo risultato con la nota formula di ABEL.

Questa formula risolve il caso in cui si supponga costante ed eguale ad 1 la funzione $\mathrm{G}(x,y)$. Allora le T_i $(i>0)$ della (B) divengono zero e la quantità sotto il segno d'integrazione si riduce al suo primo termine. Dunque la formula data da ABEL corrisponde al primo termine dello sviluppo col quale abbiamo dato la soluzione del problema nel caso generale.

9. Esaminiamo il caso particolare in cui sia $\mathrm{G}(x,y)=\mathrm{F}(y-x)$, e $\mathrm{F}(0)=1$. Avremo allora

$$\mathrm{S}_0(y,z)=\frac{\operatorname{sen}\lambda\pi}{\pi}\int_y^z \mathrm{F}'(\xi-y)\left(\frac{\xi-y}{z-\xi}\right)^{1-\lambda}\frac{d\xi}{z-y}=\frac{\operatorname{sen}\lambda\pi}{\pi(z-y)}\int_0^{z-y}\mathrm{F}'(u)\left(\frac{u}{z-y-u}\right)^{1-\lambda}du,$$

onde, posto

$$s_0(v)=\frac{\operatorname{sen}\lambda\pi}{\pi v}\int_0^v \mathrm{F}'(u)\left(\frac{u}{v-u}\right)^{1-\lambda}du$$

sarà

$$\mathrm{S}_0(y,z)=s_0(z-y).$$

Si ponga

$$t_0(v)=\frac{1}{v^{1-\lambda}}$$

$$t_i(v)=\int_0^v s_0(v-u)\,t_{i-1}(u)\,du;$$

avremo

$$\mathrm{T}_i(x,z)=(-1)^i\,t_i(z-x).$$

Infatti per $i = 0$ questa formula è vera. Supponiamola vera per i, allora

$$T_{i+1}(x, z) = (-1)^i \int_z^x s_0(z-\xi)\, t_i(\xi - x)\, d\xi = (-1)^i \int_{z-x}^0 s_0(z-x-u)\, t_i(u)\, du$$

$$= (-1)^{i+1} \int_0^{z-x} s_0(z-x-u)\, t_i(u)\, du = (-1)^{i+1}\, t_{i+1}(z-x).$$

Si ponga

$$\Omega(v) = \sum_0^\infty {}_i (-1)^i\, t_i(v);$$

ne seguirà

$$\sum_0^\infty {}_i T_i(x, z) = \Omega(z-x)$$

e per conseguenza:

La formula di inversione della relazione funzionale

$$f(y) - f(\alpha) = \int_\alpha^y \varphi(x) \frac{F(y-x)}{(y-x)^\lambda}\, dx \qquad (\lambda < 1,\ F(0) = 1)$$

è

$$\varphi(z) = \frac{\operatorname{sen} \lambda\pi}{\pi} \int_\alpha^z f'(x)\, \Omega(z-x)\, dx$$

in cui

$$\left\{\begin{aligned} s_0(v) &= \frac{\operatorname{sen} \lambda\pi}{\pi v} \int_0^v F'(u) \left(\frac{u}{v-u}\right)^{1-\lambda} du \\ t_0(v) &= \frac{1}{v^{1-\lambda}} \\ t_i(v) &= \int_0^v s_0(v-u)\, t_{i-1}(u)\, du \\ \Omega(v) &= \sum_0^\infty {}_i (-1)^i\, t_i(v). \end{aligned}\right.$$

Questo risultato è evidentemente più generale di quello di SONINE (1), giacché lo si ottiene senza ricorrere allo sviluppo di F in serie del TAYLOR.

(1) «Acta Mathematica», T. 4, page 171.