Nota III.

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XI, (1° sem. 1902), pp. 228-337. (*)

10. - Sviluppi asintotici.

Riprendiamo l'espressione (15) di $U_2 - F_2$.

Il secondo membro, considerato come funzione del parametro q, ha, per $q = \infty$, un punto singolare essenziale. Infatti esso differisce dall'espressione rigorosa (10) di F_2 soltanto per lo scambio di B in q; ed F_2, quale funzione di B, ha effettivamente una singolarità essenziale in $B = \infty$, come risulta dalla (10″) (¹).

Non sarà dunque possibile sviluppare $U_2 - F_2$ in serie di potenze di $1/q$, convergente nell'intorno di $1/q = 0$.

Però, limitandosi ai valori reali e positivi di $1/q$, si può stabilire la validità dello sviluppo di Taylor fino a un ordine qualsiasi e fissare il limite superiore di ciascun resto.

Ecco in qual modo.

Cambiando λ in λ/q, la (15) si può scrivere:

$$q(U_2 - F_2) =$$
$$-\frac{i}{2}\int_0^\infty e^{-\lambda}\left\{\frac{1}{|z| + d + i\left(y - \frac{\lambda}{q}\right)} + \frac{1}{|z| + d - i\left(y + \frac{\lambda}{q}\right)}\right\} d\lambda .$$

(*) Presentata dal Socio Vito Volterra nella seduta del 16 marzo 1902.

(¹) In quanto, se $B = \infty$ non fosse una singolarità essenziale di F_2, ciò accadrebbe in particolare per i valori 0, 0, 1 di y, z, d, ossia per la funzione

$$e^{iB}\,\mathrm{Li}\,e^{-iB} = e^{iB}\log B + e^{iB}\left\{C - i\frac{\pi}{2} + \sum_1^\infty m \frac{(-i)^m B^m}{m\cdot m!}\right\}.$$

il che evidentemente non è, poichè tanto il coefficiente di log B, quanto il secondo addendo, sviluppati per potenze di B, contengono un numero infinito di termini.

Sotto questa forma apparisce chiaramente che il secondo membro rimane finito e determinato, anche quando $1/q$ converge a zero (si intende, per valori reali).

Infatti il modulo della funzione sotto il segno è, per qualsiasi valore di λ,

$$\leqslant 2 \frac{|z|+d}{(|z|+d)^2+y^2} e^{-\lambda},$$

funzione evidentemente integrabile nell'intervallo 0, ∞.

Si può anzi asserire che la funzione $U_2 - F_2$ ammette derivate di qualunque ordine, rispetto all'argomento $1/q$, anche nel punto $1/q = 0$.

Infatti:

$$\frac{d^m q(U_2 - F_2)}{d\left(\frac{1}{q}\right)^m} = \tag{19}$$

$$= -\frac{i^{m+1}}{2} m! \int_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^m \left\{ \frac{1}{\left[|z|+d+i\left(y-\frac{\lambda}{q}\right)\right]^{m+1}} + \frac{1}{\left[|z|+d-i\left(y+\frac{\lambda}{q}\right)\right]^{m+1}} \right\} d\lambda$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots),$$

e il modulo della funzione sotto il segno non supera mai

$$\frac{2}{(|z|+d)^{m+1}} e^{-\lambda} \lambda^m .$$

L'integrale è dunque una funzione di $1/q$, finita e continua per ogni valore reale di $1/q$ ($1/q = 0$, incluso).

Per $1/q = 0$, risulta in particolare

$$\frac{d^m q(U_2 - F_2)}{d\left(\frac{1}{q}\right)^m} = -\frac{i^{m+1}}{2} (m!)^2 \left\{ \frac{1}{(|z|+d+iy)^{m+1}} + \frac{1}{(|z|+d-iy)^{m+1}} \right\},$$

od anche, avendo riguardo alle identità

$$\frac{d \log \frac{1}{\nabla}}{d|z|} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{|z|+d+iy} + \frac{1}{|z|+d-iy} \right\}.$$

$$\frac{d^{m+1} \log \frac{1}{\nabla}}{d|z|^{m+1}} = \frac{(-1)^{m+1}}{2} m! \left\{ \frac{1}{(|z|+d+iy)^{m+1}} + \frac{1}{(|z|+d-iy)^{m+1}} \right\},$$

$$\frac{d^m q(U_2 - F_2)}{d\left(\frac{1}{q}\right)^m} = -(-i)^{m+1} m! \frac{d^{m+1} \log \frac{1}{\nabla}}{d|z|^{m+1}} .$$

In questa condizione di cose è chiaro che si può applicare alla funzione $q(U_2 - F_2)$ la formula di TAYLOR per l'intervallo 0, $1/q$, fino a un ordine qualunque m, e scrivere di conformità

$$U_2 - F_2 = -\sum_{1}^{m}{}_s \frac{(-i)^s}{q^s} \frac{d^s \log \frac{1}{\nabla}}{d|z|^s} + R_m \,, \tag{20}$$

dove, usando pel resto la forma di LAGRANGE, si può ritenere per la (19),

$$R_m =$$

$$= -\frac{i^{m+1}}{2q^{m+1}} \int_0^\infty e^{-\lambda} \lambda^m \left\{ \frac{1}{\left[|z| + d + i\left(y - \frac{\lambda}{q_1}\right)\right]^{m+1}} + \frac{1}{\left[|z| + d - i\left(y + \frac{\lambda}{q_1}\right)\right]^{m+1}} \right\} d\lambda$$

con $1/q_1 > 0$.

La (20) e questa espressione di R_m valgono anche per $m = 0$, dovendosi soltanto nella (20) porre zero al posto della sommatoria.

Per qualsiasi valore di y (reale, si intende) il modulo della quantità in parentesi nell'espressione di R_m è sempre inferiore a $2/(|z| + d)^{m+1}$, talchè

$$R_m < \frac{m!}{q^{m+1}(|z| + d)^{m+1}} \quad (^2) \,. \tag{21}$$

In modo perfettamente analogo, considerando le derivate di $q(U_1 - F_2)$ rapporto a y e rapporto a $|z|$, si ha

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d(U_2 - F_2)}{dy} &= -\sum_{1}^{m}{}_s \frac{(-i)^s}{q^s} \frac{d^{s+1} \log \frac{1}{\nabla}}{d|z|^s dy} + R'_m \,, \\ \frac{d(U_2 - F_2)}{d|z|} &= -\sum_{1}^{m}{}_s \frac{(-i)^s}{q^s} \frac{d^{s+1} \log \frac{1}{\nabla}}{d|z|^{s+1}} + R''_m \end{aligned} \right. \tag{22}$$

con

$$R'_m \,, \quad R''_m < \frac{(m+1)!}{q^{m+1}(|z| + d)^{m+2}} \,. \tag{23}$$

---

(2) Si può osservare che, ammettendo a priori la possibilità di uno sviluppo di $U_2 - F_2$ per potenze di $1/q$, la forma dello sviluppo risulta subito dalla prima equazione (7') (nel secondo membro della quale si intende posto $-(d \log 1/\Delta)/d|z|$ in luogo di $dF_2/d|z|$). Però questo modo di procedere, oltre a non essere rigoroso, non permette di apprezzare l'entità del resto.

L'equazione differenziale (5′):

$$\frac{dV_2}{dy} = pi(U_2 - F_2),$$

notando che $|U_2 - F_2|$ è in ogni caso $< 1/qd$ e ricordando dalle (8) che $p^2/q = B$, ci dà

$$\left|\frac{dV_2}{dy}\right| < \frac{B}{pd}.$$

Immaginiamo di sviluppare colla formula di Taylor, arrestata dopo il primo termine, le funzioni qV_2 e $q(dV_2/d|z|)$, definite dalla (13) e sua derivata rapporto a $|z|$.

Troveremo dopo ovvie riduzioni

$$V_2 = \frac{B}{p}\left\{\operatorname{arctg}\frac{y}{|z|+d} - \frac{\pi}{2} + R'''\right\},$$

$$\frac{dV_2}{d|z|} = \frac{B}{p}\left\{\frac{d\log\frac{1}{\nabla}}{dy} + R^{\text{IV}}\right\}$$

con

$$R''' > \frac{1}{qd}, \qquad R^{\text{IV}} < \frac{1}{qd^2}.$$

Osservando che, per nessun valore reale di y, z, $|(d\log 1/\Delta)/dy|$ può superare $d/2$ risulta ancora

$$|V_2| < \frac{B}{p}\left(\pi + \frac{1}{qd}\right),$$

$$\left|\frac{dV_2}{d|z|}\right| < \frac{B}{p}\left(\frac{1}{2d} + \frac{1}{qd^2}\right).$$

Noi dobbiamo naturalmente risguardare $1/d$, $1/qd$ come quantità finite (nei casi pratici anzi molto minori dell'unità; cfr. il § seguente).

Per quanto s'è detto al principio del § 9, siamo ormai autorizzati a porre

$$V_2 = 0. \tag{24}$$

11. - Limite superiori degli errori, da cui possono essere affette le forze elettromagnetiche del campo, quando si usano gli sviluppi asintotici.

A meno di termini contenenti B a fattore e senza riserve trascurabili si ha, come abbiam visto,

$$F_2 + \log\frac{1}{\nabla} = 0, \tag{14}$$

$$V_2 = 0. \tag{24}$$

Quale errore può insinuarsi nelle componenti delle forze elettromagnetiche, se, per $U_2 - F_2$ e sue derivate, si introducono gli sviluppi asintotici fino a un ordine determinato, omettendo i resti?

Per riconoscerlo, osserviamo in primo luogo che, essendo, per le (3), $U_1 - F_1$ eguale alla parte reale di

$$2I_0 e^{i\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)}(U_2 - F_2),$$

si ha

$$A\left|\frac{d(U_1 - F_1)}{dt}\right| \leqslant 2I_0 \cdot 2\pi n A \cdot |U_2 - F_2|,$$

$$\left|\frac{d(U_2 - F_1)}{dy}\right| \leqslant 2I_0\left|\frac{d(U_2 - F_2)}{dy}\right|,$$

$$\left|\frac{d(U_1 - F_1)}{dz}\right| \leqslant 2I_0\left|\frac{d(U_2 - F_2)}{d|z|}\right|.$$

Ora, a tenore delle (I), (II) e

$$F = 2I_0 \operatorname{sen}\omega\left(\log\frac{1}{\Delta} - \log\frac{1}{\nabla}\right);\quad U = F + (U_1 - F_1),\ V = 0,\ W = 0 \tag{18'}$$

(sono le (18), in cui s'è tenuto conto che $V_1 = 0$), le componenti della forza elettrica dipendono da $U_1 - F_1$ solo per la presenza del termine $A \cdot d(U_1 - F_1)/dt$; le componenti della forza magnetica solo pei termini $d(U_1 - F_1)/dt$, $d(U_1 - F_1)/dz$.

Dopo ciò, le (21) e (23) mostrano che, quando si introducono, per $U_2 - F_2$ e sue derivate, gli sviluppi (20) e (22), fino al termine m^{esimo}, il resto non può superare

$$2I_0 \cdot 2\pi n A \cdot \frac{m!}{q^{m+1}(|z|+d)^{m+1}}$$

nella componente X (l'unica delle componenti della forza elettrica, che dipende da $U_1 - F_1$), nè

$$2I_0 \frac{(m+1)!}{q^{m+1}(|z|+d)^{m+2}}$$

in una componente magnetica.

Per avere un'idea dell'errore relativo, in una componente e in un punto generico, conviene considerare il rapporto fra l'errore assoluto e l'intensità (massima), che compete nello stesso punto alla corrispondente forza, quando manca lo schermo conduttore.

Le (2), in cui dobbiamo intendere, per I, $I_0 \operatorname{sen} \omega$, ci dicono subito che, tanto per la forza magnetica, quanto per la elettrica, tale massima intensità vale

$$\frac{2I_0}{\Delta}.$$

L'errore relativo non supera dunque

$$2\pi n A \frac{m!\Delta}{q^{m+1}(|z|+d)^{m+1}}$$

per la forza elettrica, nè

$$\frac{(m+1)!\Delta}{q^{m+1}(|z|+d)^{m+2}}$$

per la magnetica.

Limitandosi, come è per noi sufficiente, a considerare punti in prossimità del piano mediano (piano normale allo schermo passante per la corrente), possiamo per es. supporre

$$y^2 < 3(|z|+d)^2.$$

Si ha allora a fortiori:

Arrestando lo sviluppo asintotico al termine m^{esimo}, *la frazione trascurata di forza elettrica non può superare*

$$2\pi n A \frac{2 \cdot m!}{q^{m+1} d^m}; \tag{25}$$

e la frazione trascurata di forza magnetica

$$2\frac{(m+1)!}{q^{m+1}\,d^{m+1}} . \tag{26}$$

Facendo nella (25) $m = 0$ e ricordando dalla (8) che $q = 4\pi^2 n/R$, risulta come errore relativo

$$\frac{AR}{\pi},$$

frazione insignificante anche nel caso di resistenze considerevoli. (Prendendo, come a § 9, una lastra di argentana di un decimillimetro, si ha all'incirca $AR/\pi = 0{,}00002$).

Concludiamo dunque, che, *per quanto concerne la forza elettrica, è lecito ritenere senza errore sensibile*

$$U_2 - F_2 = 0 .$$

Affinchè l'uso degli sviluppi asintotici di $d(U_2 - F_2)/dy$, $d(U_2 - F_2)/d|z|$ nelle componenti della forza magnetica risponda allo scopo, è necessario che, per qualche valore di m, la (26) sia una piccola frazione dell'unità; per es. dell'ordine di 1/10, se si tratta di ricerche puramente qualitative; più piccola (a norma dell'esattezza richiesta), se si tratta di ricerche quantitative.

Se esiste un valore di m che conviene, ad esso — e non oltre — vanno arrestati gli sviluppi.

Affinchè in particolare si possa prendere $m = 1$ con errore non superiore all'un per cento, basterà, per la (26), che sia

$$\frac{4}{q^2 d^2} \leqslant \frac{1}{100},$$

cioè

$$\frac{2}{qd} \leqslant \frac{1}{10}, \tag{27}$$

o finalmente, in via approssimativa,

$$\frac{R}{nd} \leqslant 2 . \tag{27'}$$

Questa condizione è soddisfatta da lastre di rame dello spessore di un millimetro ($R = 16\,000$), distanti un metro dalla corrente ($d = 100$), purchè la frequenza sia almeno 80.

Fissati R e d, l'errore possibile $4/q^2d^2$ varia con n in ragione inversa dei quadrati. Così ad es., per $n = 200$, esso è inferiore a $(80/200)^2/100$, cioè al 0,16 per cento; mentre, per $n = 60$, si può contare soltanto sopra una esattezza del $(80/60)^2/100$, cioè all'incirca del 2 per cento.

12. - Espressioni approssimate. Interpretazione fisica.

Bene intesi sui limiti dell'approssimazione corrispondente ad $m = 1$, adottiamo come valore di $U_2 - F_2$, da introdursi nelle componenti della forza magnetica, il primo termine $(i/q)(d \log 1/\Delta)/d|z|$ dello sviluppo asintotico (20) ([3]).

Per essere $U_1 - F_1$ la parte reale di

$$2\,I_0\, e^{i\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)}(U_2 - F_2)\,,$$

avremo

$$U_1 - F_1 = \frac{2I_0}{q} \cos\omega \,\frac{d \log \frac{1}{\nabla}}{d|z|}\,.$$

mentre, come s'è visto, è lecito ritenere $U_2 - F_2$, e di conseguenza, $U_1 - F_1 = 0$, nel valutare le componenti della forza elettrica.

Ciò posto, le (18′), introdotte nelle (I), (II), danno, per le componenti delle forze magnetica ed elettrica,

$$(28)\qquad \begin{cases} L = 0\,, \\[2ex] M = -\,2I_0 \dfrac{d}{dz}\left\{\operatorname{sen}\omega\left(\log\dfrac{1}{\Delta} - \log\dfrac{1}{\nabla}\right) + \dfrac{\cos\omega}{q}\,\dfrac{d\log\frac{1}{\nabla}}{d|z|}\right\}, \\[2ex] N = \;\;2\,I_0 \dfrac{d}{dy}\left\{\operatorname{sen}\omega\left(\log\dfrac{1}{\Delta} - \log\dfrac{1}{\nabla}\right) + \dfrac{\cos\omega}{q}\,\dfrac{d\log\frac{1}{\nabla}}{d|z|}\right\}; \end{cases}$$

([3]) Che è derivabile termine a termine, come mostrano direttamente le (22).

$$
(29)\qquad \begin{cases} X = 0\,, \\[2mm] Y = -\,2I_0 \operatorname{sen}\omega \dfrac{d}{dy}\left\{\log\dfrac{1}{\Delta} - \log\dfrac{1}{\nabla}\right\}, \\[2mm] Z = -\,2I_0 \operatorname{sen}\omega \dfrac{d}{dz}\left\{\log\dfrac{1}{\Delta} - \log\dfrac{1}{\nabla}\right\}, \end{cases}
$$

$$
(\omega = 2\pi n(t - Ax) + \alpha)\,.
$$

Considerando in particolare i punti al di là dello schermo rispetto alla corrente ($z < 0$), si ha

$$
\nabla = \Delta\,,
$$

e

$$
-\frac{d}{dz} = \frac{d}{d|z|}\,.
$$

Le (28), (29), eseguendo le derivazioni, divengono

$$
(28')\qquad \begin{cases} L = 0\,, \\[2mm] M = \dfrac{2I_0}{q}\cos\omega\,\dfrac{(|z| + d)^2 - y^2}{\Delta^4}\,, \\[2mm] N = \dfrac{2I_0}{q}\cos\omega\,\dfrac{2(|z| + d)y}{\Delta^4}\,; \end{cases}
$$

$$
(29')\qquad X = Y = Z = 0\,.
$$

La forza elettrica è dunque sensibilmente intercettata dallo schermo, come (rigorosamente) ha luogo in elettrostatica.

Quanto alla forza magnetica, per acquistare un'idea adeguata della modificazione prodotta dal conduttore, giova confrontarla colla

$$
(30)\qquad \begin{cases} L' = 0\,, \\[2mm] M' = -\,2I_0 \operatorname{sen}\omega\,\dfrac{|z| + d}{\Delta}\,, \\[2mm] N' = -\,2I_0 \operatorname{sen}\omega\,\dfrac{y}{\Delta}\,, \end{cases}
$$

che, a norma delle (2), agisce negli stessi punti ($z < 0$), quando manca lo schermo.

Sieno

$$H_0 = \frac{2I_0}{q}\frac{1}{\Delta^4}\sqrt{\{(|z|+d)^2 - y^2\}^2 + 4(|z|+d)^2 y^2} = \frac{2I_0}{q}\frac{1}{\Delta^2},$$

$$H'_0 = 2I_0\frac{1}{\Delta},$$

le rispettive intensità massime.

Si ha

$$\frac{H_0}{H'_0} = \frac{1}{q\Delta}. \tag{31}$$

Lo schermo riduce dunque la intensità massima della forza magnetica (nei punti al di là) alla frazione $1/q\Delta$ *di quella che si avrebbe in sua assenza.*

Dacchè Δ non può discendere in questi punti al di sotto di d, siamo dalle osservazioni numeriche del precedente § autorizzati a concludere che, nel caso di correnti alternative industriali (entro i limiti di validità dell'approssimazione qui adottata), la presenza dello schermo riduce la forza magnetica a pochi centesimi del suo valore, per dir così, naturale; la intercetta sensibilmente per più alte frequenze ([4]).

Indichiamo con ϑ l'angolo che la linea d'azione della forza magnetica naturale fa coll'asse y. Le (30) e (28') mostrano subito che, nel campo magnetico modificato dalla presenza del conduttore, l'analogo angolo (contato, a partire dall'asse y, nello stesso senso) vale 2ϑ.

Nei punti del piano mediano ($y = 0$, $\vartheta = 0$) N, e così N', si annullano. La forza è dunque in questi punti (esista o no lo schermo) normale al piano mediano stesso.

La forza magnetica naturale (30) ha in un generico istante t, l'intensità $|\operatorname{sen}\omega|H'_0$; quella modificata dal piano conduttore $|\cos\omega|H_0$. Ai massimi dell'una corrispondono dunque i minimi dell'altra, e reciprocamente; ossia *le due fasi sono a una distanza di un quarto di periodo.*

Si osservi da ultimo che, finchè si tratta di correnti alternative industriali, si può identificare la fase ω con $2\pi nt + \alpha$, poichè allora $2\pi nAx$ non ha certo valore apprezzabile nel campo di osservazione (entro cui si suppongono naturalmente gli assi di riferimento).

([4]) Carattere questo ben noto. Cfr. POINCARÉ, *Les oscillations électriques*, pag. 58.