XV.

CONDITION DU CHOC
DANS LE PROBLÈME RESTREINT DES TROIS CORPS

« Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris », t. CXXXV (1903), pp. 221-223.

Soit, comme dans ma Communication précédente (12 janvier 1903),

$$\varrho = \left|\sqrt{\overline{SP}}\right|, \qquad \vartheta = J\widehat{S}P, \qquad \vartheta' = \frac{d\vartheta}{dt};$$

$$\begin{cases} \varDelta = \overline{JP} = \left|\sqrt{1+\varrho^4 - 2\varrho^2\cos\vartheta}\right|, \quad V = \dfrac{1}{\varDelta} - \varrho^2\cos\vartheta, \quad W = \sin\vartheta\left(1 - \dfrac{1}{\varDelta^3}\right), \\ H = \pm\sqrt{2\nu - \varrho^6\vartheta'^2 + \varrho^2(-2C + 2\mu V + \varrho^4)} \end{cases}$$

(μ masse de J, $\nu = 1 - \mu$ masse de S, C constante de Jacobi).

Les trajectoires, sur lesquelles P et S se choquent au bout d'un temps fini, correspondent aux ∞^1 intégrales du système

$$(\Sigma) \qquad \frac{d\vartheta}{d\varrho} = -2\varrho^2\frac{\vartheta'}{H}, \quad \varrho\frac{\partial\vartheta'}{d\varrho} = -4(\vartheta' + 1) - 2\mu\varrho\frac{W}{H},$$

holomorphes pour $\varrho = 0$ (et à ces intégrales seulement). En appelant ϑ_0 la valeur arbitraire $\vartheta(0)$ et en remarquant que $\vartheta'(0)$ doit nécessairement se réduire à -1, on aura, pour ces intégrales ,des expressions de la forme

$$(1) \qquad \vartheta = \vartheta_0 + \varrho\alpha(\varrho, \vartheta_0), \qquad \vartheta' + 1 = \varrho\beta(\varrho, \vartheta_0),$$

α et β étant des séries des puissances en ϱ.

Pour qu'un choc intervienne, il faut et il suffit — peut-on dire d'après ce qui précède — que le mouvement ait lieu sur une des trajectoires (1):

il faut donc et il suffit que ϱ, ϑ, ϑ' *vérifient à tout instant l'équation qu'on tire des* (1) *en y éliminant* ϑ_0. *Voilà la relation invariante caractéristique du choc.* C'est bien une relation unique, comme le présumait M. PAINLEVÉ (voir ses *Leçons de Stockholm*, p. 586). Étudions-la d'un peu plus près.

Tout d'abord, la première des (1) permet de tirer ϑ_0 en fonction holomorphe de ϱ et de ϑ. En introduisant cette valeur dans la seconde, il vient

$$\vartheta' + 1 = \varrho f(\varrho, \vartheta) , \tag{2}$$

où f est une fonction holomorphe de ϱ, dans le domaine $\varrho = 0$, pour toute valeur réelle de ϑ.

Dès que (2) est une relation invariante [par rapport au mouvement et *a fortiori* par rapport au système (Σ)], en la dérivant par rapport à ϱ et en tenant compte des (Σ) et d'elle-même, on doit aboutir à une identité. Nous en concluons que la fonction $f(\varrho, \vartheta)$ satisfait à l'équation

$$5f + \varrho \frac{\partial f}{\partial \varrho} = -2\mu \frac{W}{H} - \frac{2}{H} \varrho^3 (1 - \varrho f) \frac{\partial f}{\partial \vartheta} , \tag{3}$$

où il est sous-entendu que, dans l'expression de H, on a remplacé ϑ' par $\varrho f - 1$.

La méthode des limites montre aussitôt que l'équation (3) admet une intégrale et une seule développable en série de puissances de ϱ.

Si l'on pose $f = \sum_{0}^{\infty} {}_n f_n \varrho^n$, les f_n peuvent être calculés de proche en proche en identifiant, dans les deux membres de (3), les coefficients des mêmes puissances de ϱ.

Cette intégrale holomorphe de (3) est évidemment d'après l'origine de l'équation) la fonction f de la relation invariante (2). On a de la sorte un moyen commode pour la déterminer. On en fait, en outre, ressortir une importante propriété, qui ne résultait pas encore de (2).

C'est que *f est une fonction périodique de ϑ. La condition du choc est donc uniforme, au sens de M. Poincaré*; elle est même algébrique par rapport aux vitesses [1].

Pour $\mu = 0$, on tire immédiatement, de (3), $f = 0$, et la condition du choc $(\vartheta' + 1 = 0)$ exprime que la vitesse angulaire (absolue) de P

[1] On sait que M. PAINLEVÉ a démontré (« Comptes rendus », 20 décembre 1897) qu'il ne peut pas en être ainsi dès que *trois masses* au moins ne sont pas nulles. Le problème restreint échappe donc à la démonstration de M. PAINLEVÉ et, en effet, il se comporte d'une façon exceptionnelle à ce point de vue.

par rapport à S est nulle ou, si l'on veut, que la vitesse de P est dirigée suivant la droite PS. On pouvait le prévoir, puisque, pour $\mu = 0$, on retombe sur le problème (plan) des deux corps.

Pour μ quelconque, le calcul des premiers termes donne

$$(4) \quad \begin{cases} f = \mu\varrho^2\left[\dfrac{6}{7}\dfrac{1}{\sqrt{2\nu}}\sin 2\vartheta + \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{\sqrt{2\nu}}\sin\vartheta\left(5\cos^2\vartheta - \dfrac{C-\mu}{\nu}\cos\vartheta - 1\right)\varrho^2 \right. \\ \qquad\qquad \left. - \dfrac{3}{35}\dfrac{\mu}{\nu}\cos 2\vartheta\varrho^3 + \dots\right], \end{cases}$$

le radical $\sqrt{2\nu}$ devant être pris avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, selon qu'il s'agit de chocs futurs ou passés.

On a de la sorte une expression approchés de f, valable, pour ϱ assez petit, quel que soit ϑ. (Il fallait arriver jusqu'au troisième terme non nul, puisque les coefficients des deux premiers s'annulent à la fois sur la droite SJ).

Au point de vue théorique, la détermination de f est achevée. D'après (3), on sait construire la série qui la représente au voisinage de S; dès lors, le prolongement analytique de la série définit f dans tout le plan des trois corps. Mais il serait intéressant de préciser le champ de validité du développement (4), et plus généralement d'établir comment se comporte la fonction f et comment on peut la calculer pour des valeurs quelconques de ϱ.

Il est à peine nécessaire d'ajouter que (d'après le rôle symétrique de S, J), il suffit de changer dans (2) la signification des lettres pour en tirer la condition d'un choc P, J.

Une question extrêmement importante se pose maintenant.

Nous pouvons affirmer, d'après ce qui précède, que, si à l'instant initial la condition (2) et l'autre analogue, relative à un choc P, J, ne sont pas satisfaites, elles ne le seront jamais, et il n'y aura pas de choc. Par d'autres mots, deux inégalités, telles que $\vartheta' + 1 - \varrho f \gtrless 0$, assurent la continuation indéfinie du mouvement. Toutefois les corps célestes ne sont pas des points matériels et il est loisible de les traiter ainsi, pourvu seulement que leurs distances ne descendent pas au-dessous d'une certaine limite. Il faut donc (pour pouvoir appliquer à un exemple naturel la conclusion que le mouvement se poursuivra régulièrement en tout temps) savoir d'avance (pour la solution théorique correspondante) non seulement qu'il n'y aura pas de choc, mais bien encore que les distances PS, PJ ne descendront jamais au-dessous d'un ε donné. Quelles en sont les conditions? Deux inégalités de la forme $|\vartheta' + 1 - \varrho f| > \eta$, où η dépend de ε, seraient-elles suffisantes? Je n'en puis encore rien dire.

26 janvier 1903.