46.

SUR LES ÉQUATIONS À 3 ET À 4 PÉRIODES DES RACINES DE L'UNITÉ.

[*Compte Rendu de la Association Française* (1880), *Reims*, pp. 96—98.]

DÉSIGNONS par p l'ordre des racines de l'unité,

„ „ e le nombre des périodes,

„ „ $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{e-1}$, les périodes elles-mêmes;

„ „ $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{e-1}$ les périodes que j'appelle affectées et définies par l'équation $\omega = e\eta + 1$.

§ 1.

I. On prouve facilement que l'on a

$$\Sigma\eta^i \equiv \left(\frac{p-1}{e}\right)^{e-1} \text{ (mod. } p),$$

i étant un nombre entier quelconque.

II. On en conclut $$\Sigma\omega = 0,$$
et aussi $$\Sigma\omega^i \equiv 0 \text{ (mod. } p).$$

III. On démontre facilement que

$$\Sigma\omega_0\omega_1 = \tfrac{1}{2}\Sigma\omega^2 = -\frac{e}{2}p, \text{ lorsque } \frac{p-1}{2} \text{ est impair;}$$
$$= \frac{e^2-e}{2}p, \text{ lorsque } \frac{p-1}{2} \text{ est pair.}$$

IV. Enfin, on démontre encore les relations

$$3\Sigma\omega_0\omega_1\omega_2 = \Sigma\omega^3 \equiv 3 \text{ (mod. 9)}, \quad \text{pour } e = 3;$$
$$3\Sigma\omega_0\omega_1\omega_2 \equiv 8 \quad \text{(mod. 24)}, \text{ pour } e = 4.$$

§ 2.

Si une fonction rationnelle et entière des périodes ne change pas de valeur par une substitution circulaire, on sait que cette fonction est nécessairement un nombre réel. Il est également vrai et on démontre facilement que si une telle fonction change de signe, mais conserve sa valeur absolue par une substitution circulaire, elle est un multiple entier de $\sqrt{p}$ ou de $\sqrt{(-p)}$, selon que $\frac{p-1}{e}$ est pair ou impair.

Ainsi par exemple, le produit des différences des périodes est un nombre entier lorsque e est impair, et un multiple entier de $\sqrt{(\pm p)}$ lorsque e est pair. De même, dans le cas de 4 périodes, le produit $(\eta_0 - \eta_2)(\eta_1 - \eta_3)$ est un multiple de $\sqrt{p}$.

§ 3.

La forme de l'équation à 3 périodes affectées en vertu de (II) et de (III) sera

$$\omega^3 - 3p - Ap = 0$$

dont le discriminant est $4A^2p^2 - p^3$; donc, en vertu de § 2,

$$\frac{p^3 - 4A^2p^2}{27} = M^2 = B^2p^2;$$

donc $4p = A^2 + 27B^2$; ainsi A^2 est déterminé. De plus, $3Ap$ en vertu de (III) sera congru à 3 (mod. 9), c'est-à-dire Ap, et conséquemment A sera congru à $+1$ (mod. 3): donc A est parfaitement déterminé.

V. Pour $e = 4$ on voit facilement que les équations dont ω_0, ω_2, ω_1, ω_3 sont les racines seront de la forme

$$\omega^2 - 2\sqrt{(p)}\omega + Ap - B\sqrt{p} = 0,$$
$$\omega^2 + 2\sqrt{(p)}\omega + Ap + B\sqrt{p} = 0,$$

où A et B seront des nombres entiers, et en vertu du § 2 on aura

$$\{(A-1)p + B\sqrt{p}\}\{(A-1)p - B\sqrt{p}\},$$

c'est-à-dire

$$(A-1)^2p^2 - pB^2 = m^2p.$$

Selon que $\frac{p-1}{2}$ est pair ou impair

$$2A = -\frac{e}{2} = -2 \text{ ou } \frac{e^2 - e}{2} = 6;$$

ainsi dans l'un et l'autre cas $(A-1)^2 = 4$, c'est-à-dire $4p = B^2 + m^2$, de sorte que si $p = f^2 + g^2$, $B = 2f$ et $m = 2g$. Donc, pour les deux cas respectivement, l'équation aux périodes affectées sera

$$(\omega^2 - p)^2 - 4p(\omega + 2f)^2 = 0, \quad (\omega^2 + 3p)^2 - 4p(\omega + 2f)^2 = 0,$$

et avec l'aide de (IV) on trouve facilement que $f \equiv -1$ (mod. 4), de sorte qu'en mettant $p = f^2 + g^2$ on sait que f doit être impair et congru à 1 (mod. 4). Donc, les équations sont parfaitement déterminées.

Ces formules s'accordent, comme il est nécessaire, avec les résultats connus depuis longtemps, mais qu'on n'obtient par les méthodes de Gauss et de Jacobi qu'avec des calculs pénibles, pour ainsi dire fortuits, ou des raisonnements un peu détournés.