# XIX.

## SULLA INVERSIONE DEGLI INTEGRALI DEFINITI

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. V°, $1896_1$, pp. 177-185.

1. Sia $S_0(x, y)$ una funzione finita e continua qualunque definita per i valori di $x, y$ compresi fra $\alpha$ e $\beta$ $(\alpha < \beta)$. Partendo da essa costruiamo successivamente le espressioni

$$S_i(x, y) = \int_y^x S_{i-j}(x, \xi) S_{j-1}(\xi, y)\, d\xi$$

dando ad $i$ i valori $1, 2, 3 \cdots$ e scegliendo $j$ compreso fra 1 e $i$. Si dimostra facilmente che l'integrale precedente non dipende dalla scelta del numero $j$. Inoltre chiamando M il limite superiore dei valori assoluti di $S_0(x, y)$ si ha

$$|S_i(x, y)| \leq \frac{M^{i+1}(|y-x|)^i}{i!}.$$

Se ne può concludere che la serie

$$F_0(x, y) = \sum_0^\infty {}_i S_i(x, y)$$

è uniformemente convergente e per conseguenza rappresenta una funzione finita e continua di $x, y$.

Noi possiamo dare una forma notevole al resto di questa serie. Chiamandolo infatti $R_n(x, y)$ si otterrà

$$R_n(x,y) = F_0(x,y) - \sum_0^n {}_i S_i(x,y) = \int_y^x S_n(x, \xi) F_0(\xi, y)\, d\xi = \int_y^x S_n(\xi, y) F_0(x, \xi)\, d\xi.$$

Ponendo $n = 0$ questa formula diviene:

$$F_0(x, y) - S_0(x, y) = \int_y^x S_0(x, \xi) F_0(\xi, y)\, d\xi = \int_y^x S_0(\xi, y) F_0(x, \xi)\, d\xi. \tag{1}$$

2. Applichiamo ora alla funzione $F_0(x, y)$ delle operazioni analoghe a quelle che si sono eseguite sopra $S_0(x, y)$; calcoliamo cioè successivamente

$$F_i(x, y) = \int_x^y F_{i-j}(x, \xi) F_{j-1}(\xi, y)\, d\xi$$

e formiamo la serie, che risulterà convergente,

$$\mathrm{T}_0(x, y) = \sum_0^\infty {}_i \mathrm{F}_i(x, y).$$

Possiamo provare che *la somma di questa serie è la funzione* $\mathrm{S}_0(x, y)$ *da cui primitivamente siamo partiti*. Infatti per questa serie sussisterà una formula analoga alla (1), vale a dire

$$(2) \qquad \mathrm{T}_0(x, y) - \mathrm{F}_0(x, y) = \int_x^y \mathrm{F}_0(x, \xi)\, \mathrm{T}_0(\xi, y)\, d\xi = \int_x^y \mathrm{F}_0(\xi, y)\, \mathrm{T}_0(x, \xi)\, d\xi$$

onde sommando le (1) e (2) si otterrà

$$\mathrm{T}_0(x, y) - \mathrm{S}_0(x, y) = \int_x^y \mathrm{F}_0(\xi, y) \{\mathrm{T}_0(x, \xi) - \mathrm{S}_0(x, \xi)\}\, d\xi.$$

Poniamo

$$\sigma(x, y) = \mathrm{T}_0(x, y) - \mathrm{S}_0(x, y),$$

avremo che la equazione precedente si scriverà

$$(3) \qquad \sigma(x, y) = \int_x^y \mathrm{F}_0(\xi, y)\, \sigma(x, \xi)\, d\xi$$

da cui segue

$$\sigma(x, y) = \int_x^y \mathrm{F}_0(\xi, y)\, d\xi \int_x^\xi \mathrm{F}_0(\xi_1, \xi)\, \sigma(x, \xi_1)\, d\xi_1$$

$$= \int_x^y \mathrm{F}_0(\xi, y)\, d\xi \int_x^\xi \mathrm{F}_0(\xi_1, \xi)\, d\xi_1 \int_x^{\xi_1} \mathrm{F}_0(\xi_2, \xi_1)\, \sigma(x, \xi_2)\, d\xi_2 = \cdots$$

Si può in tal modo procedere indefinitamente sostituendo sempre a $\sigma(x, \xi_i)$ il valore che se ne ricava dalla formula (3). Chiamando dunque M′ il limite superiore dei valori assoluti di $\mathrm{F}_0(x, y)$ ed $m$ quello dei valori assoluti di $\sigma(x, y)$, si avrà

$$|\sigma(x, y)| \leq \mathrm{M}'^n m \int_\alpha^\beta d\xi \int_\alpha^\xi d\xi_1 \cdots \int_\sigma^{\xi_{n-2}} d\xi_{n-1} = \frac{\mathrm{M}'^n m (\beta - \alpha)^n}{n!}.$$

Siccome $n$ è un numero che può scegliersi tanto grande quanto si vuole, così $|\sigma(x, y)|$ dovrà essere inferiore ad ogni quantità assegnabile, e perciò sarà

$$\sigma(x, y) = \mathrm{T}_0(x, y) - \mathrm{S}_0(x, y) = 0$$

e in conseguenza

$$\mathrm{S}_0(x, y) = \mathrm{T}_0(x, y) = \sum_0^\infty {}_i \mathrm{F}_i(x, y).$$

Possiamo enunciare dunque il teorema:

*Si hanno le due formule reciproche*

$$(4)\qquad S_0(x,y)=\sum_0^\infty{}_i F_i(x,y)\,,\qquad (4')\qquad F_0(x,y)=\sum_0^\infty{}_i S_i(x,y)$$

*in cui*

$$F_i(x,y)=\int_x^y F_{i-j}(x,\xi)\,F_{j-1}(\xi,y)\,d\xi\,,\quad S_i(x,y)=\int_y^x S_{i-j}(x,\xi)\,S_{j-1}(\xi,y)\,d\xi.$$

*Prendendo arbitrariamente una delle due funzioni finite e continue* $S_0(x,y)$, $F_0(x,y)$ *si può calcolare l'altra mediante operazioni di quadratura. Inoltre si avrà*

$$F_0(x,y)-S_0(x,y)=\int_y^x F_0(x,\xi)\,S_0(\xi,y)\,d\xi=\int_y^x F_0(\xi,y)\,S_0(x,\xi)\,d\xi.$$

3. La risoluzione del problema della inversione degl'integrali definiti si può raggiungere in virtù del precedente teorema in maniera molto semplice.

Denotiamo infatti con $\varphi(x)$ una funzione finita e continua, e poniamo

$$\int_\alpha^y \varphi(x)\,F_0(x,y)\,dx=\varphi(y)-f(y).$$

Moltiplichiamo ambo i membri di questa equazione per $S_0(y,z)\,dy$ e integriamo fra $\alpha$ e $z$; si otterrà

$$\int_\alpha^z[\varphi(y)-f(y)]\,S_0(y,z)\,dy=\int_\alpha^z S_0(y,z)\,dy\int_\alpha^y\varphi(x)\,F_0(x,y)\,dx$$

e pel principio di DIRICHLET, ed il precedente teorema,

$$\int_\alpha^z[\varphi(y)-f(y)]\,S_0(y,z)\,dy=\int_\alpha^z\varphi(x)\,dx\int_x^z S_0(y,z)\,F_0(x,y)\,dy$$

$$=\int_\alpha^z\varphi(x)\,[S_0(x,z)-F_0(x,z)]\,dx$$

quindi

$$\int_\alpha^z f(y)\,S_0(y,z)\,dy=\int_\alpha^z\varphi(x)\,F_0(x,z)\,dx=\varphi(z)-f(z).$$

Dunque *la formula*

$$(5)\qquad \varphi(z)=f(z)+\int_\alpha^z f(y)\,S_0(y,z)\,dy$$

*si può invertire e si ha l'altra*

$$(5')\qquad f(z)=\varphi(z)-\int_\alpha^z\varphi(x)\,F_0(x,z)\,dx.$$

Prendendo arbitrariamente una delle due funzioni finite e continue $S_0(y, z)$ o $F_0(x, z)$ si può calcolare l'altra mediante le formule (4) e (4') date precedentemente. Quindi, scelta ad arbitrio una delle due funzioni finite e continue $\varphi(z)$ o $f(z)$, si ottiene l'altra funzione mediante una delle due formule (5) e (5'), e si vede che non vi è che la funzione $f(z)$ data dalla (5') che verifica la relazione funzionale (5) e reciprocamente non vi è che la $\varphi(z)$ data dalla (5) che soddisfa la (5').

Del resto è facile riconoscere che l'operazione di passaggio dalla prima alla seconda formula è la stessa che quella di inversione della seconda nella prima. Si denoti infatti la $-F_0(x, y)$ con $\Phi$, cioè scriviamo [1]

$$\Phi[S_0(x, y)] = -F_0(x, y);$$

allora tenendo conto delle operazioni di quadratura con cui partendo dalla $F_0$ si calcola la $S_0$, si avrà

$$\Phi[-F_0(x, y)] = S_0(x, y).$$

Possiamo dunque riassumere i risultati trovati nel seguente teorema: *Posto*

$$\Phi[S(x, y)] = -\sum_0^\infty {}_i S_i(x, y)$$

*in cui*

$$S_0(x, y) = S(x, y) \quad , \quad S_i(x, y) = \int_y^x S_{i-j}(x, \xi) S_{j-1}(\xi, y)\, d\xi$$

*si ha*:

1° *se* $S(x, y)$ *è una funzione finita e continua per i valori delle variabili compresi fra* $\alpha$ *e* $\beta$, *anche* $\Phi[S(x, y)]$ *è una funzione finita e continua entro gli stessi limiti;*

2° *la funzione* $\Phi$ *gode della proprietà*

$$\Phi[\Phi[S(x, y)]] = S(x, y);$$

3° *se* $\varphi(x)$ *è una funzione finita e continua e*

$$\text{(A)} \qquad \varphi(y) = f(y) + \int_\alpha^y f(x) S(x, y)\, dx \qquad (\beta > y > \alpha)$$

*risulta*

$$\text{(A')} \qquad f(y) = \varphi(y) + \int_\alpha^y \varphi(x) \Phi[S(x, y)]\, dx.$$

Nelle formule (A) e (A') si ha $x < y$, quindi sarà sufficiente determinare $\Phi[S(x, y)]$ per valori di $x < y$, e perciò conoscere la funzione $S(x, y)$ solo

(1) È superfluo l'osservare che non deve confondersi la $\Phi[S_0(x, y)]$ con una funzione di funzione. Vedi: *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni*, nel vol. III di questi « Rendiconti » [in queste « Opere »: vol. primo, XVII, pp. 294-314].

corrispondentemente ai valori di $x, y$ compresi fra $\alpha$ e $\beta$ tali che $x < y$, onde basterà assicurarsi che $S(x, y)$ sia continua ed i suoi valori assoluti abbiano un limite superiore finito, per tutti i valori di $x, y$ che soddisfano le condizioni

$$\beta > y > x > \alpha.$$

4. I varî problemi che si presentano di inversione di integrali definiti con limiti variabili, possono in generale risolversi facilmente ricorrendo alle formule ora stabilite. Esaminiamo infatti il problema di invertire l'integrale

$$\theta(y) - \theta(\alpha) = \int_\alpha^y \psi(x)\, H(x, y)\, dx, \tag{6}$$

cioè determinare $\psi(x)$ conoscendo $\theta(y)$ e $H(x, y)$. Derivando si avrà

$$\theta'(y) = \psi(y)\, H(y, y) + \int_\alpha^y \psi(x) \frac{\partial H(x, y)}{\partial y}\, dx$$

e dividendo per $H(y, y)$

$$\frac{\theta'(y)}{H(y, y)} = \psi(y) + \int_\alpha^y \psi(x) \left\{ \frac{1}{H(y, y)} \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \right\} dx.$$

Quindi se $\theta'(y)/H(y, y)$ è finita e continua e così pure

$$\frac{1}{H(y, y)} \frac{\partial H(x, y)}{\partial y},$$

la (A') ci fornirà subito la soluzione del problema mediante operazioni di quadratura.

La questione può risolversi in un altro modo, sempre impiegando le formule precedenti. Infatti, mediante una integrazione per parti, la (6) può scriversi

$$\theta(y) - \theta(\alpha) = H(y, y)\, \Psi(y) - \int_\alpha^y \Psi(x) \frac{\partial H(x, y)}{\partial x}\, dx$$

in cui

$$\Psi(y) = \int_\alpha^y \psi(x)\, dx$$

quindi

$$\frac{\theta(y) - \theta(\alpha)}{H(y, y)} = \Psi(y) - \int_\alpha^y \Psi(x) \left\{ \frac{1}{H(y, y)} \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} \right\} dx.$$

Il procedimento precedentemente indicato ci darà la $\Psi(y)$ e perciò con una derivazione otterremo la $\psi(y)$.

Il caso in cui $H(x, y)$ per $x = y$ diviene infinito, in modo che si possa porre $H(x, y) = G(x, y)/(x - y)^\lambda$ con $G(x, y)$ finita e $\lambda < 1$, sfugge alla analisi precedente, ma vi si riconduce facilmente moltiplicando ambo i membri per $dy/(z-y)^{1-\lambda}$ quindi integrando fra $\alpha$ a $z$.

Se H $(y, y)$ si annulla, il problema della inversione può in taluni casi risolversi univocamente, in altri risultare indeterminato.

Non mi dilungo nello svolgimento dei varî problemi di inversione, giacché le formule che risultano applicando il procedimento indicato furono direttamente discusse e verificate in alcune Note da me recentemente lette all'Accademia di Torino [2]; osserverò solo che il caso in cui si abbia

$$\theta(y) - \theta(\alpha) = \int_{\alpha}^{\chi(y)} \psi(x)\, \mathrm{H}(x, y)\, dx$$

può in generale ricondursi al precedente, quando si ponga $\chi(y) = z$; donde se si può ricavare inversamente $y = \rho(z)$, si otterrà

$$\theta(\rho(z)) - \theta(\alpha) = \int_{\alpha}^{z} \psi(x)\, \mathrm{H}(x, \rho(z))\, dx.$$

5. Mostriamo ora come la questione trattata sia suscettibile di una generalizzazione, la quale rende possibile di risolvere in maniera semplice una classe molto estesa di problemi funzionali, che, per quanto io so, non vennero fin qui considerati.

Supponiamo che gl'indici $r, s$ possano prendere i valori $1, 2, \cdots, n$ e consideriamo le $n^2$ funzioni finite e continue $\mathrm{S}_{r,s}^{(0)}(x, y)$ per i valori delle variabili compresi fra $\alpha$ e $\beta$.

Formiamo

$$\mathrm{S}_{r,s}^{(i)}(x, y) = \int_{y}^{x} \sum_{1}^{n}{}_{h}\, \mathrm{S}_{h,s}^{(i-j)}(x, \xi)\, \mathrm{S}_{r,h}^{(j-1)}(\xi, y)\, d\xi \tag{7}$$

dando ad $i$ successivamente i valori $1, 2, 3, \cdots$ e prendendo $i \geq j \geq 1$. Si ha che $\mathrm{S}_{r,s}^{(i)}$ non dipende da $j$ e

$$\mathrm{S}_{r,s}^{(i)}(x, y) \leq \frac{n^i \mathrm{M}^{i+1}}{i!} (|y - x|)^i$$

chiamando M il massimo dei limiti superiori dei valori assoluti delle $\mathrm{S}_{r,s}^{(0)}$; quindi le serie

$$\mathrm{F}_{r,s}^{(0)}(x, y) = \sum_{0}^{\infty}{}_{i}\, \mathrm{S}_{r,s}^{(i)}(x, y) \tag{8}$$

sono uniformemente convergenti e rappresentano funzioni finite e continue, e calcolando i resti di queste serie si giunge alle formule

(2) Sedute del 12 e del 26 gennaio 1896 [in questo vol.: pp. 216–232]. Una terza Nota sullo stesso soggetto sarà letta nella seduta dell'8 marzo [in questo vol.: pp. 233–241].

$$\mathrm{F}_{r,s}^{(0)}(x\,,y) - \mathrm{S}_{r,s}^{(0)}(x\,,y) = \int_y^x \sum_1^n {}_h \mathrm{S}_{h,s}^{0}(x\,,\xi)\,\mathrm{F}_{r,h}^{(0)}(\xi\,,y)\,d\xi$$

$$= \int_y^x \sum_1^n {}_h \mathrm{S}_{r,h}^{(0)}(\xi\,,y)\,\mathrm{F}_{h,s}^{(0)}(x\,,\xi)\,d\xi$$

dalle quali si deduce che, *prese*

$$\mathrm{F}_{r,s}^{(i)}(x\,,y) = \int_x^y \sum_1^n {}_h \mathrm{F}_{h,s}^{(i-j)}(x\,,\xi)\,\mathrm{F}_{r,h}^{(j-1)}(\xi\,,y)\,d\xi$$

*si ha*

$$\mathrm{S}_{r,s}^{(0)} = \sum_0^\infty {}_i \mathrm{F}_{r,s}^{(i)}(x\,,y)\,.$$

Ciò premesso, siano $\varphi_r(x)\,,(r = 1\,,2\,,\cdots,n)\;n$ funzioni finite e continue e poniamo

$$\int_\alpha^y \sum_1^n {}_r \varphi_r(x)\,\mathrm{F}_{s,r}^{(0)}(x\,,y)\,dx = \varphi_s(y) - f_s(y)\,,$$

si avrà con semplici calcoli

$$\int_\alpha^z \sum_1^n {}_s (\varphi_s(y) - f_s(y))\,\mathrm{S}_{h,s}^{(0)}(y\,,z)\,dy = \int_\alpha^z \sum_1^n {}_r \varphi_r(x)\left(\mathrm{S}_{h,r}^{(0)}(x\,,z) - \mathrm{F}_{h,r}^{(0)}(x\,,z)\right)dx$$

e quindi

$$\int_\alpha^z \sum_1^n {}_s f_s(y)\,\mathrm{S}_{h,s}^{(0)}(y\,,z)\,dy = \int_\alpha^z \sum_1^n {}_r \varphi_r(x)\,\mathrm{F}_{h,r}^{(0)}(x\,,z)\,dx = \varphi_h(z) - f_h(z)$$

il che prova che *le equazioni funzionali*

(9) $$\varphi_h(z) = f_h(z) + \int_\alpha^z \sum_1^n {}_s f_s(y)\,\mathrm{S}_{h,s}^{(0)}(y\,,z)\,dy \qquad (h = 1\,,2\,,\cdots,n)$$

*si invertono mediante le formule*

(9') $$f_h(z) = \varphi_h(z) - \int_\alpha^z \sum_1^n {}_r \varphi_r(x)\,\mathrm{F}_{h,r}^{(0)}(x\,,z)\,dx \qquad (h = 1\,,2\,,\cdots,n)$$

*in cui le* $\mathrm{F}_{h,s}^{(0)}$ *si calcolano dalle* $\mathrm{S}_{h,s}^{(0)}$ *per mezzo delle formule* (7) e (8).

Si supponga ora di dover risolvere il problema di determinare le funzioni finite e continue $f_1(x)\,,f_2(x)\,,\cdots,f_n(x)$ che soddisfano le equazioni funzionali

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} \theta_1(y)-\theta_1(\alpha)=\int_\alpha^y [f_1(x)\,H_{11}(x,y)+f_2(x)\,H_{12}(x,y)+\cdots+f_n(x)\,H_{1n}(x,y)]\,dx \\ \theta_2(y)-\theta_2(\alpha)=\int_\alpha^y [f_1(x)\,H_{21}(x,y)+f_2(x)\,H_{22}(x,y)+\cdots+f_n(x)\,H_{2n}(x,y)]\,dx \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \theta_n(y)-\theta_n(\alpha)=\int_\alpha^y [f_1(x)\,H_{n1}(x,y)+f_2(x)+H_{n2}(x,y)+\cdots+f_n(x)\,H_{nn}(x,y)]\,dx \end{array}\right.$$

quando si suppongano note le funzioni finite continue e derivabili $\theta_i(y)$ e $H_{r,s}(x,y)$. Derivando le equazioni precedenti rapporto ad $y$, abbiamo

$$(11)\qquad \theta'_i(y)=\sum_1^n{}_s f_s(y)\,H_{i,s}(y,y)+\int_\alpha^z \sum_1^n{}_s f_s(x)\,K_{i,s}(x,y)\,dx$$

supponendo

$$K_{i,s}(x,y)=\frac{\partial H_{i,s}(x,y)}{\partial y}.$$

Denotiamo con $D(x,y)$ il determinante

$$\begin{vmatrix} H_{11}, H_{12}, \cdots, H_{1n} \\ H_{21}, H_{22}, \cdots, H_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ H_{n1}, H_{n2}, \cdots, H_{nn} \end{vmatrix}$$

e si ammetta $D(y,y)$ diverso da zero, e chiamiamo $h_{i,s}\ (y,y)$ gli elementi reciproci delle $H_{i,s}\ (y,y)$ divisi per $D(y,y)$. Dalle (11) segue

$$\sum_1^n{}_i h_{i,r}(y,y)\,\theta'_i(y)=f_r(y)+\int_\alpha^y \sum_1^n{}_s f_s(x)\sum_1^n{}_i h_{i,r}(y,y)\,K_{i,s}(x,y)\,dx$$

onde, posto

$$\sum_1^n{}_i h_{i,r}(y,y)\,\theta'_i(y)=\varphi_r(y)$$

$$\sum_1^n{}_i h_{i,r}(y,y)\,K_{i,s}(x,y)=S^{(0)}_{r,s}(x,y)$$

le equazioni precedenti diverranno

$$\varphi_r(y)=f_r(y)+\int_\alpha^y \sum_1^n{}_s f_s(x)\,S^{(0)}_{r,s}(x,y)\,dx$$

e perciò si otterranno le $f_s(x)$ applicando le (9').