58.

SUR LES COVARIANTS IRRÉDUCTIBLES DU QUANTIC BINAIRE DU HUITIÈME ORDRE.

[*Comptes Rendus*, XCIII. (1881), pp. 192—196, 365—369.]

M. VON GALL a récemment calculé les dérivées invariantives irréductibles qui appartiennent à la forme binaire du huitième ordre (voir *Mathem. Annalen*, 1880, 1881), et s'est mis en parfait accord avec les résultats que j'avais déjà obtenus, sinon qu'il a trouvé un covariant du *degré-ordre* 10.4 qu'il affirme ne pas avoir réussi à décomposer. Je vais donc démontrer que nul covariant irréductible de ce degré-ordre ne peut exister.

Selon M. von Gall et moi-même, on a un seul invariant irréductible de chacun des degrés 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; il y a aussi un seul invariant des degrés 9, 10 respectivement, dont je n'aurai pas besoin de parler. On a aussi un seul covariant irréductible du degré-ordre 2.4 et du degré-ordre 3.4 et deux des degrés-ordres 4.4, 5.4, 6.4, 7.4, 8.4 respectivement. Il y a aussi un covariant du degré-ordre 5.2, mais nul covariant quadratique d'un degré inférieur à 5 et, comme on le sait bien *à priori*, nul covariant de l'ordre impair 1 ou 3.

En combinant ensemble ces covariants et invariants, on peut obtenir* trente-deux covariants composés, chacun du degré-ordre 10.4, car

2 peut être formé avec	......	2,
3 „	......	3,
4 „	......	4 et 2, 2,
5 „	......	5 et 3, 2,
6 „	......	6; 4, 2; 3, 3; 2, 2, 2,
7 „	......	7; 5, 2; 4, 3; 3, 2, 2,
8 „	......	8; 6, 2; 5, 3; 4, 4; 4, 2, 2; 3, 3, 2; 2, 2, 2, 2.

[* See p. 485, below. Also p. 509.]

Donc les covariants irréductibles des ordres 8, 7, 6, 5, 4 donnent naissance à $2(1+1+2+2+4)$, c'est-à-dire vingt covariants du degré-ordre 10.4, et les covariants irréductibles des ordres 2 et 3 à $4+7$, c'est-à-dire dix covariants de ce même degré-ordre, et il y en a aussi un de plus qui s'obtient en prenant le carré du covariant irréductible du degré-ordre 5.2. Le nombre total est donc $20+11+1=32$.

Je me propose d'établir catégoriquement que ces formes sont linéairement indépendantes entre elles. En suivant la notation de M. von Gall, on aura

	Degré-ordre
f	1.8
$i\ =(f,f)_4$	2.8
$k\ =(f,f)_6$	2.4
$\Delta\ =(k,k)_2$	4.4
$A\ =(f,f)_8$	2.0
$B\ =(f,i)_8$	3.0
$C\ =(k,k)_4$	4.0
$f_4\ =(f,k)_4$	3.4
$i_4\ =(i,k)_4$	4.4
$f_{k,2}=(f_4,k)_2$	5.4
$f_{k,3}=(f_4,k)_3$	5.2
$f_{k,k}=(f,k^2)_8$	5.0
$f_\Delta\ =(f,\Delta)_4$	5.4
$i_{k,2}=(i_4,k)_2$	6.4
$i_{k,k}=(i_4,k)_4$	6.0
$i_\Delta\ =(i,\Delta)_4$	6.4
$f_{k,\Delta}=(f_4,\Delta)_4$	7.0
$i_{k,\Delta}=(i_4,\Delta)_4$	8.0

Dans cette table, f représente la forme primitive $*(x,y)^8$ et, en général, $(\phi,\psi)_\mu$ signifie l'invariant linéo-linéaire par rapport à u, v des deux formes

$$\left(u\frac{d}{dx}+v\frac{d}{dy}\right)^\mu\phi,\quad \left(u\frac{d}{dx}+v\frac{d}{dy}\right)^\mu\psi.$$

Je ne donne pas la genèse du covariant du degré-ordre 7.4 ni de celui du degré-ordre 8.4, car, par la méthode dont je vais me servir, on n'aura pas occasion d'introduire explicitement ces deux formes dans le calcul.

Je commence en attribuant à f la forme spéciale

$$(0,\ r,\ s,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1\between x,\ y)^8,$$

c'est-à-dire

$$8rx^7y+28sx^6y^2+y^8.$$

Cette supposition réduira à zéro, comme on va le voir, les trois invariants des degrés 2, 3, 4 respectivement.

En suivant les indications de la table donnée et en négligeant des multiplicateurs numériques, on trouvera facilement

$$\begin{aligned}
A &= (f, f)_8 &&= 0,\\
i &= (f, f)_4 &&= 3r^2x^8 + 4qx^3y^5 + br^2x^2y^6,\\
B &= (i, f)_8 &&= 0,\\
k &= (f, f)_6 &&= 2qxy^3 + ry^4,\\
i_4 &= (i, k)_4 &&= 84r^3x^4 - q^2y^4,\\
C &= (k, k)_4 &&= 0,\\
\Delta &= (k, k)_2 &&= q^2y^4,\\
i_{k,k} &= (i_4, k)_4 &&= r^4,\\
f_{k,k} &= (f, k^2)_8 &&= q^2r,\\
i_{k,\Delta} &= (i_4, \Delta)_4 &&= q^2r^3,\\
f_4 &= (f, k)_4 &&= q^2x^4 - 4qrx^3y,\\
f_{k,2} &= (f_4, k)_2 &&= 2q^3x^3y - q^2rx^2y^2 - 4qr^2xy^3,\\
f_{k,\Delta} &= (f_4, \Delta)_4 &&= q^4,\\
f_\Delta &= (f, \Delta)_4 &&= 2q^3x^3y + 3q^2rx^2y^2,\\
f_{k,3} &= (f_4, k)_3 &&= q^4xy + q^3ry^2.
\end{aligned}$$

Or, soit Ω la fonction (si une telle existe) du degré-ordre $10 . 4$, composée avec les produits des invariants et covariants irréductibles de $*(x, y)^8$, qui est identiquement égale à zéro.

Les seuls termes dans Ω qui continueront à subsister pour la forme spéciale attribuée à f seront (en addition au carré du covariant du degré-ordre $5 . 2$) des multiples numériques des produits des invariants irréductibles des degrés 5, 6, 7, 8 multipliés respectivement par chacun des deux covariants du degré 5, par chacun des deux covariants du degré 4, par le covariant du degré 3 et par le covariant du degré 2.

On obtiendra ainsi les sept expressions suivantes:

$$q^8x^2y^2 + 2q^7rxy^3 + q^6r^2y^4, \tag{1}$$

$$2q^5rx^3y - q^4r^2x^2y^2 - 4q^3r^3xy^3, \tag{2}$$

$$2q^5rx^3y + 3q^4r^2x^2y^2, \tag{3}$$

$$84r^7x^4 - q^2r^4y^4, \tag{4}$$

$$q^2r^4y^4, \tag{5}$$

$$q^6x^4 - 4q^5rx^3y, \tag{6}$$

$$2q^3r^3xy^3 + q^2r^4y^4. \tag{7}$$

Supposons que les multiplicateurs numériques, dans Ω, de ces fonctions soient μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, μ_5, μ_6, μ_7 respectivement. Alors, en se souvenant que Ω est identiquement zéro, on voit immédiatement que $\mu_1 = 0$, et à cause du

31—2

terme seul r^7x^4 dans (4), que $\mu_4=0$, et, à cause du terme seul q^6x^4 dans (6), que $\mu_6=0$, et conséquemment, à cause des termes q^5rx^3y et $q^4r^2x^2y^2$ dans (2) et (3), que $\mu_2=0$, $\mu_3=0$. Il ne reste donc que μ_5 et μ_7 à considérer, lesquels évidemment, à cause du terme $q^3r^3xy^3$ dans (7), seront tous les deux zéro.

Ainsi on voit que l'expression Ω ne peut contenir que des multiples des invariants irréductibles A, B et C.

Pour démontrer que Ω ne contient pas de termes qui ne contiennent ni A ni B, considérons la forme spéciale nouvelle

$$f=x^8+8\lambda x^7y+8\mu xy^7+y^8,$$

où je suppose que $\lambda\mu$ est égal à $\frac{1}{8}$.

Alors

$$\begin{aligned}
A &=(f,f)_8=1-8\lambda\mu=0,\\
i &=(f,f)_4=4\mu x^5y^3+x^4y^4+4\lambda x^3y^5,\\
B &=(i,f)_8=0,\\
K &=(f,f)_6=16\mu x^3y+6x^2y^2+16\lambda xy^3,\\
C &=(k,k)_4=-64\mu\lambda+3=-5,\\
\Delta &=(k,k)_2=96\mu^2x^4+48\mu x^3y-6x^2y^2+48\lambda xy^3+96\lambda^2y^4,\\
i_4 &=(i,k)_4=20\mu^2x^4-4\mu x^3y+24x^2y^2-4\lambda xy^3+20\lambda^2y^4,\\
i_\Delta &=(i,\Delta)_4=(48\mu^2-30\mu)x^4+\ldots+(48\lambda^2-30\lambda)y^4,\\
i_{k,2} &=(i_4,k)^2=28\mu^2x^4+\ldots+28\lambda^2y^4,
\end{aligned}$$

et les seuls termes qui peuvent subsister dans Ω (vu qu'on a démontré que $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_7$ sont égaux chacun à zéro) seront des multiples numériques de C^2k, $Ci_{k,2}$, Ci_Δ.

Mais le terme μx^4 paraît seulement dans i_Δ, et μ^2x^4 ne paraît pas dans k; conséquemment les trois termes doivent disparaître spontanément.

Il s'ensuit que Ω peut être mis sous la forme $AV+BU$, où U et V sont des covariants du degré 7 et 8 respectivement, et, puisque $AV+BU$ est identiquement zéro, il faut que $\frac{V}{B}+\frac{U}{A}=0$, où $\frac{V}{B}$ et $\frac{U}{A}$ sont tous les deux covariants entiers, c'est-à-dire qu'on aura une équation de l'ordre 5 entre les covariants irréductibles, ce qui impliquerait un rapport numériquement linéaire entre les valeurs générales de Af_4 et Bk, ce qui est évidemment absurde. Donc l'expression supposée Ω ne peut pas exister, et les trente-deux covariants composés du degré-ordre 10.4, dont j'ai parlé, seront linéairement indépendants entre eux, pourvu, du moins, que nul rapport linéaire ne lie ensemble les invariants dont nul n'est d'un degré aussi élevé que 8; évidemment, le seul rapport possible de cette nature serait de la forme $C^2=$ une fonction de A et B, mais on a vu que A et B peuvent disparaître sans que C disparaisse. Donc un tel rapport ne peut pas avoir lieu, et les trente-deux covariants dont il est question sont linéairement indépendants.

Or, par le théorème célèbre de M. Cayley (dont l'exactitude a été établie catégoriquement* dans le *Journal de Borchardt* et dans le *Philosophical Magazine*), on sait que le nombre total des covariants du degré-ordre 10.4 linéairement indépendants les uns des autres, appartenant au quantic de l'ordre 8, est représenté par $\left(\frac{ij-\epsilon}{2}; i, j\right) - \left(\frac{ij-\epsilon}{2} - 1; i, j\right)$, où $i=8$, $j=10$, $\epsilon = 4$, et où, en général, $(w : i, j)$ signifie le nombre de représentation de w comme somme de j ou moins de j, chiffres dont nul n'excède 8 en grandeur, c'est-à-dire, selon un théorème bien connu d'Euler, sera le coefficient de $t^{\frac{8.10-4}{2}}$, c'est-à-dire de t^{38}, dans le développement en série de puissances ascendantes de t de la fraction

$$\frac{(1-t^{11})(1-t^{12})(1-t^{13})(1-t^{14})(1-t^{15})(1-t^{16})(1-t^{17})(1-t^{18})}{(1-t^2)(1-t^3)(1-t^4)(1-t^5)(1-t^6)(1-t^7)(1-t^8)},$$

ce qu'on trouvera égal à 32. Conséquemment, un covariant quelconque du degré-ordre 10.4 sera une fonction linéaire des trente-deux composés dont j'ai parlé, et ne peut pas être irréductible, ce qu'il fallait démontrer.

Il existe, dans la Note [p. 481, above] sur ce sujet insérée dans les *Comptes rendus* du 25 juillet dernier, des erreurs de calcul qui rendent la conclusion que je voulais établir tout à fait illusoire; cependant j'ai réussi, par le travail plus pénible qui suit, à parvenir au même résultat.

Je prends $(0, b, 2c, d, 0, 0, 0, 0, 1\between x, y)^8$ avec la condition $bd = 3c^2$ pour la forme spéciale de f. Alors les invariants du deuxième et du troisième degré, comme on va voir, deviendront nuls; les invariants des degrés 3, 4, 5, 6, 7, 8 ne seront pas nuls, et, en les combinant avec les deux covariants des *degrés-ordres* 7.4, 6.4, 5.4 et avec les seuls covariants des degrés-ordres 4.4, 3.4 dans toutes les manières possibles pour former 1 covariant du degré-ordre 10.4, on aura 9 covariants de ce type, de sorte que, en y ajoutant le carré du covariant du degré-ordre 5.2, il y aura en tout 10 covariants composés du degré-ordre 10.4, dans lesquels les invariants des degrés 2 et 3 ne figurent pas.

Je vais démontrer qu'aucun de ces 10 covariants ne peut paraître dans la fonction Ω (voir *Comptes rendus*, p. 194) [p. 483, above], et conséquemment cette fonction, si elle existe, contiendra dans chaque terme ou l'invariant du deuxième degré ou l'invariant du troisième, et conduira à une équation syzygétique du degré-ordre 5.4, comme je l'ai déjà remarqué, à moins qu'elle ne soit un multiple exact de l'un ou l'autre de ces 2 invariants, dans lequel cas il conduira à une telle équation du degré-ordre 8.4 ou 7.4.

[* pp. 232, 117 above.]

Mais, en tout cas, il y aura un rapport syzygétique d'un degré-ordre inférieur à 10 . 4 entre les covariants composés, ce qui, selon la loi de Cayley dont j'ai parlé, aurait pour effet d'augmenter le nombre de covariants irréductibles trouvés également par M. Von Gall et moi-même, et dont l'exactitude n'a pas été discutée. Donc tout se ramène à prouver que les 10 covariants composés du degré-ordre 10 . 4, qui correspondent à la forme spéciale que j'ai adoptée, sont linéairement indépendants l'un de l'autre, ce que je vais établir.

On trouvera facilement, pour la forme spéciale supposée,

$$I_2 = 0, \quad I_3 = bd - 3c^2 = 0, \quad I_4 = cd^2, \quad I_5 = d^4,$$
$$I_6 = c^4, \quad I_7 = b^4 + 200c^3d^2, \quad I_8 = b^2c^3,$$

où I_j signifie un invariant du degré j, et en suivant la notation et les procédés de M. Von Gall, négligeant, en outre, des multiplicateurs numériques,

$$\begin{aligned}
k \; &= (-20d^2,\ 0,\ 0,\ b,\ 4c \between x, y)^4, \\
\Delta \; &= (0,\ 90c^2d,\ 40cd^2,\ 0,\ 3b^2 \between x, y)^4, \\
f_4 \; &= (b^2,\ bc,\ c^2,\ -c\delta,\ 5\delta^2 \between x, y)^4, \\
f_{k,2} &= (-120c^2d^2,\ 3b^3 + 60cd^3,\ 6b^2c - 100d^4,\ 9bc^2,\ 60c^3 \between x, y)^4, \\
f_{k,3} &= (b^3 - 20cd^3,\ b^2c + 50d^4,\ bc^2 \between x, y)^2, \\
f_\Delta \; &= (40c^2d^2,\ b^3 + 80cd^3,\ 2b^2c,\ 3bc^2,\ 0 \between x, y)^4, \\
i_\Delta \; &= (240cd^4,\ 21bc^3,\ -6x^4,\ -120c^3d,\ -120c^2d^2 \between x, y)^4, \\
i_4 \; &= (33bc^3,\ 92c^2d,\ 72cd^2,\ 140d^3,\ 4b^2 \between x, y)^4, \\
i_{k,2} &= (-360cd^4,\ 42bc^3 - 350d^5,\ 49c^4,\ 19c^3d,\ -138c^2d^2 \between x, y)^4.
\end{aligned}$$

Désignons $b^6x^4 + 4b^5cx^3y + 6b^4c^2x^2y^2$, c^7x^4, c^2d^6, $4c^6dx^3y$, $4cd^7x^3y_1$, $6c^5d^2x^2y^2$; $6d^8x^2y^2$, $4d^8xy^3$, $4b^3c^3xy^3$; $b^2c^4y^4$, $c^3d^4y^4$ par les lettres α, β, γ, δ, ϵ, η, ζ, θ, κ, λ, μ et, au lieu des valeurs actuelles des covariants composés du degré-ordre 10 . 4, prenons leurs valeurs par rapport au module 11 ; alors on trouvera que les valeurs peuvent être représentées par le Tableau suivant :

α.	η.	θ.	β.	λ.	γ.	δ.	ϵ.	ζ.	κ.	μ.
3	6	3	5	3	1	1	3	2	10	.
1	.	8	7	1	.	6	.	2	9	10
.	10	.	.	.	1	4	5	10	5	5
.	.	1	7	4	.	.	.	.	.	.
.	.	.	6	4	.	4	.	6	8	.
.	.	.	.	3	.	2	.	7	.	.
.	.	.	.	.	2	.	.	.	3	4
.	.	.	.	.	7	5	3	7	9	.
.	.	.	.	.	9	8	.	8*	1	9
.	.	.	.	.	3	5	2	5	8	5

[* See below, p. 517.]

où la première ligne des chiffres représente la fonction

$$3\alpha + 6\eta + 3\theta + \ldots + 10\kappa,$$

la seconde,

$$\alpha + 8\theta + \ldots + 9\kappa + 10\mu,$$

et ainsi pour toutes les autres.

Il ne reste donc qu'à examiner si les déterminants mineurs du *matrix* écrit au-dessus de l'ordre 10 s'évanouissent tous par rapport au module 11; sinon les 10 fonctions seront nécessairement indépendantes par rapport au module 11 et à plus forte raison absolument aussi: or ce petit problème numérique se ramène facilement à la question de déterminer si les déterminants mineurs de l'ordre 5 du *matrix*

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & . & . & 5 & . \\ 2 & . & . & . & 3 & 4 \\ 7 & 5 & 3 & 7 & 9 & . \\ 9 & 8 & . & 8 & 1 & 9 \\ 3 & 5 & 2 & 5 & 8 & 5 \end{vmatrix}$$

s'évanouissent tous par rapport au module 4, ce qui ne peut avoir lieu si le déterminant

$$\begin{vmatrix} 2 & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 7 & 2 & . \\ 8 & . & 8 & 3 & 9 \\ 5 & 2 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix},$$

ou bien si le déterminant

$$\begin{vmatrix} . & . & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 2 & . \\ . & 8 & 3 & 9 \\ 2 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix},$$

ou finalement si le déterminant

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 8 \\ . & 8 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire si le nombre $51-86$ ou bien -35 ne contient pas 11. Donc les 10 fonctions dont je parle sont linéairement indépendantes entre elles. Mais il serait très périlleux d'admettre cette preuve sans confirmation de l'exactitude des chiffres qui résultent de l'immense calcul dont je n'ai qu'indiqué la marche. En effet, j'ai consacré de longues heures à la confirmation de chaque pas de ce calcul, et j'ai appelé à mon aide un calculateur habile; mais ce qui est le plus important, j'ai pu le vérifier de la manière suivante.

J'ai calculé pour ma forme spéciale la valeur du covariant i_4'', donné par M. Von Gall [p. 518, below] et jusqu'à présent trouvé par lui irréductible; cette valeur est

$$\begin{pmatrix} -128520c^7 - 25600c^2d^6, & 37590c^6d^2, & -10920c^5d^2, \\ 63b^3c^3 - 25000c^4d^3, & 1638b^2c^4 + 9600c^3d^4 & \end{pmatrix}(x, y)^4.$$

En combinant cette fonction avec les dix autres du même type, on obtiendra un déterminant de l'ordre 11 qui doit s'évanouir si mes chiffres sont exacts.

J'ai calculé très consciencieusement la valeur de ce déterminant par rapport aux modules 11, 13, 17, et comme, dans les trois cas, j'ai trouvé que la valeur de ce déterminant se divise par le module, je crois que l'exactitude de mes chiffres est parfaitement démontrée, et qu'on peut rester tout à fait convaincu que l'existence d'un covariant irréductible du degré-ordre 10.4 appartenant au quantic octavique est impossible. Les détails du calcul vont être fournis au prochain fascicule de l'*American Mathematical Journal* [p. 509, below].