66.

SUR LES RACINES DES MATRICES UNITAIRES.

[*Comptes Rendus*, XCIV. (1882), pp. 396—399.]

Une matrice dont les termes sont tous des zéros, sauf toutefois les termes de la diagonale principale, qui ont des unités, constitue ce que je nomme une *matrice unitaire*.

Je suppose une telle matrice (assujettie à la loi de multiplication donnée par la combinaison des substitutions linéaires) de l'ordre n. On peut demander quelle est la forme d'une autre matrice M du même ordre n, telle que la $i^{\text{ème}}$ puissance de M soit une matrice unitaire.

J'ai donnée une solution de cette question dans ma précédente Note*.

Cette solution n'exige que n conditions, qui doivent être remplies par n^2 éléments de M; mais, chose remarquable, ce n'est pas la solution la plus générale. Je vais à présent donner toutes les solutions dont la question est susceptible. Soient $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_k$ des nombres entiers et positifs quelconques dont la somme est n, et $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$, k quelconques des $i^{\text{èmes}}$ racines de l'unité. Soit M_λ la matrice M affectée de l'indice λ, c'est-à-dire modifiée par l'addition de $-\lambda$ à chacun des n termes de la diagonale.

Considérons les systèmes de matrices mineurs de M, de l'ordre

$$n-\nu_1+1,\ n-\nu_2+1, \ldots, \ n-\nu_k+1$$

respectivement; et prenons M tel que

$$\lambda-\rho_1,\ \lambda-\rho_2, \ldots, \ \lambda-\rho_k$$

soient facteurs de chaque mineur du premier, du second, ..., du $k^{\text{ième}}$ de ces systèmes respectivement; alors M sera une racine $i^{\text{ème}}$ de la matrice unitaire de l'ordre n.

Ainsi, pourvu que i soit égal ou supérieur à n, il y aura autant de *genres* de racines $i^{\text{èmes}}$ de cette matrice qu'il y a de partitions indéfinies de n.

[* p. 562, above.]

Le genre principal (*summum genus*) sera celui qui correspond à la partition de n en n unités, et le nombre de conditions exigées sera n.

Le genre le plus bas (*infimum genus*) sera celui où n est laissé sans décomposition, et le nombre de conditions pour ce cas sera n^2.

En général, à $n = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_k$ on aura une solution pour laquelle le nombre de conditions exigées sera $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \ldots + \nu_k^2$, de sorte qu'il restera $2\Sigma\nu_1\nu_2$ constantes arbitraires dans M.

Si i est moindre que n, quelques-uns des genres manqueront, mais il y en aura toujours quelques-uns qui resteront. Ainsi, par exemple, si $n = 3$ et $i = 2$, le *summum genus*, qui suppose l'existence de trois racines distinctes des racines quadratiques de l'unité, cesse nécessairement d'exister; mais on aura une valeur de M pour laquelle tous les mineurs premiers de M_λ contiendront le facteur $\lambda - 1$, et une autre valeur de M (du même genre) pour laquelle tous ces déterminants contiendront le facteur $\lambda + 1$.

En effet, la matrice trouvée par M. Cayley, dans son Mémoire sur les matrices (*Philosophical Transactions*, 1858),

$$\left|\begin{array}{ccc} \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}, & \dfrac{-(\beta+\gamma)}{\alpha+\beta+\gamma}\dfrac{\nu}{\mu}, & \dfrac{-(\beta+\gamma)}{\alpha+\beta+\gamma}\dfrac{\nu}{\mu}, \\ -\dfrac{(\gamma+\alpha)}{\alpha+\beta+\gamma}\dfrac{\mu}{\nu}, & \dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}, & \dfrac{-(\gamma+\alpha)}{\alpha+\beta+\gamma}\dfrac{\lambda}{\mu} \\ -\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\dfrac{\mu}{\nu}, & \dfrac{-(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta+\gamma}\dfrac{\nu}{\lambda}, & \dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} \end{array}\right|$$

sera la matrice M, telle que chaque mineur de M_ρ contiendra $(\rho - 1)$; de même chaque mineur de $(-M)_\rho$ contiendra $\rho + 1$; on remarquera que 1 et -1 sont les racines carrées de l'unité, et l'on vérifiera aisément que M^2 ou, ce qui revient au même, $\Phi(-M)^2$ ont tous les deux la forme

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right|.$$

Le genre *infime* de solution sera

$$M = \left|\begin{array}{ccc} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{array}\right|$$

où
$$p^2 = 1, \quad q^2 = 1, \quad r^2 = 1.$$

Il y a une théorie analogue pour l'extraction des racines de la matrice *zéroïdale*, c'est-à-dire où tous les termes de la matrice sont des zéros, ce qui constitue encore un nouveau cas de porisme dans la théorie de l'extraction des racines des matrices.

Je n'entrerai pas dans les détails de cette question: il suffit de l'indiquer par le cas le plus frappant; je dis que, si M est une matrice de l'ordre n telle que le déterminant de M_ρ soit de la forme ρ^n (ce qui n'exige que la satisfaction de n conditions entre les n^2 termes de M), M^n sera une matrice zéroïdale. Ainsi, par exemple,

$$\left| \begin{matrix} a & a\dfrac{\lambda}{\mu} \\ -a\dfrac{\mu}{\lambda} & -a \end{matrix} \right|^2 = \left| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right|.$$

De même, comme solution particulière du cas de $n=3$, on trouve que si 1, ρ, ρ^2 sont les trois racines de l'unité,

$$\left| \begin{matrix} (\rho-\rho^2)(c-b) & \dfrac{\mu}{\lambda}(a+\rho b+\rho^2 c) & -\dfrac{\nu}{\mu}(a+\rho^2 b+\rho c) \\ -\dfrac{\lambda}{\mu}(a+\rho^2 b+\rho c) & (\rho-\rho^2)(a-c) & \dfrac{\nu}{\mu}(a+\rho b+\rho^2 c) \\ \dfrac{\lambda}{\mu}(a+\rho b+\rho^2 c) & -\dfrac{\mu}{\lambda}(a+\rho^2 b+\rho c) & (\rho-\rho^2)(b-a) \end{matrix} \right|^3 = \left| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right|.$$

Je terminerai en ajoutant que j'ai déjà établi une théorie fonctionnelle générale des matrices, et que je ne regarde plus celles-ci comme des schemata d'éléments, mais comme des communautés, ou, si l'on veut, comme des quantités complexes.

Cette théorie n'est pas même bornée au cas de matrices simples. On peut faire subir à des lois générales d'Analyse les quantités complexes où chaque terme d'un complexe de l'ordre m est lui-même un complexe de l'ordre m', et chaque élément de ces nouveaux complexes encore un complexe de l'ordre m'', etc., de sorte qu'on a des complexes de rangs successifs qu'on peut prolonger indéfiniment.