SOPRA LE FIGURE POLARI DELLE CURVE PIANE DEL 3° ORDINE

Questa breve nota, suggeritami dalla lettura di una memoria del sig^r. LONDON (¹), consta di due parti: nella prima si dà veste geometrica ad una dimostrazione algebrica alquanto laboriosa del sig^r. LONDON di un notevole teorema da lui stesso enunciato: nella seconda si fa una semplice osservazione, che dà come caso particolare una nuova interpretazione della condizione espressa dall'annullarsi dell'invariante indicato con P nel § 2 della memoria suddetta.

I.

1. Consideriamo tre cubiche C_1^3, C_2^3, C_3^3 in posizione affatto generica fra di loro.

Preso un punto P qualunque e un raggio r per esso, r sarà la retta polare di una schiera di coniche-inviluppo rispetto a C_1^3 e C_2^3 contemporaneamente: le rette polari delle curve di questa schiera rispetto a C_3^3 costituiscono un fascio di cui solo un raggio r' passa per P, quindi ad ogni raggio r del fascio P viene per tal modo coordinato un raggio r'. Ora r' è la retta polare rispetto a C_3^3 di un sistema lineare ∞^3 di coniche-inviluppo di cui soltanto una schiera è coniugata alle coniche polari di P rispetto a C_1^3 e C_2^3, e le rette polari delle curve di questa schiera rispetto a C_1^3 e C_2^3 costituiscono due fasci proiettivi sovrapposti col centro in P, i cui raggi uniti sono rette r: dunque la corrispondenza fra r ed r' è una $(2, 1)$. Le sue tre coincidenze danno il teorema: (LONDON l. c.)

(¹) LONDON, *Ueber die Polarfiguren der ebenen Curven dritter Ordnung.* Math. Ann., Bd. 36.

« Le rette che sono polari di una stessa conica-inviluppo rispetto a tre cubiche C_1^3, C_2^3, C_3^3 inviluppano una curva della 3ª classe K^3 ».

2. Per trovare l'ordine della serie ∞^1 di coniche-inviluppo corrispondenti a queste ∞^1 rette, consideriamo le due cubiche C_1^3 e C_2^3 e un tessuto qualsivoglia di coniche-inviluppo. Se K_1^2 è una sua curva qualunque, questa ha per polare rispetto a C_1^3 una retta a_1, la quale può considerarsi come retta polare di tutte le coniche-inviluppo di un sistema lineare ∞^3 rispetto a C_2^3: di tale ∞^3 una sola curva K_2^2 appartiene al tessuto considerato, dunque fra le curve di quest'ultimo viene per tal modo stabilita una corrispondenza biunivoca. Essa è semplicemente una omografia: poichè se K_1^2 descrive una schiera del tessuto, la retta a_1 descrive un fascio ad essa proiettivo, e le coniche-inviluppo, che siano coniugate alla conica polare del centro di questo fascio rispetto a C_2^3, costituiscono un sistema lineare ∞^4 di cui appunto una schiera appartiene al tessuto: dunque si hanno tre coincidenze e si può enunciare il teorema:

« Date due cubiche C_1^3 e C_2^3 le coniche inviluppo che hanno rispetto ad esse la medesima retta polare costituiscono un sistema ∞^3 del 3⁰ ordine ».

Naturalmente, questo sistema ∞^3 del 3⁰ ordine, mentre contiene i due tessuti di coniche-inviluppo apolari a C_1^3 e C_2^3, del tessuto apolare a C_3^3 contiene soltanto tre curve, che in generale non appartengono a una medesima schiera, perchè tale tessuto, al pari degli altri due, si può prendere in modo affatto arbitrario. Onde alla serie ∞^1 in discorso appartengono tre coniche-inviluppo di ognuno dei tessuti apolari a C_1^3, C_2^3 e C_3^3, che in generale non appartengono a una medesima schiera.

Ma allora, considerate le tre coniche-inviluppo apolari a C_3^3 e che hanno rispetto a C_1^3 e C_2^3 la medesima retta polare, si prendano altre due curve generiche della detta serie ∞^1, K_1^2 e K_2^2, e si consideri il sistema lineare determinato da queste due e dalle precedenti tre curve: esso sarà certo un ∞^4, altrimenti la serie ∞^1 apparterrebbe a un ∞^3 lineare insieme ai due tessuti apolari a C_1^3 e C_2^3 per es. e questi avrebbero una schiera comune. Quindi, se P è il punto d'incontro delle rette polari di K_1^2 e K_2^2 rispetto a C_1^3, C_2^3, C_3^3, tale ∞^4 sarà costituita da tutte e sole le coniche-inviluppo che sono coniugate alla conica polare di P rispetto a C_3^3. Ma allora anche la terza conica-inviluppo che ha la stessa retta polare rispetto a C_1^3, C_2^3, C_3^3 passante per P (n. 1) deve appartenere a questo ∞^4, e quindi esso conterrà sei curve della serie ∞^1 in questione. Ne deduciamo: (LONDON, l. c.)

« *Le coniche-inviluppo che hanno una medesima retta polare rispetto alle tre cubiche* C_1^3, C_2^3 *e* C_3^3 *costituiscono una serie* ∞^1 *del* 6^0 *ordine che ha tre curve a comune con ognuno dei tessuti apolari a* C_1^3, C_2^3 *e* C_3^3 ».

3. Questo teorema e quello dimostrato al n. 1 servono poi al sig^r. LONDON per dedurne quello che abbiamo in vista, cioè:

« *tre curve piane del* 3^0 *ordine* (*e quindi tutte le curve della rete da esse determinata*) *hanno in generale due soli esalateri polari comuni* »

e noi riportiamo qui brevemente, per comodità del lettore, il suo ragionamento.

Riprendiamo la curva di 3ª classe K^3 (n. 1) e consideriamo la corrispondenza che vien fissata tra le sue tangenti facendo ad ogni tangente a corrispondere le sei altre tangenti, che la conica-inviluppo di cui a è polare rispetto a C_1^3, C_2^3 e C_3^3 ha comune con K^3: essa è evidentemente una (6, 6) e la sua valenza (*Werthigkeit*) è nulla, quindi vi sono 12 coincidenze. Ora condizione necessaria e sufficiente perchè un esalatero $a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6$ sia polare per una cubica è, che di due lati dell'esalatero ognuno sia la polare rispetto alla cubica della conica-inviluppo inscritta nel pentalatero formato dai lati rimanenti, dopo di che tale proprietà si verifica per tutti gli altri lati (LONDON); dunque è chiaro che i lati degli esalateri polari della rete determinata da C_1^3, C_2^3 e C_3^3 sono forniti dalle coppie involutorie della corrispondenza (6, 6) suddetta, ogni coppia dando origine a un esalatero polare della rete e ogni esalatero assorbendo poi alla sua volta 15 coppie. Ma queste coppie sono date dalle coincidenze della corrispondenza (36, 36), che si ottiene ripetendo due volte la precedente (6, 6), quando se ne tolgano le 12 che sono già coincidenze della (6, 6), dunque esse sono $\frac{72-12}{2} = 30$ e gli esalateri polari della rete sono effettivamente due e due soltanto [1].

Dalla dimostrazione data risulta poi che essi sono circoscritti a una medesima curva di 3ª classe: e poichè, inversamente, due

[1] Nella Memoria del sig^r. LONDON è affermato che una coincidenza della (36, 36), che non sia una coincidenza della (6, 6), è da considerarsi come quintupla, perchè coincide con cinque delle sue rette corrispondenti; ma una tal agione non pare del tutto rigorosa.

esalateri che siano circoscritti a una medesima curva di 3ª classe sono polari per una medesima rete di cubiche, risulta anche che essi non presentano, oltre quella notata, altra particolarità di posizione.

II.

« *Condizione necessaria e sufficiente perchè due curve d'ordine n, C^n e C_1^n, possano pensarsi come prime polari di due certi poli rispetto a una curva d'ordine $n+1$, è che esse abbiano una prima polare comune. Supposta la condizione soddisfatta, esse possono pensarsi come polari di due punti fissi rispetto a un fascio di curve d'ordine $n+1$ aventi $n+1$ contatti $(n+1)$-punti sulla congiungente i due punti fissi* ».

Che la condizione sia necessaria è evidente: che sia poi anche sufficiente risulta nel modo che segue. Siano A e B i poli della prima polare comune a C^n e C_1^n rispetto a C^n e C_1^n rispettivamente: rispetto ad ogni curva d'ordine $n+1$, C^{n+1}, che eventualmente soddisfi alla questione, A sarà il polo di C_1^n e B il polo di C^n, per modo che quella prima polare comune a C^n e C_1^n comparisca come la polare mista di A e B rispetto a C^{n+1}. Allora prendiamo in A e B i vertici $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ del triangolo fondamentale e indichiamo con

$$\varphi = 0\,, \quad \psi = 0\,, \quad f = 0$$

ordinatamente le equazioni di C^n, C_1^n e C^{n+1}; per ipotesi sarà:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}$$

avendo introdotta in ψ una opportuna costante: e per determinare f si avranno le equazioni

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = a\,\psi\,, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = a\,\varphi$$

a essendo una costante.

Ne segue che detta f' una forma particolare d'ordine $n+1$ che soddisfi a queste equazioni, tutte le altre sono date dalla formula:

$$f = f' + \lambda x_3^{n+1}$$

λ essendo un parametro. c. d. d.

Ora la condizione $P = 0$ esprime che due cubiche C^3 e C_1^3 hanno un inviluppo di 2ª classe apolare comune ossia che hanno una conica polare comune, dunque:

« *La condizicne espressa dall'annullarsi dell'invariante P è necessaria e sufficiente perchè due cubiche possano pensarsi come polari rispetto a una quartica. Supposta la condizione soddisfatta, esse possono pensarsi come polari di due punti fissi rispetto a un fascio di quartiche aventi quattro contatti quadripunti sulla congiungente i due punti* ».

Pisa, aprile 1898.