

## SUL REGIME VARIABILE DEL CALORE RAGGIANTE (1)

## NOTA I.

## PREMESSE E RISULTATI.

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5<sup>a</sup>, vol. XXIII<sub>2</sub> (1914<sub>2</sub>),

pp. 371-379.

Le ricerche sull'irraggiamento termico, coltivate con segnalato successo in questi ultimi tempi, contemplano, per quanto è a mia conoscenza, quasi esclusivamente i fenomeni stazionari; più precisamente, anzi, il caso tipico di campi a temperatura costante. Pressochè inesplorato è il periodo variabile, quale ad esempio si ha, a partire da arbitrarie condizioni iniziali, entro una cavità il cui contorno sia mantenuto a temperatura costante (prima che tale temperatura, e con essa l'equilibrio termodinamico, si stabilisca ovunque nell'interno della cavità). E nemmeno si trova discusso lo stato stazionario finale di una cavità, il cui contorno sia mantenuto ad una temperatura, invariabile col tempo, ma diversa da punto a punto. Specie di questioni ben note dalla teoria classica della conducibilità del calore.

Per ciò che attiene al calore raggianti, fuor dell'ambito stazionario, sono stati considerati soltanto gli scambi di energia e di entropia fra radiazioni e oscillatori ideali di una stessa frequenza (2). Qui si avrà invece di mira l'aspetto globale del fenomeno (prescindendo dalla ripartizione spettrale), e principalmente la legge secondo cui varia (nello spazio e nel tempo) la temperatura  $T$  (e, per essa, una sua funzione  $K = \text{costante} \times T^4$ ), quando si tratta di irraggiamento puro, non complicato da altre influenze.

---

(1) Pervenuta all'Accademia il 28 ottobre 1914.

(2) Cfr. PLANCK, *Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung* [(seconda edizione), Leipzig, Barth, 1914], pp. 180-204.

### I. - Generalità e definizioni.

Convieni rifarsi dalle nozioni fondamentali della teoria dell'irraggiamento, a fine di rendersi ben conto delle modificazioni atte a renderle applicabili anche al regime variabile.

Premesso che intendiamo prendere in considerazione un mezzo omogeneo e isotropo <sup>(3)</sup>, e rappresentarci, secondo il solito, l'energia raggiante come un'entità emanante da ogni particella materiale del mezzo e viaggiante su traiettorie rettilinee, in tutte le direzioni, con *velocità costante*  $c$ , si rende agevolmente manifesto che nulla è da modificare nell'ordinaria definizione di *coefficiente di emissione*  $\varepsilon$  in un generico punto  $M$  del mezzo. Si tratta infatti di una caratteristica sostanziale dell'elemento  $dS$  del mezzo circostante ad  $M$ , ed è ragionevole ammettere che, a parità di condizioni per  $dS$ , sia indifferente, nei riguardi dell'emissione, che regni o no equilibrio termodinamico; ossia che  $\varepsilon$  dipenda esclusivamente (oltre che dalla natura del mezzo) dalla temperatura  $T$  in  $M$ . In conformità, designando  $d\Omega$  l'apertura (misurata sulla sfera di raggio 1) di un cono elementare spiccato da  $M$ ,

$$\varepsilon dS d\Omega dt$$

misurerà la quantità di energia inviata da  $dS$ , durante il tempuscolo  $dt$ , entro il cono elementare  $d\Omega$ . La  $\varepsilon(T)$  risulterà, in generale, funzione del posto e del tempo pel tramite di  $T$ .

*Coefficiente d'assorbimento*  $\alpha$  (in  $M$ , per unità di lunghezza). Sussiste inalterata la definizione ordinaria, coll'avvertenza che  $\alpha$ , al pari di  $\varepsilon$ , dipenderà in generale da  $M$  e da  $t$  pel tramite della temperatura.

*Densità dell'energia*  $u(M, t)$ , in un dato posto  $M$  e ad un dato istante  $t$ .

Si fissa un generico campo  $S$  circostante ad  $M$ , e si prende in considerazione l'energia  $U$ , che, all'istante  $t$ , si trova entro  $S$  (viaggiante in tutte le possibili direzioni, con velocità  $c$ ). Si definisce  $u$  come il limite del rapporto

$$\frac{U}{S},$$

per  $S$  tendente comunque a zero, attorno al punto  $M$ .

(<sup>3</sup>) L'estensione a mezzi eterogenei (di risultati *locali* conseguiti nell'ipotesi dell'omogeneità) si fa comodamente col criterio indicato al § 8 della Nota *Deduzione rigorosa di una relazione fondamentale nella teoria del calore raggiante*, in questi Rendiconti, ser. 5<sup>a</sup>, vol. XXIII (1° sem. 1914), pp. 12-21 [in questo vol.: XXIX, pp. 403-413].

Applicando tale criterio alle relazioni che saranno qui stabilite per un mezzo omogeneo, si riconoscerebbe che rimangono valide anche se (ferma restando l'ipotesi dell'isotropia) le caratteristiche del mezzo variano (con continuità) da punto a punto, senza dipendere unicamente dalla temperatura.

Dalle varie premesse della teoria scenderà, come vedremo, non solo l'esistenza, ma anche l'espressione, notevolmente semplice, di un tale limite.

*Intensità specifica* dell'irraggiamento attraverso un generico elemento superficiale  $d\sigma$ .

Detta  $n$  la normale all'elemento (in un verso determinato), e  $d\Omega$  l'ampiezza di un cono elementare di direzioni circostanti ad  $n$ ,  $H$  rimane definito dall'assumere il prodotto

$$H d\sigma d\Omega dt$$

come misura della quantità di energia che, durante il tempuscolo  $dt$ , passa attraverso  $d\sigma$  in direzione sensibilmente normale, cioè contenuta entro il pennello  $d\Omega$ . L'analogia quantità di energia secondo un pennello obliquo, pur di ampiezza  $d\Omega$ , si porrà sotto la forma

$$G d\sigma d\Omega dt.$$

Se  $g$  designa la direzione del pennello, sarà, per la *legge di LAMBERT*,

$$(1) \quad G = H \cos \widehat{ng},$$

l' $H$  riferendosi alla direzione  $g$ .

## 2. - Ipotesi fondamentale circa l'intensità specifica $H$ .

In regime stazionario a temperatura costante, tutte le direzioni si equivalgono, e si è naturalmente tratti ad ammettere che l'intensità specifica sia la stessa per ognuno degli  $\infty^2$  elementi superficiali spiccati da un medesimo punto  $M$ : si ha allora, colla notazione di PLANCK,  $H = K$ ,  $K$  essendo funzione soltanto di  $T$  e della natura del mezzo; anzi (per le leggi di STEFAN e di KIRCHHOFF),

$$(2) \quad c^2 K = \tau T^4,$$

con  $\tau$  costante universale, indipendente dal mezzo considerato.

Si vede subito che, quando la temperatura varia da punto a punto, l'intensità specifica  $H$  non può più ritenersi indipendente dall'orientazione del  $d\sigma$ . Infatti ciò implicherebbe, in particolare, eguaglianza di

irraggiamento in versi opposti, e quindi flusso complessivo nullo; mentre, in un ambiente a temperatura variabile, c'è (anche soltanto per irraggiamento) trasporto di energia dalle regioni più calde verso le regioni meno calde.

Il modello classico della propagazione del calore nei corpi conduttori suggerisce spontaneamente l'ipotesi da saggiare, quando  $T$  varia col posto: ed è che l'intensità  $H$  in un punto generico  $M$  consti, oltre che dell'addendo  $K$ , anche di un secondo termine,  $-\chi(dT/dn)$ , proporzionale al gradiente di  $T$  in direzione perpendicolare all'elemento superficiale considerato. Porremo, in conformità

$$H = K - \chi \frac{dT}{dn}.$$

Nell'invocato modello dei fenomeni di conduzione (entro un mezzo omogeneo ed isotropo), il fattore di proporzionalità  $\chi$  può ritenersi (con larga approssimazione) costante. Noi supporremo, più generalmente, che  $\chi$  sia, al pari di  $K$ , funzione positiva di  $T$ ; comunque, è lecito assumerlo sotto la forma

$$3k \frac{dK}{dT},$$

intendendo anche con  $k$  una funzione positiva di  $T$ . La precedente espressione di  $H$  può, così, essere scritta

$$(3) \quad H = K - 3k \frac{dK}{dn}.$$

### 3. - Espressione del flusso.

Si chiama, notoriamente, flusso attraverso  $d\sigma$ , nel senso assunto come positivo sulla normale  $n$ , la quantità di energia  $R_1 d\sigma dt$  che, durante il tempuscolo  $dt$ , attraversa  $d\sigma$  nel verso positivo, diminuita della quantità di energia  $R_2 d\sigma dt$  che contemporaneamente passa in verso opposto. Valutiamo intanto  $R_1$ .

Trattandosi di energia raggiante in tutte le direzioni, conviene considerare tutti i coni elementari  $d\Omega$  le cui generatrici  $g$  formano, con  $n$ , un angolo acuto. Per ciascun  $d\Omega$ , il contributo di energia è, a norma della (1),

$$H \cos \widehat{ng} d\sigma d\Omega dt,$$

l' $H$  riferendosi alla direzione  $g$ .

Integrando a tutto l'emisfero  $\Omega_1$ , in cui  $\cos \widehat{ng} > 0$ , si avrà, per definizione,  $R_1 d\sigma dt$ . Ne consegue, avuto riguardo alla (3),

$$(4) \quad R_1 = \int_{\Omega_1} \left( K - 3k \frac{dK}{dg} \right) \cos \widehat{ng} d\Omega .$$

Il differenziale  $d\Omega$  è l'area di un elemento della sfera di raggio 1, costante alla direzione  $g$ ; il prodotto  $\cos \widehat{ng} d\Omega$  ne misura la proiezione sul piano diametrale che limita  $\Omega_1$  (perpendicolare ad  $n$ ); e  $\int_{\Omega_1} \cos \widehat{ng} d\Omega$  non è altro che l'area  $\pi$  del corrispondente cerchio massimo.

$K$  e  $k$  sono funzioni del posto e del tempo, indipendenti da  $g$ .

D'altra parte, riferendoci per un momento ad assi cartesiani  $Oxyz$ , di cui l'asse delle  $z$  coincide con  $n$ , e indicando con  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  i coseni direttori di  $g$ , si ha

$$\frac{dK}{dg} = \frac{\partial K}{\partial x} \gamma_1 + \frac{\partial K}{\partial y} \gamma_2 + \frac{\partial K}{\partial n} \gamma_3 ,$$

e quindi, dalla (4),

$$(4') \quad R_1 = \pi K - 3k \frac{\partial K}{\partial x} \int_{\Omega_1} \gamma_1 \gamma_3 d\Omega - 3k \frac{\partial K}{\partial y} \int_{\Omega_1} \gamma_2 \gamma_3 d\Omega - 3k \frac{\partial K}{\partial n} \int_{\Omega_1} \gamma_3^2 d\Omega .$$

I primi due integrali del secondo membro sono nulli per ragione di simmetria. Infatti, considerando accanto a  $g$  la sua simmetrica rispetto ad  $n$  (nel piano  $n, g$ ), rimane associato ad ogni  $d\Omega$  un altro  $d\Omega$  congruente; e il loro contributo complessivo è nullo, perchè  $\gamma_1, \gamma_2$  vi hanno segni opposti, mentre  $\gamma_3$  si conserva inalterato.

Il terzo integrale  $\int_{\Omega_1} \gamma_3^2 d\Omega$ , si valuta subito in base alle considerazioni seguenti: Per l'equivalenza di ogni direzione rispetto all'intera superficie sferica  $\Omega$ , sono eguali tra loro i tre integrali

$$\int_{\Omega} \gamma_1^2 d\Omega , \quad \int_{\Omega} \gamma_2^2 d\Omega , \quad \int_{\Omega} \gamma_3^2 d\Omega .$$

Ognuno di essi vale quindi un terzo della somma, che è  $4\pi$ . Ma ( $\gamma_3$  cambiando soltanto di segno, quando si sostituisce ad una direzione la sua opposta)

$$\int_{\Omega} \gamma_3^2 d\Omega = 2 \int_{\Omega_1} \gamma_3^2 d\Omega ,$$

da cui

$$\int_{\Omega_1} \gamma_3^2 d\Omega = \frac{2\pi}{3}.$$

Risulta così, dalla (4'),

$$R_1 = \pi K - 2\pi k \frac{dK}{dn}.$$

L'espressione di  $R_2$  ne scende senza calcolo, per semplice sostituzione della direzione  $n$  coll'opposta (e quindi di  $dn$  con  $-dn$ ). Con ciò

$$R_2 = \pi K + 2\pi k \frac{dK}{dn};$$

e si ricava, in definitiva, pel flusso unitario nella direzione  $n$ , l'espressione

$$(5) \quad \mathfrak{F}_n = R_1 - R_2 = -4\pi k \frac{dK}{dn}.$$

Essa mette in evidenza che, per i vari  $d\sigma$  spiccati da un medesimo punto, i flussi nei sensi delle rispettive normali  $n$  altro non sono che le componenti, secondo  $n$ , del vettore

$$(5') \quad \mathbf{F} = -4\pi k \text{ grad } K.$$

Questo ancora è da dirsi *flusso* (in senso vettoriale).

#### 4. - Considerazioni critiche.

La legittimità della posizione (3), logicamente ineccepibile, esige qualche commento dal punto di vista fisico.

Per  $T$  costante (nell'intorno del generico posto considerato), lo è anche  $K$ , in virtù della (2); e si è ricondotti alla legge di STEFAN.

Quando la temperatura varia col posto, il termine addizionale, è, in generale, diverso da zero. Circa il suo ordine di grandezza, già si può dire qualche cosa, in base al materiale d'osservazione attualmente posseduto: e precisamente che, nei limiti di temperatura entro cui fu controllata la legge di STEFAN, e fino a gradienti abbastanza rilevanti (di-

ciamo di qualche centinaio di gradi per centimetro), *l'addendo*  $-3k(dK/dn)$  non può superare tre o quattro centesimi di  $K$ .

Ciò risulta dalle stesse esperienze fondamentali di LUMMER-PASCHEN (4) e di KURLBAUM (5), istituite allo scopo di verificare la legge di STEFAN. In realtà, col dispositivo adottato in queste esperienze, non si misura (eseguite che sieno le necessarie riduzioni) l' $H$  entro un ambiente a temperatura costante, ma sibbene la differenza di due  $H$ , che spettano ad elementi superficiali (paralleli), mantenuti a due diverse (anche molto diverse) temperature  $T$  e  $\Theta$ , e irradianti mutuamente attraverso l'aria: sicchè dall'uno all'altro c'è un gradiente di temperatura, certo, non nullo (e, probabilmente, assai irregolare, in causa dei moti convettivi dell'aria ambiente).

Ciò non ostante, le misurate differenze fra i due  $H$  si riscontrarono sensibilmente proporzionali a  $T^4 - \Theta^4$ , con un errore medio del 4% (6).

Questi dati di fatto potrebbero interpretarsi (nel suddetto ordine di approssimazione) come conferma della validità della legge di STEFAN, anche entro un mezzo a temperatura variabile da punto a punto.

Ma l'illazione non sarebbe ragionevole, implicando essa, come già si è accennato, flusso complessivo rigorosamente nullo. Conviene pertanto ammettere la presenza, in  $H$ , di un termine addizionale, dipendente dalla non uniformità della temperatura, e abbastanza piccolo da non togliere alle ricordate esperienze classiche valore probativo rispetto alla legge di STEFAN. Il successo delle esperienze stesse appare, così, dovuto (come tante altre volte accadde nella scienza) all'essersi trascurate (con sicura, anche se non cosciente, intuizione) influenze che, per altro rispetto (scambio globale di energia, nel caso presente), possono diventare essenziali.

Dalla necessità di un termine addizionale nella espressione di  $H$ , non segue senz'altro — ben si capisce — che esso abbia proprio la forma da noi adottata. Tuttavia, le ragioni di analogia e di semplicità, che ci hanno guidato, giustificano il tentativo di costruzione teorica e l'appello all'esperienza in un campo che, almeno nel caso limite dell'equilibrio termodinamico, si è rivelato tanto fecondo.

(4) « Ann. der Phys. », B. 63, 1897, pp. 395-410.

(5) Ibidem, B. 65, 1898, pp. 746-760.

(6) Cfr. la tabella II (p. 408) della citata Memoria di LUMMER-PASCHEN. Nella colonna VIII sono riportati gli scostamenti percentuali (fra valore osservato e valore teorico) di 13 esperienze:

- 8; - 6; - 1,6; - 3,1; 5,1; 0,2; - 1,7; 5,6; 5; 0,7; 0,4; 3; 1,9.

Il corrispondente errore medio  $\sqrt{(1/13)\sum x^2}$  ( $x$  scostamento) vale  $\sqrt{16,21}$  cioè poco più del 4%.

### 5. - Indicazione dei risultati.

Per ipotesi, qualunque sia il regime,  $\varepsilon$ ,  $\alpha$  e  $K$  hanno, in un generico punto  $M$ , valori dipendenti soltanto dalla temperatura  $T$  in  $M$ : gli stessi, quindi, che si avrebbero in regime stazionario con temperatura ovunque eguale a quella di  $M$ . Sèguita perciò a sussistere la nota relazione

$$(6) \quad \varepsilon = K\alpha \quad (7) .$$

Altra fondamentale relazione dell'irraggiamento, in condizioni di equilibrio termodinamico, è quella che esprime la densità di energia  $u$ , in termini di  $K$  e di  $c$ , sotto la forma

$$(7) \quad u = \frac{4\pi K}{c} .$$

Orbene, in una prossima Nota dimostrerò che la validità della (7) è incondizionata, qualunque sia il regime. Fin da ora però è utile rilevare che il risultato è in parte intuitivo, e in parte no.

In verità, da un lato la stessa definizione di  $u$  (§ 1),

$$u = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{U}{S} ,$$

lascia presumere che, continue essendo le caratteristiche del fenomeno, al convergere di  $S$  a zero attorno ad un punto determinato  $M$ , le cose andranno come se le dette caratteristiche fossero addirittura costanti coi valori che loro competono in  $M$ . In questo senso non c'è da aspettarsi divario, quando si passa, da  $T$  costante, ad un regime qualunque.

Viceversa, la non uniformità della temperatura richiede (§ 2) che si modifichi l'espressione della intensità specifica con un termine dipendente dal gradiente di  $T$  (secondo la direzione di cui si tratta). Questo termine (riportato al suo valore efficace in  $M$ ) potrebbe *a priori* influire sul valore limite di  $U/S$ ; nè vien fatto di rendersene conto per via intuitiva.

Perciò, tradurremo in formule le definizioni: e la (7) ne risulterà, con gli abituali procedimenti del calcolo, in modo generale e rigoroso.

---

(7) Una prima dimostrazione *matematica* di tale relazione fu da me data nella Nota *Dedu- zione rigorosa ecc.*, citata al § 1. Una seconda dimostrazione scenderà come corollario dal § 15 del presente scritto: più precisamente, tale paragrafo figurerà nella Nota *Sul regime variabile del calore raggiate: Dimostrazioni*, che sarà comunicata all'Accademia nella prossima seduta.



Lo scopo essenziale della ricerca è di stabilire l'*equazione indefinita dell'irraggiamento variabile*. Essa viene fornita, nel modo concettualmente più diretto, dal principio di conservazione dell'energia (si intende, sotto la forma specifica di energia raggianti). Bisogna, naturalmente, tener debito conto degli acquisti di energia raggianti provenienti dall'emissione, e delle perdite prodotte dall'assorbimento; e quest'ultimo computo è (come quello di  $U$ ) piuttosto laborioso.

Nella già annunciata seconda Nota mostreremo che le due cause antagoniste si compensano esattamente, in virtù della (6), tal quale come in regime stazionario (sotto temperatura costante). Ammesso che sia il detto compenso, il principio di conservazione porge ovviamente, come nella teoria di FOURIER (salvo che ivi si parla di calore, e qui di energia raggianti),

$$(I) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = - \operatorname{div} \mathbf{F},$$

$u$  ed  $\mathbf{F}$  dipendendo da  $K$ , a norma delle (7) e (5').

Esplicitando e dividendo per  $4\pi$ , si ha

$$(I') \quad \frac{1}{c} \frac{\partial K}{\partial t} + \operatorname{div} (k \operatorname{grad} K) = 0,$$

dove  $k$  rappresenta una funzione (che le nostre ipotesi lasciano indeterminata) della temperatura  $T$ , o, ciò che è lo stesso, della incognita principale  $K$ .

Per  $k$  costante, si ritrova la classica equazione di propagazione del calore; in generale si è condotti ad una equazione non lineare che, con la notazione dei parametri differenziali, si scrive

$$\frac{1}{c} \frac{\partial K}{\partial t} + \nabla(k, K) + k \Delta_2 K = 0.$$