XXXV.

SOPRA ALCUNE APPLICAZIONI DELLA RAPPRESENTAZIONE ANALITICA DELLE FUNZIONI DEL PROF. MITTAG-LEFFLER

«Atti Acc. Sc. di Torino», vol. XXXIV, 1898-99, pp. 492-494.

1. Consideriamo in una questione dinamica qualsiasi gli elementi incogniti come funzioni analitiche del tempo, riguardando questo come una variabile complessa. Se costruiamo per queste funzioni, prendendo il valore iniziale del tempo come centro, quelle figure che il prof. MITTAG-LEFFLER chiama le stelle, ogniqualvolta potremo dimostrare che l'asse reale giace nell'interno di esse, avremo il modo di ottenere senz'altro gli elementi incogniti sviluppati per tutti i possibili valori reali del tempo. Ciò potrà ottenersi secondo l'importante metodo del MITTAG-LEFFLER in infiniti modi, e potremo perciò convenientemente regolare la convergenza delle serie. Oltre a ciò, e questo è il più importante, ci sarà sufficiente conoscere le condizioni iniziali del moto per potere ottenere gli sviluppi stessi. In altri termini, una questione dinamica si potrà dire completamente risoluta dal punto di vista analitico, quando potremo dimostrare che l'asse reale dei tempi giace completamente nell'interno delle stelle degli elementi incogniti. Mi permetto, come Nota alla bella Memoria del prof. MITTAG-LEFFLER, di accennare l'esempio di varie classi di problemi pei quali la detta circostanza favorevole, che ne permette la completa risoluzione, si presenta effettivamente.

2. L'anno scorso in due Note e quest'anno in una Nota ho esaminato una estesa classe di questioni dinamiche che conducono alle equazioni differenziali del tipo (1)

$$p_s' = \sum_{1}^{\nu}{}_r \sum_{1}^{\nu}{}_k \, a_{sk}^{(r)} p_h p_r ,$$

essendo $a_{sk}^{(r)} + a_{sk}^{(r)} = 0$.

Il teorema enunciato nel § 5 della 2ª Nota può enunciarsi dicendo che una striscia di larghezza finita contenente l'asse reale dei tempi è inclusa entro le stelle delle funzioni p_s considerate come funzioni analitiche del tempo, essendo l'origine dei tempi il centro delle stelle. Abbiamo dunque,

(1) «Atti della R. Accad. di Torino» 27 febbraio e 27 marzo 1898 e 15 gennaio 1899. [In questo vol.: XXVI, pp. 336-355; XXVII, pp. 356-369: XXXIII, pp. 576-586]. Queste ricerche sono suscettibili di una ulteriore estensione, come spero di poter mostrare in un prossimo lavoro.

ricorrendo ai nuovi sviluppi del prof. MITTAG-LEFFLER, infiniti altri modi di risolvere completamente dal punto di vista analitico questi problemi dinamici, oltre il metodo sviluppato nella suddetta Nota, e quello che il prof. PICARD ha esposto nella sua comunicazione del novembre scorso [2].

3. Oltre alla classe ora ricordata di questioni esaminiamo alcuni casi che si riferiscono a problemi di attrazione. La questione di un punto attratto colla legge di NEWTON da due centri fissi costituisce un caso classico largamente trattato colle funzioni ellittiche da molti autori. Ma se i centri di attrazione, essendo sempre in linea retta, anziché due sono in numero maggiore, la questione non è stata risoluta.

Supponiamo che il momento della velocità iniziale del punto attratto m per rapporto all'asse x dei punti attraenti sia diverso da zero. Denotando con r la distanza del punto attratto dall'asse x, con ϑ l'angolo che il piano mx fa con un piano fisso passante per x, si potrà scrivere l'integrale delle aree $r^2\vartheta' = C$, in cui la costante C è diversa da zero. Avremo poi l'integrale delle forze vive $T - P = h$, in cui h è costante; T è la forza viva data da

$$\frac{1}{2} m (r'^2 + r^2 \vartheta'^2 + x'^2);$$

e P è il potenziale eguale a

$$\sum_{1}^{u}{}_{i} \frac{M_i m}{r_i},$$

denotando con M_i le masse dei punti attraenti e con r_i le loro distanze da m. Si vede facilmente che r non può divenir zero, perché se per $t = t_0$ questa quantità fosse infinitesima, assumendola come infinitesimo principale, il ϑ', per l'integrale delle aree, sarebbe infinito del 2° ordine, onde $r^2\vartheta'^2 = C\vartheta'$ e quindi T sarebbero infiniti del 2° ordine, mentre P non potrebbe essere infinito di ordine superiore al primo, giacché le r_i sono maggiori di r.

Si deduce da ciò facilmente che l'asse reale dei tempi deve essere incluso entro le stelle degli elementi incogniti e quindi il problema può ritenersi risoluto cogli sviluppi del MITTAG-LEFFLER.

4. Quando si hanno n punti che si respingono, anziché attrarsi colla legge di NEWTON, l'integrale delle forze vive assume la forma

$$\frac{1}{2} \Sigma_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) + \Sigma_{is} \frac{m_i m_s}{r_{is}} = h,$$

ove m_i denotano le masse dei punti, $x_i\, y_i\, z_i$ le loro coordinate, r_{is} le loro mutue distanze, ed h una costante.

Osservando che nella formula precedente tutti i termini sono positivi, riesce facile concludere che i punti mobili non si incontrano e che le loro velocità si conservano finite, quindi anche in questo caso l'asse reale dei tempi appartiene alle stelle delle funzioni incognite.

(2) Ibid., 13 novembre 1898.

Ma osserviamo che si passerà dalle equazioni del moto, nell'ipotesi delle forze repulsive, a quelle corrispondenti alle forze attrattive trasformando il tempo t in $t\sqrt{-1}$. Con tale trasformazione le componenti delle velocità divengono immaginarie se erano reali e viceversa; però, se in un dato istante erano nulle, tali si conservano dopo la trasformazione. Di qui segue il seguente singolare teorema: Consideriamo il problema degli n corpi nel caso più generale; supponiamo soltanto che i mobili partano con velocità nulla; allora prendendo come centro l'istante iniziale, l'asse reale dei tempi potrà non essere incluso nelle stelle delle coordinate, ma l'asse immaginario vi sarà sempre incluso. In altri termini, gli sviluppi del MITTAG-LEFFLER, anche se non saranno validi per tutti i valori reali del tempo varranno per tutti i valori immaginarii.

5. Per ultimo possiamo notare che gli sviluppi del MITTAG-LEFFLER potranno applicarsi al movimento dei filetti vorticosi rettilinei e paralleli, per le cui equazioni del movimento e i relativi integrali rinviamo alla lezione XX del corso di Meccanica del KIRCHHOFF.