XXXVIII.

SUGLI INTEGRALI LINEARI DEI MOTI SPONTANEI A CARATTERISTICHE INDIPENDENTI

«Atti Acc. Scienze Torino», vol. XXXV, 1899-900, pp. 186-192 (*).

1. Nella mia Nota: *Sopra una classe di equazioni dinamiche* [1] ho esposto (§ 8) la riduzione che si può operare nelle equazioni dei moti spontanei a caratteristiche indipendenti di ordine ν allorché esiste un certo numero di integrali lineari. Ora mi permetto di esporre un criterio onde riconoscere, *a priori* dai valori dei coefficienti che compariscono nelle equazioni, la esistenza di $\nu - 3$ integrali lineari.

Mi varrò di questo risultato per completare un teorema che ho dato nell'altra mia Nota: *Sulla integrazione di una classe di equazioni dinamiche* [2]. Ivi dimostro (§ 5) che *se esiste un integrale quadratico la cui equazione caratteristica ha radici disuguali le* ν *caratteristiche si esprimono come funzioni ellittiche del tempo quando si possono trovare* $\nu - 3$ *integrali lineari indipendenti dal tempo.*

D'altra parte in virtù del teorema del § 11 della prima delle due Note citate basterebbe conoscere $\nu - 4$ integrali lineari indipendenti dal tempo, perché il problema si potesse ridurre alle quadrature.

Questi due risultati si possono fondere insieme, osservando che se esistono $\nu - 4$ integrali lineari deve sempre esistere un nuovo integrale lineare, e perciò basta provare l'esistenza di $\nu - 4$ integrali lineari, perché si sappia che la soluzione può ottenersi mediante funzioni ellittiche.

2. Le equazioni dei moti spontanei a caratteristiche indipendenti p_1, $p_2, \cdots, p_\nu$, allorché T è la forza viva e F = cost. rappresenta un integrale quadratico la cui equazione caratteristica ha radici disuguali possono scriversi (vedi 1ª Nota citata, § 9)

$$p'_s = \Sigma_{r,k}\, e_{s,r,k} \frac{d(\mathrm{T}, \mathrm{F})}{d(p_r, p_k)} \tag{1}$$

in cui le $e_{s,r,k}$ sono coefficienti costanti che cambiano segno per una inversione degli indici.

(*) Presentata nell'adunanza del 17 dicembre 1899.

(1) «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», vol. XXXIII, 1897-98, pp. 451-475. [In questo vol.: XXVI, pp. 336-355].

(2) Ibid., pp. 542-558. [In questo vol.: XXVII, pp. 356-369].

Supponiamo ora che esistano $\nu - 3$ integrali lineari indipendenti

$$G_i = \sum_{1}^{\nu}{}_s\, a_{is}\, p_s = \text{cost.} \qquad (i = 1, 2, \cdots, \nu - 3).$$

Dovremo avere

$$\sum_{1}^{\nu}{}_s\, a_{is}\, p'_s = 0$$

$$\sum_{1}^{\nu}{}_s \frac{\partial T}{\partial p_s}\, p'_s = 0$$

$$\sum_{1}^{\nu}{}_s \frac{\partial F}{\partial p_s}\, p'_s = 0,$$

quindi

$$p'_s = (-1)^{s-1}\, C\, \frac{d(G_1, G_2, \cdots, G_{\nu-3}, T, F)}{d(p_1, p_2, \cdots, p_{s-1}, p_{s+1} \cdots p_\nu)}$$

in cui C rappresenta un coefficiente di proporzionalità indipendente dall'indice s.

Potremo dunque scrivere le equazioni

$$(-1)^{s-1}\, C\, \frac{d(G_1, G_2, \cdots, G_{\nu-3}, T, F)}{d(p_1, p_2, \cdots, p_{s-1}, p_{s+1} \cdots p_\nu)} = \Sigma_{r,k}\, e_{s,r,k} \frac{d(T, F)}{d(p_r, p_k)}.$$

Poniamo ora

$$E_{i_1, i_2, i_3} = \frac{d(G_1, G_2, \cdots, G_{\nu-3})}{d(p_{i_4}, p_{i_5}, \cdots, p_{i_\nu})} = \begin{vmatrix} a_{1,i_4} & , a_{1,i_5} & , \cdots, & a_{1,i_\nu} \\ a_{2,i_4} & , a_{2,i_5} & , \cdots, & a_{2,i_\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\nu-3,i_4} & , a_{\nu-3,i_5} & , \cdots, & a_{\nu-3,i_\nu} \end{vmatrix};$$

ove $i_1, i_2, \cdots, i_\nu$ rappresenta una permutazione pari dei numeri $1, 2, \cdots, \nu$.

L'equazione precedente si scriverà

$$C\Sigma_{r,k}\, E_{s,r,k} \frac{d(T, F)}{d(p_r, p_k)} = \Sigma_{r,k}\, e_{s,r,k} \frac{d(T, F)}{d(p_r, p_k)}.$$

3. Se le caratteristiche sono tali che si abbia

$$T = \frac{1}{2} \sum_{1}^{\nu}{}_i\, p_i^2 \quad , \quad F = \frac{1}{2} \sum_{1}^{\nu}{}_i\, \lambda_i\, p_i^2$$

in cui le λ_i sono diverse fra loro, le equazioni precedenti si scriveranno

(2) $$C\Sigma_{rk}\, E_{s,r,k} (\lambda_k - \lambda_r)\, p_r\, p_k = \Sigma_{rk}\, e_{s,r,k} (\lambda_k - \lambda_r)\, p_r\, p_k.$$

Riguardo al coefficiente di proporzionalità C noi sappiamo solo che esso è indipendente dall'indice s.

Dimostriamo ora che esso è costante ed indipendente dai valori iniziali delle $p_1, p_2, \cdots, p_\nu$.

A tal fine osserviamo che, se per $t = 0$ prendiamo tutte le caratteristiche nulle eccettuate p_r e p_k, avremo dalla (2)

$$CE_{s,r,k} = e_{s,r,k}$$

ossia

$$C = \frac{e_{s,r,k}}{E_{s,r,k}};$$

e, siccome C è indipendente da s, sarà

$$\frac{e_{s,r,k}}{E_{s,r,k}} = \frac{e_{s',r,k}}{E_{s',r,k}}, \qquad (s' \gtrless s).$$

Ma, invertendo gl'indici, tanto la $e_{s',r,k}$ quanto la $E_{s',r,k}$ cambiano segno, quindi

$$\frac{e_{s,r,k}}{E_{s,r,k}} = \frac{e_{s',r,k}}{E_{s',r,k}} = \frac{e_{r,s',k}}{E_{r,s',k}}$$

e, poiché mutando il primo indice r nell'ultimo rapporto, esso non cambia, così sarà

$$\frac{e_{s,r,k}}{E_{s,r,k}} = \frac{e_{r',s',k}}{E_{r',s',k}}, \qquad (r' \gtrless r).$$

In modo analogo si trova

$$\frac{e_{s,r,k}}{E_{s,r,k}} = \frac{e_{k',r',s'}}{E_{k',r',s'}} = \frac{e_{s',r',k'}}{E_{s',r',k'}}, \qquad (k' \gtrless k),$$

il che mostra che le e e le E aventi gli stessi indici sono fra loro proporzionali, e siccome queste quantità sono costanti, così dalla (2) segue che anche C è una costante ed è indipendente dai valori iniziali delle caratteristiche.

4. Osserviamo ora che moltiplicando una delle funzioni G_i per C si potrà sempre fare in modo che il rapporto di proporzionalità delle E e delle e si riduca eguale ad 1, onde potremo dire che queste sono eguali ai minori di ordine $\nu - 3$ di una matrice di ν linee e di $\nu - 3$ colonne, tali essendo le E. Ma (vedi 1ª Nota citata, § 9) eseguendo una sostituzione lineare a coefficienti costanti sulle caratteristiche

$$q_i = \sum_{1}^{\nu} {}_s A_{s,i}\, p_s,$$

in modo da passare dalle caratteristiche p_s alle q_i, le $e_{s,r,k}$ si trasformano nelle

$$\sum_{1}^{\nu} {}_x \sum_{1}^{\nu} {}_y \sum_{1}^{\nu} {}_z\, e_{x,y,z} A_{x,s} A_{y,r} A_{z,k},$$

onde la proprietà di essere i minori d'ordine $\nu - 3$ di una matrice di ν linee e di $\nu - 3$ colonne si conserva nei coefficienti delle equazioni differenziali a cui soddisfano le caratteristiche, allorché si eseguisce una sostituzione lineare a coefficienti costanti sulle caratteristiche stesse.

Potremo dunque concludere che, quando esistono i $\nu - 3$ integrali lineari indipendenti, i coefficienti $e_{s,r,k}$ saranno i minori di ordine $\nu - 3$ di una matrice con ν linee e $\nu - 3$ colonne, qualunque sia la forma che hanno le funzioni quadratiche T ed F, purché la equazione determinante abbia radici disuguali.

5. Da un noto teorema sui minori delle matrici (3) possiamo dedurre che quando le $e_{s,r,k}$ sono i suddetti minori dovrà aversi

$$(3) \qquad \sum_{1}^{\nu}{}_k\, e_{s,r,k}\, e_{s',r',k} = 0\,.$$

Le condizioni precedenti sono quindi necessarie per la esistenza dei $\nu - 3$ integrali lineari.

Dimostriamo che esse sono anche sufficienti.

Infatti se le (3) sono verificate, potremo sempre porre

$$e_{i_1,i_2,i_3} = \begin{vmatrix} a_{1,i_4} & , a_{1,i_5} & ,\cdots, a_{1,i_\nu} \\ a_{2,i_4} & , a_{2,i_5} & ,\cdots, a_{2,i_\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\nu-3,i_4} & , a_{\nu-3,i_5} & ,\cdots, a_{\nu-3,i_\nu} \end{vmatrix}$$

essendo $i_1, i_2, i_3, \cdots, i_\nu$ una permutazione pari dei numeri $1, 2, \cdots, \nu$, e le $a_{h,k}$ $(h = 1, 2, \cdots, \nu - 3\ ;\ k = 1, 2, \cdots, \nu)$ quantità costanti.

Le (1) diverranno dunque

$$p'_s = (-1)^{s-1} \frac{d(\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2, \cdots, \mathrm{G}_{\nu-3}\,\mathrm{T}, \mathrm{F})}{d(p_1 \cdots p_{s-1}, p_{s+1} \cdots p_\nu)}$$

avendo posto

$$\mathrm{G}_i = \sum_{1}^{\nu}{}_s\, a_{i,s}\, p_s \qquad (i = 1, 2, \cdots, \nu - 3),$$

ciò che prova che

$$\mathrm{G}_1 = \text{cost.}\ ,\ \mathrm{G}_2 = \text{cost.}\ , \cdots, \mathrm{G}_{\nu-3} = \text{cost.}$$

sono integrali delle (1).

Possiamo per conseguenza enunciare il teorema seguente:

La condizione necessaria e sufficiente affinché le equazioni differenziali

$$p'_s = \Sigma_{r,k}\, e_{s,r,k} \frac{d(\mathrm{T}, \mathrm{F})}{d(p_r, p_k)}$$

(3) E. D'Ovidio, *Ricerche sui sistemi indeterminati di equazioni lineari*. « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. XII. – *Le funzioni metriche fondamentali negli spazi di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante*. « Mem. della R. Acc. dei Lincei » (Classe Sc. fis. mat. nat.), ser. 3, vol. I, 1877, p. 929.

ammettano $\nu - 3$ *integrali lineari è che i coefficienti soddisfino alle equazioni*

$$\Sigma_k e_{s,r,k} e_{s',r',k} = 0 .$$

Se queste condizioni sono soddisfatte, le equazioni s'integrano con funzioni ellittiche.

6. Mediante la conoscenza di h integrali lineari delle (1), con un conveniente cambiamento di caratteristiche esse possono trasformarsi in $\nu' = \nu - h$ equazioni differenziali dello stesso tipo

$$q'_i = \Sigma_{r,k} e_{i,r,k} \frac{d(\mathrm{T},\mathrm{F})}{d(q_r, q_k)}, \qquad (i, r, k = 1, 2, \cdots, \nu'), \tag{4}$$

in cui F è sempre un polinomio di secondo grado nelle $q_1, q_2, \cdots, q_{\nu'}$, ma non più omogeneo.

Ripetendo un analogo ragionamento a quello fatto precedentemente si prova che *la condizione necessaria e sufficiente affinché le* (4) *ammettano* $\nu' - 3$ *nuovi integrali lineari indipendenti è che le* $e_{i,r,k}$ *soddisfino le condizioni*

$$\sum_1^{\nu'} e_{i,r,k} e_{i',r',k} = 0 .$$

7. Supponiamo ora che le (1) abbiano $\nu - 4$ integrali lineari, allora esse si ridurranno alle quattro equazioni differenziali

$$q'_i = \Sigma_{rk} e_{i,r,k} \frac{d(\mathrm{T},\mathrm{F})}{d(q_r, q_k)} \qquad (i, r, k = 1, 2, 3, 4).$$

Ma in questo caso saranno sempre soddisfatte le equazioni

$$\sum_1^4{}_k e_{i,r,k} e_{i',r',k} = 0$$

come si verifica facilmente. Ne segue che esisterà sempre un altro integrale lineare.

Questo integrale si trova immediatamente: esso sarà

$$e_{2,3,4}\, q_1 + e_{3,4,1}\, q_2 + e_{4,1,2}\, q_3 + e_{1,2,3}\, q_4 = \text{cost.},$$

onde avremo il teorema:

Allorché, in un problema di moto spontaneo a caratteristiche indipendenti d'ordine ν, *esistono* $\nu - 4$ *integrali lineari indipendenti dal tempo ed un integrale quadratico, la cui equazione caratteristica ha radici disuguali ed è pure indipendente dal tempo, le* ν *caratteristiche si potranno esprimere come funzioni ellittiche del tempo.*