LE SUPERFICIE A CURVE SEZIONI DI GENERE 3

Questo lavoro è da considerarsi come il seguito dell'altro, comparso già in questi *Annali* sotto il medesimo titolo (tom. XVI, 1909), e che noi indicheremo con (A) tutte le volte che ci occorrerà di citarlo; e i due, considerati insieme, risolvono pienamente il problema della determinazione di tutte le superficie a curve sezioni (piane o iperpiane) di genere 3.

In (A), dopo aver distinte le superficie in discorso in due *specie*, si osservò che, data una ricerca precedente del prof. CASTELNUOVO, bastava limitarsi alla determinazione di quelle di 2^a specie e si procedette alla parte meno agevole della enumerazione dei tipi, cioè a quella riguardante le superficie normali dello spazio ordinario: qui si caratterizzano le superficie normali, sempre di 2^a specie, degli iperspazi e così la ricerca vien portata a compimento.

Ma, come era prevedibile, e come era stato già rapidamente accennato nella prefazione di (A), i risultati ottenuti in questo secondo lavoro non si limitano a una pura enumerazione di tipi, bensì conducono a fissare i tratti essenziali della teoria delle superficie a curve sezioni di genere 3.

Essi infatti permettono di asserire, in primo luogo, che:

Ogni superficie normale di 2^a specie dello spazio ordinario si può convertire in un cono cubico ellittico per mezzo di una trasformazione cremoniana dello spazio ambiente,

e poi, traendo partito appunto da questo teorema, che:

Ogni superficie di 2^a specie a curve sezioni (piane o iperpiane) di genere 3 o coincide con una di certe superficie, di due tipi distinti, dello spazio a cinque dimensioni o può ottenersi da una di queste mediante una proiezione (da punti esterni o non).

Le superficie dell'S_5, cui qui si allude, son tutte dell'8^0 ordine, ma si distinguono in due tipi a seconda dell'assenza o meno di punti singolari.

Quelle del 1^0 tipo son prive di punti doppi e, nel classico senso della geometria della retta, rappresentano le congruenze delle corde delle quartiche sghembe ordinarie di 1^a specie; quelle del 2^0 tipo sono dotate di due rette doppie sghembe (distinte o infinitamente vicine) e rappresentano certe particolari congruenze di 4^0 grado, complete intersezioni di due complessi quadratici.

Le une e le altre si lascian poi definire come intersezioni parziali di una quadrica e di una varietà normale a tre dimensioni del 6^0 ordine, luogo di una ∞^1 ellittica di piani.

Naturalmente non si tralascia di assegnare, anche per le superficie di 2^a specie iperspaziali, una rappresentazione sul cono cubico; e così, tenendo presenti teoremi già stabiliti dai proff. Castelnuovo e De-Franchis, si arriva facilmente alla classificazione di tutti i sistemi lineari semplici di genere 3 e dimensione non inferiore a 3 tracciati sopra il cono cubico ellittico.

Capitolo I.

RIDUZIONE AL CONO CUBICO DELLE SUPERFICIE NORMALI DI 2^a SPECIE DELLO SPAZIO ORDINARIO PER MEZZO DI TRASFORMAZIONI CREMONIANE

1. In (A) fu dimostrato che tutte le superficie normali dello spazio ordinario a curve sezioni di genere 3 e *di 2^a specie*, cioè con un solo fascio di superficie cubiche (sub-)aggiunte, sono del 6^0 ordine e contengono un fascio ellittico di coniche, distribuite

α) *o a coppie nei piani di un fascio*,

o una per una nei piani di una sviluppabile, che può essere

β) *una sviluppabile non conica di 4^a classe, oppure*

γ) *un cono di 3^a classe e del 6^0 ordine.*

In questo capitolo assegneremo le formole delle trasformazioni *cremoniane* che servono a mutare in coni cubici (ellittici) le superficie enumerate in (A) [1]; e in tal modo resterà dimostrato che

[1] Naturalmente (occorre appena l'avvertirlo) se esiste *una* trasformazione cremoniana che muta una superficie in un cono cubico ellittico ne esistono addirittura infinite.

esse sono equivalenti a coni cubici non solo dal punto di vista delle trasformazioni birazionali (ciò che è ben chiaro), ma anche dal punto di vista delle trasformazioni cremoniane.

2. *Ipotesi* α).

Cominciamo dal considerare le superficie con le coniche situate a coppie nei piani di un fascio.

Esse sono di due tipi generali, in quanto che [(A), n. 25] la linea doppia può esser formata:

α') *dai sei spigoli di un tetraedro e da una retta che si appoggia a due suoi spigoli opposti,* oppure

α'') *dai sei spigoli di un angoloide tetraedro completo e da una retta ulteriore appoggiata a due suoi spigoli opposti.*

Ciascuno dei casi α') ed α'') ammette poi un caso particolare caratterizzato dall'avvicinarsi indefinito di due certe rette doppie ad altre due delle rette medesime.

3. *Caso* α').

All'equazione della superficie F più generale corrispondente all'ipotesi α'), assegnata già in (A) al n. 19, scegliendo opportunamente il tetraedro fondamentale, può darsi l'aspetto:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &Bx_1^2\,x_3^2\,(ax_1+bx_4)^2+\\ &+x_1\,x_2\,(ax_1+bx_4)\,(cx_2+dx_3)\,(Dx_3^2+Ex_3\,x_4+Gx_4^2)+\\ &+Kx_2^2\,x_4^2\,(cx_2+dx_3)^2=0\,. \end{aligned}\right.$$

Ora si applichi ad F la trasformazione cremoniana definita dalle formule:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \varrho x_1 &= dy_1\,y_2\,y_4 \\ \varrho x_2 &= dy_1\,y_3\,y_4 \\ \varrho x_3 &= (by_2+y_4)\,(ay_2^2-cy_1y_3) \\ \varrho x_4 &= dy_1\,(ay_2^2-cy_1\,y_3) \end{aligned}\right. \qquad \text{ossia} \qquad \begin{aligned} \sigma y_1 &= x_1\,x_4\,(ax_1+bx_4) \\ \sigma y_2 &= x_1\,x_4\,(cx_2+dx_3) \\ \sigma y_3 &= x_2\,x_4\,(cx_2+dx_3) \\ \sigma y_4 &= x_1\,(adx_1x_3-bcx_2x_4)\,; \end{aligned}$$

essa si cangerà nel cono cubico F':

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &By_1\,(by_2+y_4)^2+\ y_3\,[D\,(by_2+y_4)^2+E\,d\,y_1\,(by_2+y_4)+G\,d^2\,y_1^2]+\\ &+Kd^2\,y_1\,y_3^2=0\,. \end{aligned}\right.$$

Le immagini delle sezioni piane C di F sono dunque date su F' dalle curve C' secondo cui F' è tagliato dalle superficie cubiche del sistema lineare

$$dy_1\, y_4\, (\lambda_0\, y_2 + \lambda_1 y_3) + (ay_2^2 - cy_1 y_3)\, [\lambda_2\, (by_2 + y_4) + \lambda_3 dy_1] = 0$$

le quali passano per la retta $y_2 = y_3 = 0$, per la retta $y_1 = by_2 + y_4 = 0$ (che sta sul cono F'), per la retta $y_1 = y_2 = 0$ (lungo la quale toccano tutte il piano $y_1 = 0$), e per la conica k^2 rappresentata dalle equazioni:

$$y_4 = ay_2^2 - cy_1\, y_3 = 0\,.$$

Notisi poi che le superficie medesime toccano il cono F' nel punto $y_2 = y_3 = y_4 = 0$, che in $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ hanno un punto doppio conico e che in $y_1 = y_2 = y_4 = 0$ hanno un punto doppio biplanare, uno dei piani osculatori essendo fisso e coincidendo con $y_1 = 0$, cioè col piano ivi tangente al cono F'.

Segue che le C' sono curve dell'8^0 ordine, passanti due volte per il vertice di F', con tre punti doppi nei vertici 1, 3, 4 del tetraedro fondamentale dello spazio $(y_1\, y_2\, y_3\, y_4)$ e due punti semplici nei punti ove la conica k^2 incontra F' fuori di 1 e 3 ([1]).

4. *Caso particolare.*

La superficie del n. precedente può presentare un caso particolare, e questo si ha quando delle due quadriche, che in (A) furono indicate con Φ_1' e con Φ_2' e che in generale si spezzano in coppie di piani distinti, una (ed una sola) si spezza in un piano contato due volte.

Allora all'equazione della superficie che continueremo a chiamare F si può dare la forma:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & Bx_1^2\, x_3^2\, (a\, x_1 + b\, x_4)^2 + x_1\, x_2^2\, (a\, x_1 + b\, x_4)\, (Dx_3^2 + Ex_3\, x_4 + Gx_4^2) + \\ & \qquad + Kx_2^4\, x_4^2 = 0\,; \end{aligned} \right.$$

([1]) Il fatto, che ognuna delle curve C' ha, fuori del vertice F', tre punti doppi, collima, per una notissima formula del prof. SEGRE (*Math. Ann.*, Bd. 34), con l'altro che le C' bisecano in punti variabili le generatrici di F' e sono del genere 3. Notisi poi che la conica k^2 tocca F' in 1 e 3.

e questa mediante la trasformazione cremoniana definita dalle formule:

$$(5)\quad \begin{cases} \varrho x_1 = by_1^2 y_2 \\ \varrho x_2 = by_1 y_2 y_4 \\ \varrho x_3 = (y_3 y_4 - ay_1^2) y_4 \\ \varrho x_4 = (y_3 y_4 - ay_1^2) y_2 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{aligned} \sigma y_1 &= x_1 x_2 x_3 \\ \sigma y_2 &= x_2^2 x_4 \\ \sigma y_3 &= x_1 x_3 (ax_1 + bx_4) \\ \sigma y_4 &= x_2^2 x_3 \end{aligned}$$

si cangia nel cono cubico F':

$$(6)\qquad By_3^2 y_4 + y_3 (Dy_4^2 + Ey_2 y_4 + Gy_2^2) + Ky_2^2 y_4 = 0 .$$

Il sistema $|C|$ delle sezioni piane di F si muta nel sistema $|C'|$ tagliato su F' dal sistema lineare di superficie cubiche:

$$by_1 y_2 (\lambda_0 y_1 + \lambda_1 y_4) + (y_3 y_4 - ay_1^2)(\lambda_2 y_4 + \lambda_3 y_2) = 0 .$$

Queste superficie passano per la conica k^2 rappresentata dalle equazioni

$$y_2 = y_3 y_4 - ay_1^2 = 0$$

e per le rette: $y_2 = y_4 = 0$ (che sta sul cono F'), $y_1 = y_3 = 0$ e $y_1 = y_4 = 0$; di più lungo quest'ultima toccano tutte il piano $y_4 = 0$.

Notisi inoltre che esse hanno due punti doppi in $y_1 = y_3 = y_4 = 0$ e $y_1 = y_2 = y_4 = 0$, quest'ultimo essendo biplanare con un piano osculatore fisso in $y_4 = 0$; e che nel punto $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ esse toccan tutte il cono F'.

Si conclude allora che $|C'|$ è un sistema di curve dell'8^0 ordine, con un punto-base doppio nel vertice di F', con altri tre punti-base doppi nei punti $y_1 = y_3 = y_4 = 0$, $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ e $y_1 = y_2 = y_4 = 0$, e due punti-base semplici in quelli ove la conica k^2 è tagliata dalla retta $y_2 = By_3 + Dy_4 = 0$.

5. *Caso* α'').

Per quanto è stato stabilito in (A) al n. 22, disponendo convenientemente del tetraedro fondamentale, si può fare in modo che l'equazione della superficie di 2ª specie F assuma qui (nelle ipotesi più generali) l'aspetto:

$$(7)\quad \begin{cases} Ax_2^2\,x_3^2\,(ax_2+bx_3)^2+x_1\,x_2\,(ax_2+bx_3)(cx_1+dx_3)\,(Dx_3^2+Ex_3\,x_4+\\ \qquad\qquad +\,Gx_4^2)+Hx_1^2\,x_3^2\,(cx_1+dx_3)^2=0\,. \end{cases}$$

Per convertire questa superficie in un cono cubico basta applicarle la trasformazione:

$$(8)\quad \begin{cases} \varrho x_1=(ady_2+by_4)\,y_3^2 & \qquad \sigma y_1=(cx_1+dx_3)\,x_1\,x_4\\ \varrho x_2=(bcy_3+dy_4)\,y_2\,y_3 & \qquad \sigma y_2=(ax_2+bx_3)\,x_2\,x_3\\ \varrho x_3=(y_4^2-acy_2\,y_3)\,y_3 & \text{ossia}\qquad \sigma y_3=(cx_1+dx_3)\,x_1\,x_3\\ \varrho x_4=(y_4^2-acy_2\,y_3)\,y_1 & \qquad \sigma y_4=(ax_2+bx_3)\,(cx_1+dx_3)\,x_3\,. \end{cases}$$

Si trova con ciò il cono F':

$$(9)\qquad Ay_2^2\,y_3+y_2\,(Dy_3^2+Ey_1\,y_3+Gy_1^2)+Hy_3^3=0$$

su cui il sistema $|C'|$, immagine del sistema $|C|$ delle sezioni piane di F, è tagliato dalle superficie cubiche:

$$\lambda_0\,y_3^2(ady_2+by_4)+\lambda_1\,y_2\,y_3\,(bcy_3+dy_4)+(\lambda_2\,y_3+\lambda_3\,y_1)(y_4^2-acy_2\,y_3)=0\,.$$

Queste superficie passano tutte per le rette: $y_2=y_4=0$, $y_1=y_3=0$ (che sta sul cono F'), $ady_2+by_4=bcy_3+dy_4=0$, $y_3=y_4=0$ e lungo quest'ultima toccano tutte il piano $y_3=0$. Di più si vede che esse hanno due punti doppi in $y_2=y_3=y_4=0$ e $y_1=y_3=y_4=0$ (quest'ultimo essendo biplanare con un piano osculatore fisso nel piano $y_3=0$, ivi tangente al cono F') e che la retta $y_3=y_4=0$ si stacca tre volte dalla linea d'intersezione di due qualunque di esse.

Si trae allora che $|C'|$ è un sistema di curve dell'8° ordine con un punto-base doppio nel vertice di F', con altri tre punti-base doppi (di cui uno cade in $y_1=y_3=y_4=0$ e altri due si avvicinano indefinitamente a $y_2=y_3=y_4=0$ lungo la direzione $y_2=y_4=0$) e due punti-base semplici (nei punti ove la retta $ady_2+by_4=bcy_3+dy_4=0$ incontra, fuori di $y_2=y_3=y_4=0$, il cono F').

6. *Caso particolare.*

Il caso cui qui si vuol alludere si presenta quando, per la superficie considerata nel n. precedente, delle due quadriche indicate in (A) con Φ_1' e Φ_2' e spezzate in due coppie di piani, *una* si riduce a un piano contato due volte. Allora l'equazione della superficie F, preso convenientemente il tetraedro fondamentale, è:

$$(10) \quad Ax_2^4x_3^2 + x_1x_2^2(cx_1 + dx_3)(Dx_3^2 + Ex_3x_4 + Gx_4^2) + Hx_1^2x_3^2(cx_1 + dx_3)^2 = 0$$

cioè si deduce dalla (7) facendovi $b = 0$ e $a = 1$.

Ma allora si vede subito che tutte le conclusioni precedenti non subiscono che cangiamenti lievi.

Così la F si muterà nel cono cubico F' rappresentato dalla (9) mediante la trasformazione:

$$(11) \quad \begin{cases} \varrho x_1 = dy_2\, y_3^2 \\ \varrho x_2 = dy_2\, y_3\, y_4 \\ \varrho x_3 = (y_4^2 - cy_2\, y_3)\, y_3 \\ \varrho x_4 = (y_4^2 - cy_2\, y_3)\, y_1 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{aligned} \sigma y_1 &= (cx_1 + dx_3)\, x_1\, x_4 \\ \sigma y_2 &= x_2^2\, x_3 \\ \sigma y_3 &= (cx_1 + dx_3)\, x_1\, x_3 \\ \sigma y_4 &= (cx_1 + dx_3)\, x_2\, x_3, \end{aligned}$$

e sopra F' il sistema $|C|$ delle sezioni piane di F sarà sempre rappresentato da un sistema $|C'|$ di curve dell'8^0 ordine; solo che questa volta $|C'|$ ha nel punto $y_2 = y_3 = y_4 = 0$, non solo due punti-base doppi infinitamente vicini, ma anche altri due punti-base semplici.

7. *Ipotesi* β); *prima alternativa.*

Ed ora passiamo a considerare le superficie di 2ª specie con le coniche situate nei piani di una sviluppabile non conica di 4ª classe.

Come risulta da (A), le superficie di questo tipo si dividono in due categorie secondo che sono irriducibili o no le loro ∞^1 superficie cubiche (sub-)aggiunte: limitiamoci per adesso alla considerazione della prima alternativa.

Allora le coppie di piani che contengono le coppie di coniche costituenti le aggiunte alle sezioni piane della superficie F, che si considera, si tagliano secondo le generatrici di una schiera rigata Σ di una quadrica Q non specializzata, e le superficie cubiche Φ

aggiunte ad F tagliano Q secondo una retta variabile in Σ e una quintica fissa formata da due direttrici di Σ, d_1 e d_2, e da una cubica gobba C^3 doppia per F e bisecata da d_1 e d_2. Le rette d_1 e d_2 sono poi quelle che, insieme con la linea doppia (del 7^0 ordine) di F, completano la linea base del fascio delle Φ.

Qui è opportuno osservare che se pure C^3 si spezza, non può mai accadere che una sua parte sia formata da d_1 o d_2.

E infatti o d_1 e d_2 sono distinte e allora tanto lungo d_1 quanto lungo d_2 una superficie Φ è toccata da un medesimo piano [1] (variabile da superficie a superficie) e quindi è impossibile che d_1 o d_2 si stacchi due volte dalla intersezione di Q con una superficie Φ; o d_1 e d_2 coincidono in una stessa retta d e allora le superficie Φ sono rigate cubiche con la direttrice doppia in d e d è per la superficie F una retta tacnodale (almeno), in ogni punto di d il piano tacnodale essendo il secondo piano osculatore in quel punto alla superficie Φ che ha come primo piano osculatore il piano ivi tangente alla quadrica Q [2]. Segue che se d facesse parte della C^3, l'intersezione di d con un piano qualunque dello spazio sarebbe, per la sezione di F giacente in esso, un punto doppio a cui sarebbero venuti infinitamente vicini altri due punti doppi *in direzioni distinte*: cioè d sarebbe almeno tripla per F, mentre ragionamenti analoghi ad altri già fatti in (A) assicurano che una superficie di 2^a specie del 6^0 ordine non può avere rette triple.

Ora, supposto che d_1 e d_2 siano distinte, può darsi che

β') C^3 si appoggi a d_1 in due punti distinti A_1 e B_1, e a d_2 in due punti distinti A_2 e B_2; oppure che

β'') C^3 tocchi d_1 in un punto $A_1 \equiv B_1$ e si appoggi a d_2 in due punti distinti A_2 e B_2 [3]; e analogamente se d_1 e d_2 coincidono in un'unica retta d, può darsi che

β''') C^3 si appoggi a d in due punti distinti A e B, oppure che

β^{IV}) C^3 tocchi d in un punto A.

Queste ipotesi, nel caso che C^3 sia irriducibile, furono già considerate in (A) (di cui abbiamo pure mantenute tutte le nota-

(1) Cfr. (A), n. 29.

(2) Questa osservazione non è esplicitamente fatta in (A), ma si giustifica subito ed è implicitamente contenuta in quanto ivi vien detto nei n. 34, 35 e segg.

(3) Per quel che è detto in (A) al n. 33 non può accadere che C^3 tocchi tanto la retta d_1 quanto la retta d_2.

zioni): quindi, in virtù dell'osservazione ora fatta, la prima alternativa dell'ipotesi β) sarà compiutamente discussa quando accanto ai casi β'), β''), β''') e β^{IV}) con la C^3 irriducibile si siano contemplati anche quelli con la C^3 variamente spezzata.

8. *Caso* β').

Qui [cfr. (A), n. 31] l'equazione della superficie F, scelto convenientemente il tetraedro fondamentale, può scriversi:

$$(12)\quad \begin{cases} A_{12}\,[(ca)\,x_2x_4+(cb)\,x_1x_4+(cd)\,x_1x_2]\,[(da)\,x_2x_3+(db)\,x_1x_3+(dc)\,x_1x_2]\,x_3x_4\,+ \\ A_{13}\,[(ca)\,x_2x_4+(cb)\,x_1x_4+(cd)\,x_1x_2]\,[(ab)\,x_3x_4+(ac)\,x_2x_4+(ad)\,x_2x_3]\,x_2x_4\,+ \\ A_{14}\,[(ca)\,x_2x_4+(cb)\,x_1x_4+(cd)\,x_1x_2]\,[(ba)\,x_3x_4+(bc)\,x_1x_4+(bd)\,x_1x_3]\,x_2x_3\,+ \\ A_{23}\,[(da)\,x_2x_3+(db)\,x_1x_3+(dc)\,x_1x_2]\,[(ab)\,x_3x_4+(ac)\,x_2x_4+(ad)\,x_2x_3]\,x_1x_4\,+ \\ A_{24}\,[(da)\,x_2x_3+(db)\,x_1x_3+(dc)\,x_1x_2]\,[(ba)\,x_3x_4+(bc)\,x_1x_4+(bd)\,x_1x_3]\,x_1x_3\,+ \\ A_{34}\,[(ab)\,x_3x_4+(ac)\,x_2x_4+(ad)\,x_2x_3]\,[(ba)\,x_3x_4+(bc)\,x_1x_4+(bd)\,x_1x_3]\,x_1x_2=0, \end{cases}$$

Ora si applichi a questa superficie la trasformazione rappresentata dalle formule:

$$(13)\quad \begin{cases} \varrho x_1=[(ca)\,y_3+(cd)\,y_4+(ad)\,y_2]\,y_1\,y_4 \\ \varrho x_2=[(db)\,y_1\,y_2+(dc)\,y_2\,y_4+(bc)\,y_1\,y_3]\,y_4 \\ \varrho x_3=[(db)\,y_1\,y_2+(dc)\,y_2\,y_4+(bc)\,y_1\,y_3]\,y_1 \\ \varrho x_4=(ca)\,y_3+(cd)\,y_4+(ad)\,y_2]\,y_1\,y_3 \\ \text{ossia} \\ \sigma y_1=[(da)\,x_2\,x_3+(db)\,x_3\,x_1+(dc)x_1\,x_2]\,x_1\,x_3 \\ \sigma y_2=[(ca)\,x_2\,x_4+(cb)\,x_4\,x_1+(cd)\,x_1\,x_2]\,x_2\,x_3 \\ \sigma y_3=[(da)\,x_2\,x_3+(db)\,x_3\,x_1+(dc)x_1\,x_2]\,x_2\,x_4 \\ \sigma y_4=[(da)\,x_2\,x_3+(db)\,x_3\,x_1+(dc)\,x_1\,x_2]\,x_1\,x_2\,; \end{cases}$$

essa si convertirà nel cono cubico F':

$$(14)\quad \begin{cases} A_{12}\,(cd)^2\,y_1\,y_2\,y_3+A_{13}\,(cd)\,[(ad)\,y_2+(ca)\,y_3]\,y_2\,y_3\,+ \\ +A_{14}(cd)\,[(bd)\,y_2+(cb)\,y_3]\,y_1\,y_2+A_{23}\,(cd)\,[(ad)\,y_2+(ca)\,y_3]\,y_1\,y_3\,+ \\ +A_{24}\,(cd)\,[(bd)\,y_2+(cb)\,y_3]y_1^2\,+ \\ +A_{34}\,[(ad)\,y_2+(ca)\,y_3]\,[(bd)\,y_2+(cb)\,y_3]\,y_1=0\,. \end{cases}$$

Su questo il sistema $|C'|$, immagine del sistema $|C|$ delle sezioni piane di F, vien tagliato da superficie cubiche, le quali passano per la retta $y_1 = y_2 = 0$, per la conica k^2 secondo cui il piano:

$$(ca)\,y_3 + (cd)\,y_4 + (ad)\,y_2 = 0$$

taglia la quadrica

$$(db)\,y_1\,y_2 + (dc)\,y_2\,y_4 + (bc)\,y_1\,y_3 = 0\,,$$

e per la retta $y_1 = y_4 = 0$, toccando *lungo* quest'ultima il piano $y_1 = 0$.

Aggiungasi che esse hanno tutte dei punti doppi in $y_1 = y_3 = y_4 = 0$ e $y_1 = y_4 = (ad)\,y_2 + (ca)\,y_3 = 0$ e che nel punto $y_2 = y_3 = y_4 = 0$ toccano il piano $(db)\,y_2 + (bc)\,y_3 = 0$ ivi tangente al cono F'; di più la conica k^2 passa per il punto $y_1 = y_4 = (ad)\,y_2 + (ca)\,y_3 = 0$, tocca in $y_2 = y_3 = y_4 = 0$ il cono F' e si appoggia alla retta $y_1 = y_2 = 0$.

Segue allora che $|C'|$ è un sistema di curve dell'8^0 ordine, con un punto-base doppio nel vertice di F', con altri tre punti-base doppi nei punti $y_2 = y_3 = y_4 = 0$, $y_1 = y_3 = y_4 = 0$ e $y_1 = y_4 = (ad)\,y_2 + (ca)\,y_3 = 0$, e due punti-base semplici nelle intersezioni di k^2 con F' che non cadono nei punti nominati più sopra.

9. *Casi particolari.*

In (A) per scrivere l'equazione della superficie considerata nel n. precedente si suppose che fossero distinti i quattro vertici del quadrangolo gobbo $A_1\,A_2\,B_1\,B_2$ e che inoltre fosse irriducibile la C^3 doppia della superficie. Ora manteniamo la prima ipotesi, ma togliamo la seconda, cioè supponiamo che C^3 si spezzi. Lo spezzamento potrà avvenire

β_1') in una conica (irriducibile) e in una retta, oppure

β_2') in tre rette.

Entrambe queste alternative si esaminano facilmente; poichè badando al fatto che la C^3 (omai spezzata) deve contenere i quattro vertici del quadrangolo gobbo e che nessuna delle parti di C^3 può coincidere con d_1 o con d_2, si conclude subito che nell'alternativa β_1') la retta che fa parte di C^3 coincide con uno dei lati del quadrangolo gobbo, e sia $A_2\,B_1$; e che nell'alternativa β_2') delle tre rette che fan parte di C^3 due coincidono con due lati opposti del quadrangolo in discorso, per es. con $A_2\,B_1$ e $A_1\,B_2$, mentre la terza si appoggia a ciascuno di questi lati in un punto.

Analiticamente, tenendo le notazioni di (A) e del n. precedente, si vede subito che l'alternativa $\beta_1')$ corrisponde al supporre $(ad) = 0$, e che la $\beta_2')$ corrisponde al supporre $(ad) = (bc) = 0$. Ora nessuna delle considerazioni fatte qui al n. 8 diventa illusoria, quando vi si faccia $(ad) = 0$ oppure $(ad) = (bc) = 0$, quindi la discussione dei casi particolari $\beta_1')$ e $\beta_2')$ non presenta nessuna difficoltà.

Si trova così che tanto nell'ipotesi $\beta_1')$ quanto nell'ipotesi $\beta_2')$ la superficie F è riducibile a un cono cubico (ellittico), le immagini delle sezioni piane essendo curve dell'8 ordine con un punto doppio nel vertice del cono, con altri tre punti-base doppi, di cui due sono infinitamente vicini, e due punti-base semplici.

Quanto alla linea doppia di F, oltre che dai lati del quadrangolo gobbo $A_1\, A_2\, B_1\, B_2$, essa è costituita:

nell'ipotesi $\beta_1')$ da una conica, passante pei due vertici A_1, B_2 del quadrangolo e appoggiata al lato $A_2\, B_1$, e da *una retta infinitamente vicina ad $A_2\, B_1$ nel piano che passa per $A_2\, B_1$ e tocca la conica*;

nell'ipotesi $\beta_2')$ da due rette, di cui una è infinitamente vicina ad $A_2\, B_1$, l'altra ad $A_1\, B_2$ e infine da una retta ulteriore secondo la quale si intersecano *i due piani che contengono le due coppie di rette infinitamente vicine della superficie.*

10. *Caso $\beta'')$.*

Questa volta l'equazione della superficie F è, rispetto a un opportuno tetraedro fondamentale [cfr. (A), n 32]:

$$
(15)\quad \left\{
\begin{aligned}
& A_{11}\,[(a_1 - a_0)\,x_2\,x_4 + (b_1 - b_0)\,x_3\,x_4 + (c_1 - c_0)\,x_2\,x_3]^2\,x_2\,x_2 + \\
& 2A_{12}\,[(a_1 - a_0)\,x_2\,x_4 + (b_1 - b_0)\,x_3\,x_4 + (c_1 - c_0)\,x_2\,x_3] \times \\
& \qquad\qquad [(a_0 - a_1)\,x_1\,x_2 + (ab)\,x_4^2 + (ac)\,x_2\,x_4]\,x_3\,x_4 + \\
& 2A_{13}\,[(a_1 - a_0)\,x_2\,x_4 + (b_1 - b_0)\,x_3\,x_4 + (c_1 - c_0)\,x_2\,x_3] \times \\
& \qquad\qquad [(b_0 - b_1)\,x_1\,x_3 + (ba)\,x_4^2 + (bc)\,x_3\,x_4]\,x_2\,x_4 + \\
& 2A_{23}\,[(a_0 - a_1)\,x_1\,x_2 + (ab)\,x_4^2 + (ac)\,x_2\,x_4] \times \\
& \qquad\qquad [(b_0 - b_1)\,x_1\,x_3 + (ba)\,x_4^2 + (bc)\,x_3\,x_4]\,x_4^2 + \\
& 2A_{24}\,[(a_0 - a_1)\,x_1\,x_2 + (ab)\,x_4^2 + (ac)\,x_2\,x_4] \times \\
& \qquad\qquad [(c_0 - c_1)\,x_1\,x_2\,x_3 + (ca)\,x_2\,x_4^2 + (cb)\,x_3\,x_4^2]\,x_3 + \\
& 2A_{34}\,[(b_0 - b_1)\,x_1\,x_3 + (ba)\,x_4^2 + (bc)\,x_3\,x_4] \times \\
& \qquad\qquad [(c_0 - c_1)\,x_1\,x_2\,x_3 + (ca)\,x_2\,x_4^2 + (cb)\,x_3\,x_4^2]\,x_2 = 0\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Applichiamole la trasformazione definita dalle uguaglianze:

$$(16)\quad \begin{cases} \varrho x_1 = (a_0 - a_1)\, y_2\, y_3\, y_4 + (b_0 - b_1)\, y_1^2\, y_4 + (c_0 - c_1)\, y_1\, y_2\, y_4 - \\ \qquad\qquad - (ab)\, y_1^2\, y_3 - (ac)\, y_1\, y_2\, y_3 \\ \varrho x_2 = (a_0 - a_1)\, y_2^2\, y_3 \\ \varrho x_3 = (a_0 - a_1)\, y_1^2\, y_2 \\ \varrho x_4 = (a_0 - a_1)\, y_1\, y_2\, y_3 \end{cases}$$

ossia da

$$(16)\quad \begin{cases} \sigma y_1 = [(a_0 - a_1)\, x_2\, x_4 + (b_0 - b_1)\, x_3\, x_4 + (c_0 - c_1)\, x_2\, x_3]\, x_3\, x_4 \\ \sigma y_2 = [(a_0 - a_1)\, x_2\, x_4 + (b_0 - b_1)\, x_3\, x_4 + (c_0 - c_1)\, x_2\, x_3]\, x_2\, x_3 \\ \sigma y_3 = [(a_0 - a_1)\, x_2\, x_4 + (b_0 - b_1)\, x_3\, x_4 + (c_0 - c_1)\, x_2\, x_3]\, x_4^2 \\ \sigma y_4 = [(a_0 - a_1)\, x_1\, x_2 + (ab)\, x_4^2 + (ac)\, x_2]\, x_3\, x_4\,; \end{cases}$$

e così troviamo che essa si converte nel cono cubico F':

$$(17)\quad \begin{cases} A_{11}\,(a_0 - a_1)^2\, y_2^2\, y_3 - 2A_{12}\,(a_0 - a_1)^2\, y_2\, y_3\, y_4 + \\ \qquad + 2A_{13}\,(a_0 - a_1)\,[(ab)\, y_3 + (b_1 - b_0)\, y_4]\, y_2\, y_3 - \\ \qquad - 2A_{23}\,(a_0 - a_1)\,[(ab)\, y_3 + (b_1 - b_0)\, y_4]\, y_3\, y_4 - \\ \qquad - 2A_{24}\,(a_0 - a_1)\,[(ac)\, y_3 + (c_1 - c_0)\, y_4]\, y_2\, y_4 + \\ + 2A_{34}\,[(ab)\, y_3 + (b_1 - b_0)\, y_4]\,[(ac)\, y_3 + (c_1 - c_0)\, y_4]\, y_2 = 0\,; \end{cases}$$

sul quale il sistema lineare $|\,C'\,|$ corrispondente al sistema $|\,C\,|$ delle sezioni piane di F vien secato da superficie cubiche che passano per la retta $y_1 = y_3 = 0$, toccano il piano $y_2 = 0$ lungo la retta $y_1 = y_2 = 0$ (che si stacca tre volte dalla linea d'intersezione di due qualunque di esse) e passano per la retta $y_2 = (ab)\, y_3 + (b_1 - - b_0)\, y_4 = 0$, situata sul cono F'. Di più, hanno un punto doppio in $y_1 = y_2 = y_4 = 0$ e un altro punto doppio in $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ col cono osculatore fisso:

$$(a_0 - a_1)\, y_2\, y_3 + (b_0 - b_1)\, y_1^2 + (c_0 - c_1)\, y_1\, y_2 = 0\,;$$

mentre nel punto $y_1 = y_3 = y_4 = 0$ esse toccan tutte il piano $y_3 = 0$ che è ivi tangente pure al cono cubico F'.

Se ne trae che $|C'|$ è un sistema di curve dell'8^0 ordine con un punto-base doppio nel vertice di F', con altri tre punti-base doppi nei punti $y_1 = y_2 = y_4 = 0$; $y_1 = y_2 = y_3 = 0$; $y_1 = y_3 = y_4 = 0$ e con due punti-base semplici avvicinatisi indefinitamente in direzioni generalmente distinte al punto $y_1 = y_2 = y_3 = 0$.

11. *Caso particolare.*

Manteniamo ora tutte le ipotesi del n. precedente e del n. 32 di (A) prescindendo soltanto da quella che riguarda l'irriducibilità di C^3.

Si vede allora che l'unico caso possibile è quello in cui C^3 si spezza in una retta coincidente con $A_1 A_2$ (o $A_1 B_2$) e in una conica passante per A_1 e B_2 (o A_1 e A_2). Esso corrisponde al supporre nei calcoli del n. 32 di (A) $a_0 - a_1 = 0$ oppure $b_0 - b_1 = 0$.

Se supponiamo $b_0 - b_1 = 0$ anche i calcoli del n. precedente continuano a sussistere tutti salvo leggeri mutamenti; e si trova sempre che F si può rappresentare sopra un cono cubico (ellittico) mediante un sistema di curve dell'8^0 ordine dello stesso tipo di quello incontrato più sopra.

Quanto alla linea doppia di F essa è formata da una conica per A_1 e A_2, da due rette doppie infinitamente vicine ad $A_1 A_2$ e da tre rette doppie infinitamente vicine ad $A_1 B_2$.

12. *Caso* $\beta''')$.

Qui, perchè risulti più rapida la discussione dei casi particolari che seguono nel n. successivo giova scrivere l'equazione di F in modo leggermente diverso da quello che si trova in (A) al n. 35.

Ivi comparivano due coni quadrici, dei quali l'uno era rappresentato da

$$x_3^2 + a x_2 x_4 = 0,$$

l'altro da

$$x_4^2 + c x_1 x_3 = 0.$$

Ebbene scriviamo le equazioni di questi due coni nella forma:

$$l x_3^2 + a x_2 x_4 = 0, \quad m x_4^2 + c x_1 x_3 = 0;$$

allora l'equazione di F assume l'aspetto voluto:

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} & A_{11} c^2 x_3^2 (m x_4^2 + c x_1 x_3)^2 - \\ & 2A_{12}\, a c x_3 x_4 (m x_4^2 + c x_1 x_3)(l x_3^2 + a x_2 x_4) + A_{22} a^2 x_4^2 (l x_3^2 + a x_2 x_4)^2 + \\ & 2A_{13}\, c x_4 (m x_4^2 + c x_1 x_5)(l m x_3^2 x_4 + a l x_2 x_3^2 + a^2 x_2^2 x_4 - a c\, x_1 x_2 x_3) + \end{aligned} \right.$$

$$(18)\quad \begin{cases} 2A_{24}\,(ax_3\,(lx_3^2+ax_2\,x_4)\,(lmx_3\,x_4^2+mcx_1x_4^2+c^2x_1^2x_3-acx_1x_2x_4)\,- \\ 2A_{34}\,(lmx_3^2\,x_4+alx_2\,x_3^2+a^2\,x_2^2\,x_4-acx_1\,x_2\,x_3)\times \\ \qquad\qquad (lmx_3\,x_4^2+mcx_1\,x_4^2+c^2\,x_1^2\,x_3-acx_1\,x_2\,x_4)=0\,. \end{cases}$$

Adesso applichiamo alla F la trasformazione cremoniana:

$$(19)\quad \begin{cases} \varrho x_1=(ly_3-cy_1)\,y_1\,y_4 \\ \varrho x_2=(my_4^2-ay_2\,y_3)\,y_2 \\ \varrho x_3=(my_4^2-ay_2\,y_3)\,y_4 \\ \varrho x_4=(ly_3-cy_1)\,y_4^2 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{aligned} \sigma y_1&=(lx_3^2+ax_2\,x_4)\,x_1\,x_3 \\ \sigma y_2&=(lx_3^2+ax_2\,x_4)\,x_2\,x_4 \\ \sigma y_3&=(mx_4^2+cx_1\,x_3)\,x_3^2 \\ \sigma y_4&=(lx_3^2+ax_2\,x_4)\,x_3\,x_4: \end{aligned}$$

essa andrà nel cono cubico F':

$$(20)\quad \begin{cases} A_{11}c^2y_3^2y_4-2A_{12}\,acy_3y_4^2+A_{22}a^2y_4^3+2A_{13}c\,(ly_3+ay_2-cy_1)y_3y_4+ \\ \qquad +2A_{24}\,a\,(my_4^2-ay_2\,y_3+cy_1\,y_3)\,y_4- \\ \qquad -2A_{34}\,(ly_3+ay_2-cy_1)\,(my_4^2-ay_2\,y_3+cy_1\,y_3)=0\,. \end{cases}$$

Il sistema $|\,C\,|$ delle sezioni piane di F si muta nel sistema $|\,C'\,|$ tagliato sul cono F' da superficie cubiche che passano per la retta $y_3=y_4=0$ (situata sul cono F') e per la conica k^2:

$$ly_3-cy_1=my_4^2-ay_2\,y_3=0\,;$$

e inoltre toccano il piano $y_4=0$ lungo la retta $y_2=y_4=0$.

Aggiungasi che esse hanno un punto doppio in $y_1=y_2=y_4=0$ e un altro in $y_2=y_4=ly_3-cy_1=0$; e che nel punto $y_1=y_3==y_4=0$ toccano tutte il piano $y_3=0$, il quale è ivi tangente anche al cono F'. Inoltre la conica k^2 incontra F' nel punto $y_2==y_4=ly_3-cy_1=0$ e lo tocca secondo un contatto tripunto in $y_1=y_3=y_4=0$; quindi la conica ed F' non hanno che altri due soli punti ulteriori comuni.

Da tutto ciò segue che le curve di $|\,C'\,|$ sono sempre dell'ordine 8, passano doppiamente per il vertice di F' e hanno altri tre punti-base doppi e due punti-base semplici; questi ultimi essendo forniti dalle ulteriori intersezioni nominate più sopra della conica k^2

e del cono F' e quelli coincidendo ordinatamente coi punti

$$y_1 = y_2 = y_4 = 0\,, \quad y_2 = y_4 = ly_3 - cy_1 = 0\,, \quad y_1 = y_3 = y_4 = 0\ [1]\,.$$

13. *Casi particolari.*

Per trovare l'equazione della superficie considerata nel n. precedente si suppose in (A) che la C^3 doppia fosse irriducibile e che essa incontrasse in due punti distinti la retta d. Ebbene manteniamo questa seconda ipotesi, ma prescindiamo dalla prima.

Le due rette indicate in (A) con a e b continueranno ad esser distinte e sghembe fra di loro e se la C^3 si spezza in una retta e in una conica, quella dovrà coincidere con a (o b) e questa dovrà toccare b (o a) nel suo punto d'appoggio con d; mentre se la C^3 si spezza in tre rette, di queste, due coincideranno con a e b, e la terza si appoggerà ad a e b in punti diversi da quelli ove esse si appoggiano a d. Notisi poi che appena la nostra superficie viene ad avere due rette doppie infinitamente vicine in a (o in b), necessariamente queste due rette non sono da considerarsi come situate nel piano da (o db), giacchè altrimenti le rigate Φ non sarebbero irriducibili.

Si hanno dunque due casi particolari distinti: si ha il primo, $\beta_1''')$, quando la C^3 si spezza in una retta e in una conica (irriducibile), si ha il secondo, $\beta_2''')$, quando la C^3 si spezza in tre rette.

Analiticamente, si ha il caso $\beta_1''')$ quando nelle equazioni e nei calcoli del n. precedente si fa $m=0$ (ed $l \neq 0$), oppure $l=0$ (ed $m \neq 0$); si ha invece il caso $\beta_2''')$ quando vi si fa $l=m=0$. Si vede con ciò che tutte le conclusioni cui si è pervenuti nel n. precedente continuano a sussistere salvo leggerissime modificazioni.

In particolare si noti come l'ipotesi $\beta_2''')$ conduca a *una superficie F con due rette doppie infinitamente vicine, fra loro sghembe, in d, due rette doppie infinitamente vicine in a e due rette doppie infinitamente vicine in b, quest'ultime due coppie di rette doppie infinitamente vicine essendo contenute in due piani che si intersecano in una ulteriore (ed ultima) retta doppia s.* Le aggiunte Φ sono poi in questo caso delle rigate cubiche con la direttrice doppia in d, la direttrice semplice in s e le generatrici singolari in a e b.

[1] Per persuadersi che quest'ultimo è un punto-base doppio per $|C'|$ si pensi che i punti della conica secondo cui F è tagliata, fuori delle rette doppie, dal piano $x_3=0$, hanno tutti per omologo sul cono F' il punto $y_1=y_3=y_4=0$.

14. *Caso* β^{IV}).

Qui l'equazione della superficie F [cfr. (A), n. 37] è data da:

$$
(21)\quad \left\{
\begin{aligned}
&A_{11}a^2h^2R^2x_3^2-2A_{12}ah^2(cQ-P)Rx_3+A_{22}h^2(cQ-P)^2+\\
&+2A_{14}ahR\{a(g-c)x_3^3x_1+2h^2x_3^2x_2^2+h[fx_3^2+3(g-c)x_3x_4+3hx_4^2]x_2x_3+\\
&+fx_3^2x_4[hx_4+(g-c)x_3]+x_4^2[hx_4+(g-c)x_3]^2\}+\\
&+2A_{24}h(cQ-P)[(g-c)(cQ-P)-fhQ]+2A_{23}\{[(g-c)(cQ-P)-fhQ]^2+\\
&+2h^2fR^2T-hT[a^2x_3^2x_1^2-\{a(g-c)x_3^2x_2-4ahx_2x_3x_4-\\
&-2afx_3^2x_4-a(g-c)x_3x_4^2-2ahx_4^3\}x_1-2h^2x_3x_2^3-\\
&-h\{3(g-c)x_3+hx_4\}x_4x_2^2+\{4hf-(g-c)^2\}x_2x_3x_4^2-f(g-c)x_2x_3^2x_4-\\
&-h(g-c)x_2x_4^3-fx_3^2x_4^2+f(g-c)x_3x_4^3+2hfx_4^4]\}=0
\end{aligned}
\right.
$$

dove

$$P = ax_3^2\,x_1 + x_3\,(cx_3 + 2hx_4)\,x_2 + fx_3^2\,x_4 + gx_3\,x_4^2 + hx_4^3,$$

$$Q = x_3\,R = x_3\,(x_2\,x_3 + x_4^2)\,,$$

$$T = hx_4^2 + 2hx_2\,x_3 + (g-c)\,x_3\,x_4\,.$$

Ora si applichi a codesta superficie la trasformazione cremoniana rappresentata dalle uguaglianze

$$
(22)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\varrho x_1 = hy_2\,y_1^2 - [2hfy_3 + (g-c)\,y_2 + 2hy_4]\,y_1\,y_3 + y_2\,y_3\,y_4\\
&\varrho x_2 = ay_3\,\{y_3\,[y_4 - (g-c)\,y_1] - hy_1^2\}\\
&\varrho x_3 = 2ahy_3^3\\
&\varrho x_4 = 2ahy_3^2\,y_1\,;\\
&\text{ossia}\\
&\sigma y_1 = x_3\,x_4\,(x_2\,x_3 + x_4^2)\\
&\sigma y_2 = ax_1\,x_3^2 + fx_3^2\,x_4 + (g-c)\,x_3\,x_4^2 - hx_4^3 + 2hx_4\,(x_2\,x_3 + x_4^2)\\
&\sigma y_3 = x_3^2\,(x_2\,x_3 + x_4^2)\\
&\sigma y_4 = (x_2\,x_3 + x_4^2)\,[hx_4^2 + 2hx_2\,x_3 + (g-c)\,x_3\,x_4]\,;
\end{aligned}
\right.
$$

essa si convertirà nel cono cubico F'

$$(23)\quad \begin{cases} A_{11}a^2h^2y_3^3+2A_{12}ah^2y_2y_3^2+A_{22}h^2y_2^2y_3+ \\ \quad +2A_{14}ahy_3^2[hy_4+(g-c)y_2+hfy_3]+2A_{24}hy_2y_3[(g-c)y_2+fhy_3]+ \\ \quad +2A_{23}\{y_3[(g-c)y_2+fhy_3]^2+2h^2fy_3^2y_4-hy_4[y_2^2-(g-c)y_2y_3-hy_3y_4]\}=0. \end{cases}$$

Il sistema $|C'|$ di F', corrispondente al sistema $|C|$ delle sezioni piane di F, è staccato su F' da superficie cubiche le quali passano tutte per la retta $y_2=y_3=0$ (situata sul cono F') e toccano lungo la retta $y_1=y_3=0$ il piano $y_3=0$ (tangente ad F' lungo la generatrice $y_2=y_3=0$). Di più esse hanno un punto doppio in $y_1=y_3=y_4=0$ col cono osculatore fisso:

$$hy_1^2+(g-c)\,y_1\,y_3+y_3\,y_4=0,$$

e un punto doppio biplanare in $y_1=y_2=y_3=0$ con uno dei piani osculatori nel piano fisso $y_3=0$.

Segue che le C' sono curve dell'8º ordine, passanti due volte per il vertice di F', con un punto doppio in $y_1=y_3=y_4=0$ e quivi le tangenti fisse, e infine con un punto doppio in $y_1=y_2=$ $=y_3=0$. Ma è facile accorgersi che in questo punto le C' hanno tutte un tacnodo con la tangente tacnodale nella retta m rappresentata dalle equazioni:

$$y_3=0, \qquad y_2-hy_1=0.$$

La maniera più semplice per persuadersene, dopo aver notato che le C' hanno un'unica tangente in $y_1=y_2=y_3=0$, consiste nell'osservare che le sezioni del cono F' coi piani del fascio m hanno per immagini su F le curve segnatevi dal fascio di quadriche:

$$ax_1\,x_3+hx_2\,x_4+fx_3\,x_4+(g-c)\,x_4^2+\mu\,(x_2\,x_3+x_4^2)=0,$$

quadriche che passano tutte per la cubica doppia di F e per *una* delle sue quattro rette doppie infinitamente vicine. Ma allora codeste curve sono quartiche sghembe (ellittiche); il che significa che ogni curva C' è tagliata da un piano per m soltanto in quattro punti, fuori di m. Segue che m, poichè non può incontrare una C' fuori di $y_1=y_2=y_3=0$, ha quivi un contatto quadripunto con ogni curva C'.

Ciò basta per giustificare la nostra asserzione.

Si conclude che $|C'|$ ha, al solito (fuori del vertice di F') tre punti-base doppi, di cui due sono infinitamente vicini fra loro, e due punti-base semplici, avvicinatisi indefinitamente, in direzioni generalmente distinte, al punto doppio che è a distanza finita dagli altri due.

Con questo, è esaurito l'esame della prima alternativa a cui dà luogo l'ipotesi β), poichè, come si vede facilmente, il caso β^{IV}) non può verificarsi altro che con una C^3 irriducibile.

15. *Ipotesi* β); *seconda alternativa.*

Passiamo dunque alla seconda alternativa, cioè supponiamo che tutte le superficie Φ aggiunte ad F siano riducibili.

Allora la curva doppia di F, come risulta da (A), è generalmente composta di una cubica piana nodale e di quattro rette secondo cui si intersecano ulteriormente due coppie di piani uscenti dalle sue tangenti nodali, e l'equazione di una tale superficie può scriversi nel modo che è indicato in (A) al n. 40 [1]. Ma qui, per poter considerare insieme il caso generale e uno dei casi particolari che sarà notato nel n. successivo, conviene scriverla in forma leggermente diversa. Per questo, al posto della prima delle (61) di (A) si sostituisca l'equazione

$$x_3 (cx_1 - x_3) = 0$$

e, in conformità di ciò, si sostituisca l'equazione

$$A_{11} \xi_1 (\xi_1 + c\xi_3 + \xi_4) + 2A_{12} \xi_1 \xi_2 + A_{22} \xi_2^2 + 2A_{23} \xi_2 \xi_3 +$$

$$+ 2A_{24} \xi_2 \xi_4 + 2A_{34} \xi_3 \xi_4 = 0$$

all'altra che ivi si aggregava alla (62) per rappresentare analiticamente la ∞^1 dei piani contenenti le coniche di F. Allora l'equazione

[1] A questo proposito si osservi che nell'equazione di F scritta in (A) al n. 40 al termine che ha per coefficiente $2A_{24}$ è stato soppresso, per errore, il fattore $(x_1 - x_3)$.

di F assume l'aspetto:

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned}
&A_{11}k^2(-a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4)^2(cx_1-x_3)(x_1-x_4)x_3x_4-\\
&-2A_{11}k[k^2a_4x_4(x_1-x_4)^2+a_3x_3(cx_1-x_3)^2](-a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4)x_3x_4+\\
&+k^2[2A_{12}a_2-A_{11}(ca_3+a_4)](-a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4)(cx_1-x_3)(x_1-x_4)x_1x_3x_4-\\
&-k[2A_{12}a_2-A_{11}(ca_3+a_4)][k^2a_4x_4(x_1-x_4)^2+a_3x_3(cx_1-x_3)^2]x_1x_3x_4+\\
&+A_{11}k[k^2a_4cx_4^2(x_1-x_4)^2+a_3x_3^2(cx_1-x_3)^2](-a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4)x_1+\\
&+A_{22}k^2a_2^2(cx_1-x_3)(x_1-x_4)x_1^2x_3x_4-\\
&-A_{11}[k^2a_4x_4(x_1-x_4)^2+a_3x_3(cx_1-x_3)^2][k^2a_4x_4^2(x_1-x_4)+a_3x_3^2(cx_1-x_3)]+\\
&+2k\{A_{23}ka_2(x_1-x_4)x_4-A_{24}a_2(cx_1-x_3)x_3-\\
&-A_{34}[ka_4x_4(x_1-x_4)-a_3x_3(cx_1-x_3)]\}[ka_4x_4(x_1-x_4)-a_3x_3(cx_1-x_3)]x_1^2=0.
\end{aligned}\right.$$

Ebbene si applichi a questa superficie la trasformazione cremoniana rappresentata dalle uguaglianze:

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned}
&\varrho x_1=ky_2(y_1y_2-y_3^2)\\
&\varrho x_2=\frac{1}{a_2}\left[a_3y_2(y_1-cy_3)(y_1+ky_3)+ka_4y_2(cy_2-y_3)(ky_2+y_3)-y_4(y_1y_2-y_3^2)\right]\\
&\varrho x_3=ky_2y_3(y_1-cy_3)\\
&\varrho x_4=ky_2y_3(cy_2-y_3)\\
&\text{ossia}\\
&\sigma y_1=x_1x_3^2(cx_1-x_3)\\
&\sigma y_2=x_1x_3x_4(x_1-x_4)\\
&\sigma y_3=x_1x_3^2x_4\\
&\sigma y_4=(x_1-x_4)[a_3cx_3^2x_1+k^2a_4x_4^2x_1+kx_3x_4(-a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4)-\\
&\qquad\qquad -(k^2a_4x_4^3+a_3x_3^3)]\,;
\end{aligned}\right.$$

essa si convertirà nel cono cubico F':

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned}
&\{[2A_{12}a_2-A_{11}(ca_3+a_4)]ky_2+A_{11}y_4\}(-a_3y_1^2-k^2a_4cy_2^2+y_1y_4)+\\
&+A_{22}k^2a_2^2y_1y_2^2+2ky_2(ka_4y_3-a_3y_1)[k(A_{23}a_2-A_{34}a_4)y_2+(A_{34}a_3-A_{24}a_2)y_1]=0.
\end{aligned}\right.$$

Il sistema lineare $|C'|$ di F' corrispondente al sistema $|C|$ delle sezioni piane di F è staccato su F' da superficie cubiche le quali passano per le rette: $y_2 = y_4 = 0$, $y_1 - cy_3 = cy_2 - y_3 = 0$ e $y_2 = y_3 = 0$, e lungo quest'ultima toccano tutte il piano $y_2 = 0$ (¹). Notisi inoltre che esse hanno un punto doppio in $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ col cono osculatore fisso

$$y_1 y_2 - y_3^2 = 0$$

che tocca il piano ivi tangente ad F', e un altro punto doppio in

$$y_2 = y_3 = y_4 - a_3 y_1 = 0.$$

Segue che $|C'|$ è un sistema di curve dell'8⁰ ordine, passanti due volte per il vertice di F', con altri tre punti-base doppi e due punti-base semplici. Dei punti-base doppi, distinti dal vertice di F', uno cade in $y_2 = y_3 = y_4 - a_3 y_1 = 0$, un altro coincide con $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ e il terzo è infinitamente vicino a questo nella direzione $y_1 = y_3 = 0$ (²); i punti-base semplici si trovano poi nelle intersezioni del cono F' con la retta $y_1 - cy_3 = cy_2 - y_3 = 0$ diverse dal punto $y_1 = y_2 = y_3 = 0$.

16. *Casi particolari.*

Per veder chiaro quali particolarità possono presentarsi per la superficie F studiata nel n. precedente, si ricordi da (A) che, se si dice Ψ la sviluppabile costituita dai piani delle ∞^1 coniche di F, le superficie cubiche Φ aggiunte ad F si spezzano in un piano ω, che contiene una, K, delle quattro coniche inscritte in Ψ, e in un fascio di coni quadrici aventi il vertice in un punto O di ω e passanti per le quattro rette secondo cui si intersecano le coppie di piani di Ψ uscenti dai raggi del fascio (O, ω) che toccano K.

Ora, o

$\bar\beta'$) il punto O non è situato su K, oppure

$\bar\beta''$) il punto O giace su K.

(¹) Notisi che quest'ultima si stacca tre volte dalla linea di intersezione di due qualunque delle superficie cubiche in discorso.

(²) Si osservi infatti che le C' hanno in $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ la sola tangente $y_1 = y_3 = 0$ e che i piani per questa retta secano le C' in quattro soli punti variabili, fuori di $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, poichè essi secano il cono F' nelle immagini delle quartiche staccate da F per mezzo dei piani del fascio

$$\lambda (cy_1 - y_3) + \mu y_4 = 0.$$

Se O è fuori di K, i piani di Ψ uscenti dalle due rette del fascio (O, ω) che toccano K possono essere tutti distinti, e allora si ha il caso più generale possibile che appunto è stato contemplato nel n. precedente; oppure di quelle due coppie di piani *una sola* [cfr. (A), n. 41] si compone di due piani coincidenti e allora si ha un primo caso particolare che indicheremo con $\overline{\beta}_1')$.

Se O giace su K, il fascio di coni quadrici che insieme con ω dà il fascio delle superficie Φ aggiunte ad F non contiene più che un cono spezzato in due piani di Ψ, questo cono dovendo contare per due fra i coni degeneri del fascio; i due piani di Ψ ora nominati possono poi esser distinti o coincidenti e quindi si avranno altri due casi particolari, che designeremo rispettivamente con $\overline{\beta}_1'')$ e $\overline{\beta}_2'')$.

17. *Caso* $\overline{\beta}_1')$.

Per questo non c'è bisogno di spender molte parole. Esso si presenta quando nei calcoli e nelle considerazioni del n^0 15 si supponga $c = 0$: e con ciò tutte le cose dette non subiscono che cangiamenti lievi. Notisi che questa volta F ha sempre una cubica piana doppia dotata di un nodo, ma delle sue quattro rette doppie soltanto due sono distinte.

18. *Caso* $\overline{\beta_1''})$.

Qui il punto O giace su K e i due piani distinti di Ψ passanti per la retta l tangente a K in O assorbono due dei tre coni degeneri del solito fascio; per conseguenza questo fascio è costituito da coni col vertice in O che toccano lungo l un piano fisso δ, e il terzo cono degenere del fascio è dato da δ e da un piano ε che passa per O ma non per l.

Per trovare l'equazione della superficie F che corrisponde a queste ipotesi particolari scegliamo come tetraedro fondamentale 1 2 3 4 quello che ha il vertice 2 nel punto O, il vertice 3 nel punto d'incontro di K con ε, diverso da O, il vertice 4 nel polo di 23 rispetto a K e il vertice 1 in un punto generico dell'intersezione di ε con uno dei piani di Ψ uscenti da l. Allora disponendo ancora del punto unità può farsi in modo che l'equazione di K (considerata come quadrica-inviluppo) sia

$$\xi_4^2 - \xi_2 \xi_3 = 0 \tag{27}$$

o, in forma parametrica,

$$\xi_2 = \lambda^2, \quad \xi_3 = \mu^2, \quad \xi_4 = \lambda\mu \tag{28}$$

e quella del fascio di coni quadrici sia:

$$\nu x_3 (x_1 - x_3) + \varrho x_4 (x_1 + k x_3) = 0, \tag{29}$$

dove

$$x_3 = 0 \quad \text{e} \quad x_1 - x_3 = 0$$

sono le equazioni dei due piani di Ψ uscenti da l; e

$$x_4 = 0 \quad \text{e} \quad x_1 + k x_3 = 0$$

sono rispettivamente le equazioni di ε e δ.

Con una discussione analitica che non presenta difficoltà di sorta e che procede in modo perfettamente analogo ad altre già eseguite in (A), si vede che l'equazione di una delle ∞^1 quadriche inviluppo inscritte in Ψ (diversa da K) deve essere del tipo:

$$2A_{13}(\xi_1 + \xi_3)\xi_1 + 2A_{12}\xi_1\xi_2 + A_{22}\xi_2^2 + 2A_{23}\xi_2\xi_3 + 2A_{24}\xi_2\xi_4 + A_{44}\xi_4^2 = 0; \tag{30}$$

che la proiettività indotta fra i coni del fascio (29) e le tangenti della conica K dalle coniche di F [cfr. (A) n. 40] deve tradursi fra i parametri $\frac{\varrho}{\nu}$ e $\frac{\lambda}{\mu}$ in una equazione della forma

$$a\varrho\lambda - b(\varrho\mu + \lambda\nu) = 0$$

e che nella (29) si deve supporre $k = -2$ [1].

Con tutto ciò si arriva per la superficie F all'equazione:

$$\left\{\begin{aligned} &-2A_{13}a[a(x_1 - x_3)x_3 - b(x_1 - 2x_3)x_4]^3 + b^2[a(x_1 - x_3)x_3 - b(x_1 - 2x_3)x_4]^2 \times \\ &\{2A_{13}(x_4^2 + 2x_2x_3 - x_1x_2) - 2A_{12}x_1x_3 + (2A_{23} + A_{44})x_1^2\} \\ &+ 2b^3x_3(x_1 - x_2)[a(x_1 - x_3)x_3 - b(x_1 - 2x_3)x_4]\{2A_{13}x_2x_4 - A_{12}x_1x_4 + A_{24}x_1^2\} + \\ &+ b^4x_3^2(x_1 - x_3)^2(2A_{13}x_2^2 - 2A_{12}x_1x_2 + A_{22}x_1^2) = 0; \end{aligned}\right. \tag{31}$$

quindi *la linea doppia di F si spezza nella conica C^2 che ha nel piano $x_1 = 0$ l'equazione:*

$$a^2 x_3^2 + 2b^2 x_4^2 + b^2 x_2 x_3 - 3ab x_3 x_4 = 0,$$

[1] Vale a dire: il piano δ deve essere il coniugato armonico di ω rispetto ai due piani di Ψ uscenti da l.

nella retta $x_1 = x_3 = 0$ *(cioè* l*) contata tre volte* (1) *e nelle due rette* $x_3 = x_4 = 0$ *e* $x_1 - x_3 = x_4 = 0$.

La cubica nodale doppia del caso generale si spezza dunque qui nella retta l e nella conica C^2 tangente ad l nel punto O.

Ora si assoggetti la superficie F in discorso alla trasformazione cremoniana definita dalle formule:

$$(32)\quad \begin{cases} \varrho x_1 = b^2 y_1^2 (y_2 + 2y_4) \\ \varrho x_2 = y_4 (ay_1 + by_2)(by_4 - ay_1) - y_1 y_3 (y_2 + 2y_4) \\ \varrho x_3 = b^2 y_1^2 y_4 \\ \varrho x_4 = -b^2 y_1 y_4 (y_2 + y_4), \\ \text{ossia:} \\ \sigma y_1 = x_1 x_3 (x_3 - x_1)^2 \\ \sigma y_2 = x_1 x_4 (x_3 - x_1)(x_1 - 2x_3) \\ \sigma y_3 = bx_1 x_4 [bx_1 x_4 - 2bx_3 x_4 - ax_3 (x_3 - x_1)] - \\ \qquad - (x_3 - x_1)[x_3 (x_3 - x_1)(b^2 x_2 + a^2 x_3) - \\ \qquad - bx_4 (3ax_3^2 - 2bx_3 x_4 + bx_1 x_4)] \\ \sigma y_4 = x_1 x_3 x_4 (x_3 - x_1); \end{cases}$$

essa si muterà nel cono cubico F':

$$A_{22} b^4 y_1^3 + 2A_{24} b^3 y_1^2 (ay_1 + by_2) + (2A_{13} + A_{44}) b^2 y_1 (ay_1 + by_2)^2 +$$
$$+ 2A_{12} b^2 y_1^2 y_3 + 2A_{13} [b^2 y_2^2 + (2aby_2 + y_3) y_1 + a^2 y_1^2] y_3 = 0.$$

Le superficie cubiche, che tagliano su F' il sistema lineare $|C'|$ corrispondente al sistema delle sezioni piane, $|C|$, di F, hanno un punto doppio in $y_1 = y_3 = y_4 = 0$ e un altro, biplanare, in $y_1 = y_2 = y_4 = 0$, coi piani osculatori fissi $y_1 = 0$ e $y_2 + 2y_4 = 0$. Di più esse hanno in comune una linea del 5^0 ordine, che si spezza

(1) Come controllo dei calcoli occorrenti per questa discussione e delle formule assegnate in (A) nella 2^a Nota a piè di pagina del n. 13 non abbiamo mancato di verificare direttamente che ogni sezione piana di F ha, nel punto d'intersezione con la retta $x_1 = x_3 = 0$, tre punti doppi infinitamente vicini.

nella retta $y_1 = y_2 = 0$ (appartenente anche al cono F'), nella retta $y_1 = y_4 = 0$ contata tre volte e nella retta $y_2 = y_4 = 0$.

Da tutto ciò segue che $|C'|$ è un sistema di curve dell'8^0 ordine, passanti due volte per il vertice di F', con altri tre punti-base doppi, di cui uno cade in $y_1 = y_3 = y_4 = 0$, un secondo in $y_1 = = y_2 = y_4 = 0$ e il terzo si trova infinitamente vicino a questo nella direzione $y_1 = y_2 = 0$, e con due punti-base semplici nei punti ove F'' è tagliato, fuori di $y_1 = y_2 = y_4 = 0$, dalla retta $y_2 = y_4 = 0$.

19. *Caso* $\overline{\beta}_2'')$.

Qui il punto O giace su K, e i due piani di Ψ che escono dalla retta l tangente a K in O coincidono in uno stesso piano η che, contato due volte, assorbe tutti e tre i coni degeneri del solito fascio. Questo è dunque costituito da un fascio di coni che toccano η lungo l e le cui quattro rette basi coincidono tutte con l.

Per trovare l'equazione della superficie F corrispondente a queste ipotesi si scelga sempre il vertice 2 del tetraedro fondamentale nel punto O, il piano 124 nel piano η e il piano 234 in ω; poi si disponga dei rimanenti elementi del tetraedro fondamentale in modo che l'equazione della conica K (considerata come quadrica-inviluppo) abbia ancora l'aspetto:

$$\xi_4^2 - \xi_2\,\xi_3 = 0 \tag{33}$$

o, sotto forma parametrica:

$$\xi_2 = \lambda^2, \quad \xi_3 = \mu^2, \quad \xi_4 = \lambda\mu, \tag{34}$$

e che il fascio dei coni quadrici sia rappresentato dall'equazione:

$$\nu x_3^2 + \varrho\,(x_1^2 - x_3\,x_4) = 0. \tag{35}$$

Si trova allora che l'equazione di una delle ∞^1 quadriche-inviluppo inscritte in Ψ (diversa da K) deve esser del tipo:

$$A_{11}(\xi_1^2 - 2\xi_3\xi_4) + 2A_{12}\xi_1\xi_2 + A_{22}\xi_2^2 + 2A_{23}\xi_2\xi_3 + 2A_{24}\xi_2\xi_4 + A_{44}\xi_4^2 = 0,$$

che la proiettività indotta fra i coni del fascio (35) e le tangenti di K dalle coniche di F deve tradursi fra i parametri $\frac{\varrho}{\nu}$ e $\frac{\lambda}{\mu}$ in una relazione della forma:

$$a\varrho\lambda - (\varrho\mu + 2\lambda\nu) = 0$$

e che infine la richiesta equazione di F è data da:

$$(36)\quad \begin{cases} A_{11}\, a\,[ax_3^2 + 2\,(x_1^2 - x_3\, x_4)]^3 + [A_{11}\,(x_4^2 + 2x_2\, x_3) - 2A_{12}\, x_1\, x_3 + \\ + (2A_{23} + A_{44})\, x_2^2]\,[ax_3^2 + 2\,(x_1^2 - x_3\, x_4)]^2 + \\ + 2(A_{11}\, x_2 x_4 - A_{12}\, x_1 x_4 + A_{24}\, x_1^2)\,[ax_3^2 + 2(x_1^2 - x_3\, x_4)]\, x_3^2 + \\ + (A_{11}\, x_2^2 - 2A_{12}\, x_1 x_2 + A_{22}\, x_1^2)\, x_3^4 = 0\ . \end{cases}$$

La linea doppia di questa superficie è costituita dalla conica C^2 del piano $x_1 = 0$ che è ivi rappresentata dall'equazione:

$$x_2 x_3 + a^2\, x_3^2 - 3a\, x_3 x_4 + 2x_4^2 = 0$$

(e che quindi tocca l nel punto O) e poi da cinque rette doppie coincidenti tutte con l.

Per trasformare F in un cono cubico le si applichi la trasformazione cremoniana rappresentata dalle formule:

$$(37)\quad \begin{cases} \varrho x_1 = y_1 y_3^2 \\ \varrho x_2 = y_1 y_3 y_4 - (y_1^2 + y_2 y_3 + a y_3^2)\,(a y_3 + 2y_2) \\ \varrho x_3 = y_3^3 \\ \varrho x_4 = y_3\,(y_1^2 - y_2 y_3) \\ \text{ossia} \\ \sigma y_1 = x_1^2 x_3^2 \\ \sigma y_2 = x_1 x_3\,(x_1^2 - x_3 x_4) \\ \sigma y_3 = x_1 x_3^3 \\ \sigma y_4 = 2x_1^2(2x_1^2 - 3x_3\, x_4 + 2a x_3^2) + x_3^2(x_2 x_3 + a^2 x_3^2 - 3a x_3\, x_4 + 2x_4^2)\,; \end{cases}$$

si troverà che essa si cangia nel cono cubico F':

$$(38)\quad \begin{cases} A_{11}[y_3\, y_4^2 - 2(a y_3 + 2y_2)^3] - 2A_{12}\, y_3^2 y_4 + (2A_{23} + A_{44}) y_3 (a y_3 + 2y_2)^2 + \\ \qquad + 2A_{24}\, y_3^2\,(a y_3 + 2y_2) + A_{22}\, y_3^3 = 0\,. \end{cases}$$

Su questo, il sistema $|\,C'\,|$, corrispondente a quello $|\,C\,|$ delle sezioni piane di F, è tagliato da un sistema di superficie cubiche

che passano per la retta $y_2 = y_3 = 0$ (situata pure su F') e toccano il piano $y_3 = 0$ lungo la retta $y_1 = y_3 = 0$ [1]; di più esse hanno un punto doppio biplanare in $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ coi piani osculatori fissi $y_1 = 0$ e $y_3 = 0$, quest'ultimo piano essendo il piano tangente ad F' lungo la sua generatrice di flesso $y_2 = y_3 = 0$.

Si conclude che $|C'|$ è un sistema di curve dell'8^0 ordine, passanti doppiamente per il vertice F', con altri tre punti base doppi e due punti base semplici tutti condensati nel punto $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ [2].

20. *Ipotesi* γ).

Ci restano ora da esaminare le superficie di 2^a specie con le coniche situate nei piani tangenti di un cono (generale) di 3^a classe.

Anche qui vi sono da prendere in considerazione due diverse alternative, secondo che sono irriducibili o no le superficie cubiche aggiunte.

21. *Prima alternativa.*

L'equazione della più generale superficie di 2^a specie, F, che corrisponde alla prima alternativa dell'ipotesi γ) si trova in (A) al n. 46: qui, per facilitare la discussione dei casi particolari la scriveremo sotto la forma [3]:

$$(39)\quad \begin{cases} Afx_4(ax_4 - bx_3)(ax_4^2 + gx_2x_3 - bx_3x_4)[gx_3(ex_1+fx_2)+fx_4(ax_4-bx_3)]+ \\ \quad + Bgx_2^2[gx_3(ex_1+fx_2)+fx_4(ax_4-bx_3)]^2+ \\ \quad + Cf^2gx_1^2x_4^2(ax_4-bx_3)^2 + Dfg^2x_1^2x_2x_4(ex_1+fx_2)(ax_4-bx_3) - \\ \quad - Efgx_1x_2x_4(ax_4-bx_3)[gx_3(ex_1+fx_2)+fx_4(ax_4-bx_3)]=0. \end{cases}$$

[1] Questa retta si stacca anzi quattro volte dalla linea di intersezione di due qualunque delle superficie cubiche considerate.

[2] La tangente comune delle C' (a contatto quadripunto) in $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ è la retta $y_1 = y_3 = 0$.

[3] Mantenendo le notazioni di (A) ciò equivale a supporre che le coordinate del punto B siano $(0, 0, a, b)$; che l'equazione del piano $m\,n$ sia $ex_1 + fx_2 = 0$; che quella della conica h^2 sia, nel piano $x_1 = 0$,

$$ax_4^2 + gx_2x_3 - bx_3x_4 = 0$$

e che, infine, l'equazione del cono V sia data da:

$$\xi_1\xi_2(A\xi_1 + H\xi_2) + B\xi_1^2\xi_3 + C\xi_2^2\xi_3 + D\xi_2\xi_3^2 + E\xi_1\xi_2\xi_3 = 0$$

dove, però, $Ae + Hf = 0$.

Ora si applichi a questa superficie la trasformazione cremoniana rappresentata dalle formule:

$$
(40)\quad \left\{
\begin{aligned}
\varrho x_1 &= -\, y_3 (fg\, y_1 y_2 - bf\, y_1 y_4 + ag\, y_4^2) \\
\varrho x_2 &= \quad y_1\, y_2 (eg\, y_3 - bf\, y_4) \\
\varrho x_3 &= \quad fy_1 (-fy_1 y_2 + ey_1 y_3 - ay_4^2) \\
\varrho x_4 &= \quad y_1\, y_4 (eg\, y_3 - bf\, y_4) \\
&\text{ossia} \\
\sigma y_1 &= \quad (bx_3 - ax_4)\, x_4 \,[gx_3 (ex_1 + fx_2) + fx_4 (ax_4 - bx_3)] \\
\sigma y_2 &= \quad (ex_1 + fx_2)\, x_2 \,[gx_3 (ex_1 + fx_2) + fx_4 (ax_4 - bx_3)] \\
\sigma y_3 &= \quad fx_1\, x_4 (ex_1 + fx_2)(bx_3 - ax_4) \\
\sigma y_4 &= \quad x_4 (ex_1 + fx_2)\,[gx_3 (ex_1 + fx_2) + fx_4 (ax_4 - bx_3)]\,;
\end{aligned}
\right.
$$

essa si convertirà nel cono cubico F':

$$
(41)\quad Afy_1^2(ey_3 - fy_2) + Bfgy_1 y_2^2 + Cfgy_1 y_3^2 - Dg^2 y_2 y_3^2 + Efgy_1 y_2 y_3 = 0.
$$

Le superficie cubiche, che staccano da F' il sistema $|C'|$ corrispondente a quello $|C|$ delle sezioni piane di F, passano per la retta $y_1 = y_3 = 0$ (situata su F') e per la conica C^2:

$$
eg\, y_3 - bf\, y_4 = -fy_1 y_2 + ey_1 y_3 - ay_4^2 = 0\,;
$$

e toccano tutte il piano $y_1 = 0$ lungo la retta $y_1 = y_4 = 0$. Di più esse hanno un punto doppio biplanare in $y_1 = y_3 = y_4 = 0$ con un piano osculatore fisso in $y_1 = 0$ (cioè nel piano ivi tangente ad F') e un punto doppio in $y_1 = y_2 = y_3 = 0$; e, infine, esse toccano il cono F' nel punto $y_2 = y_3 = y_4 = 0$.

Segue, allora, che $|C'|$ è, al solito, un sistema di curve dell'8° ordine, passanti doppiamente per il vertice di F', con altri tre punti-base doppi in $y_2 = y_3 = y_4 = 0$, $y_3 = y_4 = y_1 = 0$, $y_4 = y_1 = y_2 = 0$ e due punti-base semplici nelle intersezioni di F' con C^2 che non cadono nei punti $y_2 = y_3 = y_4 = 0$ e $y_1 = y_3 = y_4 = 0$ (dove F' tocca C^2).

22. *Casi particolari.*

In (A), dove fu discussa al n. 44 la forma della linea doppia della superficie F studiata nel numero precedente, si suppose che fossero distinti tutti e tre i piani che ivi furono indicati con α, β, e γ e che inoltre fossero distinti sulla conica, ivi chiamata h^2, i punti A e B. Ora, mantenendo sempre le notazioni di (A), si ricordi che la retta $AB \equiv s$ non può coincidere con r, in quanto che s passa per il vertice V del cono inviluppato dai piani delle coniche di F e V è necessariamente esterno ad r [(A), n. 44, 2ª nota a piè di pagina]; e si osservi che s non può risultare tangente ad h^2 nel punto ove h^2 si appoggia ad r, poichè se ciò accadesse le superficie cubiche Φ non taglierebbero più il piano ω nella retta r contata due volte e poi in una retta variabile.

Quindi per trovare le forme particolari che può assumere la nostra superficie F, per ciò che riguarda la sua linea doppia, non si deve far altro se non che immaginare che o vengano a coincidere i piani β e γ o vengano a coincidere su h^2 (in un punto diverso da quello situato su r) i punti A e B. Notisi a questo proposito che α è necessariamente distinto da β o γ, poichè α contiene la conica doppia di F *irriducibile*, mentre β e γ ne contengono le coniche doppie spezzate in coppie di rette, e che non è permesso immaginare che la coincidenza di β con γ si verifichi insieme con quella di A e B. Infatti se ciò si facesse le superficie Φ diventerebbero rigate cubiche e la superficie F sarebbe anch'essa una rigata [cfr., per un'osservazione analoga, (A), n. 33].

Si conclude pertanto che i casi particolari possibili sono soltanto due.

Analiticamente, si ha il primo quando nel numero precedente si supponga che sia $e = 0$ ma $b \neq 0$; si ha il secondo, quando si faccia invece $b = 0$ ed $e \neq 0$; e con ciò, come è ben chiaro, tutte le cose dette non subiscono mutamenti notevoli.

Quanto alla linea doppia di F si osservi che quando $e = 0$ (ma $b \neq 0$), essa si compone della conica h^2, della retta $x_3 = x_4 = 0$ e di due rette tacnodali in $x_2 = x_4 = 0$ e $x_2 = bx_3 - ax_4 = 0$ coi *piani tacnodali* rispettivi $x_4 = 0$ e $bx_3 - ax_4 = 0$; mentre allorchè $b=0$ (ma $e \neq 0$) essa si compone della conica h^2, della retta $x_3 = x_4 = 0$ e di due rette tacnodali in $x_2 = x_4 = 0$ e $x_4 = ex_1 + fx_2 = 0$ coi *piani tacnodali* rispettivi $x_2 = 0$ ed $ex_1 + fx_2 = 0$. Aggiungasi che in entrambi i casi F è dotata di un punto quadruplo, questo punto coincidendo con $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ quando $e = 0$ (ma $b \neq 0$) e con $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ quando $b = 0$ (ma $e \neq 0$).

23. *Seconda alternativa: caso* γ').

Per quel che è detto in (A) al n. 47, questa seconda alternativa dà luogo a due casi differenti, che qui chiameremo γ') e γ'').

Nel caso γ') all'equazione della superficie F può darsi la forma (74) di (A), o, con un'ovvia trasformazione delle coordinate, la forma più semplice (ma egualmente generale):

$$
(42)\quad \begin{cases} Ak^3x_3^2x_4^2(fx_3+x_4)^2+Ck^2x_1x_3^2x_4(x_1-ax_3)(fx_3+x_4)+Dkx_1^2x_3^2(x_1-ax_3)^2- \\ \quad -Ekx_1x_3x_4(x_1-ax_3)[x_1(x_1-ax_3)+kx_2(fx_3+x_4)]+ \\ \quad +Gx_1(x_1-ax_3)[x_1(x_1-ax_3)+kx_2(fx_3+x_4)][x_1(x_1-ax_3)+kx_2x_4]=0; \end{cases}
$$

quindi per trasformare F in un cono cubico F' basta adoperare la trasformazione:

$$
(43)\quad \begin{cases} \varrho x_1 = ky_2\,y_3\,(ay_3 - fy_1) \\ \varrho x_2 = y_4\,(y_2y_3 - y_1^2) - y_1y_2\,(ay_3 - fy_1) \\ \varrho x_3 = ky_3\,(y_2y_3 - y_1^2) \\ \varrho x_4 = ky_3^2\,(ay_1 - fy_2) \\ \text{ossia} \\ \sigma y_1 = x_3\,(x_1 - ax_3)\,(fx_3 + x_4) \\ \sigma y_2 = x_1\,x_3\,(x_1 - ax_3) \\ \sigma y_3 = x_3\,x_4\,(fx_3 + x_4) \\ \sigma y_4 = (fx_3 + x_4)\,[x_1\,(x_1 - ax_3) + kx_2\,x_4]. \end{cases}
$$

L'equazione del cono F' è:

$$
(44)\qquad Ak^3y_3^3+Ck^2y_2\,y_3^2+Dky_2^2\,y_3-Eky_2\,y_3(y_4-fy_2)+Gy_2\,y_4(y_4-fy_2)=0\,,
$$

e il sistema $|C'|$ di F' corrispondente al sistema $|C|$ delle sezioni piane di F vien secato su F' da superficie cubiche che toccano il piano $y_3=0$ lungo la retta $y_1=y_3=0$ e passano per le rette: $y_1=y_2=0$, $ay_1-fy_2=ay_3-fy_1=0$, e $y_3=y_4-fy_2=0$ (quest'ultima essendo situata sul cono F'). Di più esse hanno un punto doppio in $y_1=y_3=y_4=0$ e un altro in $y_1=y_2=y_3=0$ col cono osculatore fisso:

$$
y_2\,y_3 - y_1^2 = 0.
$$

Si conclude che $|C'|$ è un sistema di curve dell'8^0 ordine, passanti due volte per il vertice di F', con altri tre punti-base doppi (di cui uno cade in $y_1 = y_3 = y_4 = 0$, un secondo in $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ e il terzo è infinitamente vicino a questo nella direzione $y_1 = y_2 = 0$) e due punti-base semplici nelle intersezioni del cono F' con la retta $ay_1 - fy_2 = ay_3 - fy_4 = 0$ che cadono fuori di $y_1 = y_2 = y_3 = 0$.

I casi particolari che qui possono presentarsi sono due: analiticamente, sono caratterizzati, l'uno γ_1'), dall'ipotesi $f = 0$ (ma $a \neq 0$); l'altro γ_2'), dall'ipotesi $a = 0$ (ma $f \neq 0$) [1].

In entrambi i casi γ_1') e γ_2') la linea doppia di F è costituita dalla retta $x_1 = x_3 = 0$, dalla conica

$$x_3 = x_1^2 + kx_2 x_4 = 0$$

e da due rette tacnodali: ma nei due casi cambiano le relazioni di queste rette con l'altra $x_1 = x_3 = 0$.

24. *Caso* γ'').

Posto

$$\varphi = - x_1^2 + bx_1 x_3 - kx_2 x_3 + cx_3^2 + dx_3 x_4 + x_4^2$$

l'equazione di F [cfr. (A), n. 49] [2] può scriversi qui:

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} &Ak^2x_3^4x_4^2 + Bkx_3^2x_4^2(\varphi - kx_2x_3 - lx_3x_4) - Ckx_3^3x_4(\varphi - lx_3x_4) + \\ &\qquad + Dx_4^2(\varphi - kx_2x_3 - lx_3x_4)^2 + Ex_3^2(\varphi - lx_3x_4)^2 - \\ &\qquad - D(\varphi - lx_3x_4)^2(\varphi - kx_2x_3 - lx_3x_4) - \\ &\qquad - D(l-d)x_3x_4(\varphi - lx_3x_4)(\varphi - kx_2x_3 - lx_3x_4) = 0. \end{aligned}\right.$$

Applichiamo a questa superficie la trasformazione cremoniana definita dalle formule:

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned} &\rho x_1 = ky_4(y_1^2 - y_2y_4 + cy_4^2) \\ &\rho x_2 = [y_3 + (d-l)y_4](y_1^2 - y_2y_4 + cy_4^2) - [2y_1 + (d-l-b)y_4](y_1y_3 - y_2y_4) \\ &\rho x_3 = ky_4^2[2y_1 + (d-l-b)y_4] \\ &\rho x_4 = ky_4\{(y_3 - y_1)[2y_1 + (d-l-b)y_4] + y_1^2 - y_2y_4 + cy_4^2\} \end{aligned}\right.$$

(1) Se si facesse $a = 0$ e insieme $f = 0$ F risulterebbe una rigata.

(2) Veramente in (A) il coefficiente di x_1^2 entro φ era indicato con a; ma poichè a non può esser nullo (altrimenti F si spezzerebbe nel piano $x_3 = 0$ e in una residua superficie del 5º ordine) si può bene supporre $a = -1$, prendendo opportunamente il punto unità.

ossia

$$(46)\begin{cases} \sigma y_1 = x_3x_4(\varphi + x_1x_4 - dx_3x_4 - x_4^2) \\ \sigma y_2 = (\varphi - dx_3x_4)(\varphi + x_1x_4 - dx_3x_4 - x_4^2) - x_4[x_1\varphi - x_3x_4(lx_1 + kx_2)] \\ \sigma y_3 = x_3x_4(\varphi - dx_3x_4) \\ \sigma y_4 = x_3^2x_4^2 ; \end{cases}$$

essa si cangerà nel cono cubico F':

$$(47)\begin{cases} Ak^2y_4^3 + Bky_4\{y_3[y_3 + (d-l)y_4] - y_4[y_2 + (d-l)y_1]\} - \\ \qquad - Cky_4^2[y_3 + (d-l)y_4] - \\ \qquad - D\{y_3[y_3 + (d-l)y_4] - y_4[y_2 + (d-l)y_1]\}[y_2 + (d-l)y_1] + \\ \qquad + Ey_4[y_3 + (d-l)y_4]^2 = 0. \end{cases}$$

Le superficie cubiche che staccano da F' il sistema $|C'|$ corrispondente a quello $|C|$ delle sezioni piane di F passano per le rette: $y_3 = y_4 = 0$ e $2y_1 + (d - l - b)\,y_4 = [4c + (d - l - b)^2]\,y_4 - 4y_2 = 0$, (delle quali la prima sta pure sul cono F'), e toccano il piano $y_4 = 0$ lungo la retta $y_1 = y_4 = 0$. Di più, esse hanno un punto doppio biplanare in $y_1 = y_3 = y_4 = 0$, uno dei piani osculatori coincidendo costantemente col piano $y_4 = 0$, ivi tangente al cono F', e un punto doppio in $y_1 = y_2 = y_4 = 0$.

Segue che $|C'|$ è un sistema di curve dell'8⁰ ordine, passanti due volte per il vertice di F', con altri tre punti-base doppi (dei quali uno cade in $y_1 = y_2 = y_4 = 0$, un secondo in $y_1 = y_3 = y_4 = 0$ e il terzo, infinitamente vicino a questo nella direzione $y_4 = y_1 - y_3 = 0$) e due punti-base semplici nelle intersezioni di F' con la retta $2y_1 + (d - l - b)\,y_4 = [4c + (d - l - b)^2]\,y_4 - 4y_2 = 0$ che cadono fuori di $y_1 = y_2 = y_4 = 0$.

Notisi che il caso γ'') ora considerato non dà luogo, per quanto riguarda la linea doppia, a casi particolari.

25. *Conclusioni generali.*

I risultati conseguiti fin qui possono essere riuniti in un enunciato molto semplice. Essi ci assicurano che:

Ogni superficie normale di 2ª specie dello spazio ordinario (a curve sezioni di genere 3) è riducibile, mediante una **trasformazione cremoniana,** *a un cono cubico ellittico e su questo il sistema delle* *sezioni piane è rappresentato da un sistema di curve dell'8° ordine, passanti doppiamente per il vertice del cono, con altri tre punti-base doppi e due punti-base semplici (distinti o, in vario modo, infinitamente vicini).*

E di qua si trae facilmente che:

Ogni superficie normale di 2ª specie dello spazio ordinario (a curve sezioni di genere 3) si può dedurre, mediante proiezione da due suoi punti, da una superficie (normale) di 2ª specie (dell'ordine 8°) dello spazio a cinque dimensioni.

È opportuno osservare, prima di procedere innanzi, che la rappresentazione ottenuta di una superficie (normale, di 2ª specie) dello spazio ordinario sopra un cono cubico (ellittico) è una *rappresentazione d'ordine minimo.*

E infatti supponiamo che $|C'|$ sia il sistema lineare che rappresenta sopra un cono cubico V una superficie (normale, di 2ª specie) F dello spazio ordinario: $|C'|$ sarà di genere 3, grado 6 e dimensione 3. Dico che l'ordine n di ogni curva C' non può essere inferiore ad 8.

Poichè la C' generica è del genere 3, è chiaro intanto che $n \geq 6$; poi, tenendo presente la formula di Segre, già citata più volte, si vede subito che se fosse $n = 6$ le C' dovrebbero avere tutte un punto doppio (fisso) e non passare per il vertice del cono, e se fosse $n = 7$, le C' dovrebbero avere tutte due punti doppi (fissi) e passare *semplicemente* per il vertice del cono. Ora, se P è un punto del cono V (distinto dal vertice), tutte le possibili sestiche del genere 3 situate su V e aventi un punto doppio in P, son fornite dalle intersezioni del cono con le ∞^6 quadriche che lo toccano in P, quindi se le C' fossero dell'ordine 6 F non sarebbe una superficie di 2ª specie [1].

Allo stesso modo, siano P e Q due punti di V (distinti dal vertice). Tutte le possibili curve del 7° ordine situate su V e aventi due punti doppi in P e Q si possono staccare da V mediante superficie del 3° ordine che lo tocchino in P e Q (e ne contengano due generatrici): quindi costituiscono un sistema continuo algebrico (non lineare) di dimensione 6 e grado 8. Questo sistema si compone di ∞^1 sistemi lineari di dimensione 5 e ciascuno di questi è fornito dalle superficie del 3° ordine che toccano V in P e Q e ne contengono due generatrici fisse g ed h. Ma allora, poichè queste superficie del 3° ordine passano semplicemente per il vertice di V, le curve

[1] Castelnuovo, *Sulle superficie* etc. (Atti di Torino, vol. XXV) n. 10, a piè di pagina.

residue del 7° ordine secondo cui esse tagliano V toccano tutte nel vertice di V la terza generatrice comune al cono e al piano gh, quindi i sistemi lineari in discorso *non sono del grado* 8, *ma bensì del grado* 7. Segue che essi non possono essere sistemi rappresentativi di superficie di 2ª specie (1): e quindi è dimostrato, come volevasi, che $n \geq 8$.

26. Un'altra osservazione importante che scaturisce dalle cose dette (ma che potrebbe anche esser dedotta da quel che si vedrà nel capitolo successivo) è la seguente.

Sia F una superficie normale di 2ª specie dello spazio ordinario e $|C'|$ il sistema di curve dell'8° ordine che la rappresenta sopra un cono cubico V: siano poi P, Q, R i punti-base doppi di $|C'|$, distinti dal vertice del cono, e A, B i punti-base semplici, e, per non entrare in discussioni minute che sarebbero inutili in vista dei risultati successivi, supponiamo senz'altro che i punti P, Q, R, A e B siano punti generici di V.

Per un teorema di SEGRE è noto che esistono su V due sistemi (ellittici) ∞^1 di quartiche sghembe di 1ª specie situate su V e passanti, quelle di un sistema, (per il vertice di V e) per P, Q, R, A, quelle dell'altro sistema (per il vertice di V e) per P, Q, R, B. I due sistemi sono poi del grado 1 e dell'indice 2.

Ora ognuna di queste quartiche è l'immagine su V di una cubica piana (ellittica) situata su F, e ogni quartica di un sistema presa insieme con una quartica dell'altro dà luogo a una curva di $|C'|$, dunque, atteso che il ragionamento fatto è invertibile:

Sopra una superficie normale di 2ª specie dello spazio ordinario (a curve sezioni di genere 3) esistono in generale soltanto due sistemi distinti ∞^1 di cubiche piane di grado 1 e indice 2, e la intersezione residua della superficie col piano di una cubica di un sistema è sempre una cubica dell'altro sistema.

Osservando che per ogni punto di F passano quattro di queste sue cubiche e che F non è certo l'inviluppo dei loro piani, si conclude che:

I piani secanti F secondo coppie di cubiche costituiscono in generale una sviluppabile (ellittica) della 4ª classe (2).

(1) Cfr. (A), n. 3, seconda nota a piè di pagina.

(2) I piani uscenti dalle rette doppie o semplici di F (e di quest'ultime F ne contiene in generale quattro), quelli che ne contengono le coniche e quelli che la tagliano secondo coppie di cubiche esauriscono la sua sviluppabile bitangente, poichè è chiaro *a priori* che ogni piano bitangente di F deve tagliare F in una curva spezzata. Infatti, se ciò non accadesse, questa curva sarebbe del genere 1 e il piano non toccherebbe nessuna conica di F, mentre un piano generico ne tocca in generale quattro.

Capitolo II.

LE SUPERFICIE NORMALI DI 2ª SPECIE DEGLI SPAZI A QUATTRO O CINQUE DIMENSIONI.

27. *Le superficie normali di 2ª specie dello spazio a quattro dimensioni.*

Abbiamo già dimostrato in (A) che una superficie normale di 2ª specie (a curve sezioni di genere 3) è di ordine 7 o 8 secondo che è immersa in S_4 o in S_5, e quanto è stato detto nel capitolo precedente mette fuori di dubbio l'esistenza di superficie siffatte.

Qui vogliamo precisare e caratterizzare i vari tipi esistenti.

28. Sia, in primo luogo, F_2^7 una superficie normale di 2ª specie dell'S_4. Essa viene proiettata da ogni suo punto sopra un S_3 in una Φ_2^6 normale di 2ª specie con un fascio ellittico di coniche, e per quanto sappiamo i piani di queste coniche possono formare,

α) un fascio di piani contato due volte, o

β) un cono di 3ª classe, o infine

γ) una sviluppabile ellittica (non conica) della 4ª classe.

Ma nel caso presente è facile dimostrare che le alternative α) e β) debbono essere escluse.

Infatti nell'ipotesi α) i piani delle coniche di F_2^7, o passano tutti per una medesima retta o si appoggiano secondo rette distinte ad altri ∞^1 piani e quindi, per un noto teorema (1), costituiscono una schiera di un cono quadrico (di S_4) semplicemente specializzato.

Se passano tutti per una retta, o formano i piani generatori di un S_1-cono quadrico e ciascuno di essi contiene *due* coniche della F_2^7, o formano i piani generatori di un S_1-cono cubico (ellittico) e ciascuno di essi contiene *una* conica della F_2^7. Ora un iperpiano che passi per la retta vertice di un tale S_1-cono non può tagliare la F_2^7 che in una linea del 7^0 ordine; quindi l'ipotesi dell'S_1-cono quadrico deve esser senz'altro respinta, e nell'ipotesi dell'S_1-cono cubico bisogna che la retta vertice appartenga *semplicemente* ad F_2^7. Ma ciò,

(1) Segre, *Sur un théorème de la géométrie à n dimensions* (Math. Ann., Bd. 30, 1887).

visto che una tal retta sarebbe una corda di ogni conica della F_2^7, contrasta col fatto che la ∞^1 delle coniche di F_2^7 deve essere ellittica; dunque non resta se non supporre che i piani delle coniche di F_2^7 formino una schiera di un cono quadrico semplicemente specializzato e che ognuno di essi contenga due coniche della F_2^7.

Ma allora, delle due schiere di piani del cono quadrico, l'una conterrebbe piani secanti la F_2^7 secondo coppie di coniche, l'altra piani secanti la F_2^7 secondo cubiche (ellittiche) irriducibili; quindi, atteso che due piani di diverso sistema si taglian sempre secondo una retta, la quale non potrebbe risultare che una trisecante per F_2^7, bisognerebbe che tutte le coniche di F_2^7 passassero per il vertice del cono quadrico (e che questo punto, abbassando di due unità il genere delle sezioni iperpiane passanti per esso, risultasse un tacnodo per F_2^7). Ora questo è assurdo perchè le coniche della proiezione generica di F_2^7, Φ_2^6, non passano per uno stesso punto; bensì tagliano sopra l'asse del fascio dei piani, che le contengono, le ∞^1 coppie di una involuzione quadratica (contata due volte); involuzione che, per quanto risulta dalle equazioni delle varie Φ_2^6, non può mai essere degenere.

29. Passiamo ora alla discussione dell'ipotesi β).

Qui i piani delle coniche di F_2^7 passan tutti per un punto, oppure da ogni punto della F_2^7 parte una retta a cui essi si appoggiano.

Poichè F_2^7 non è rigata, ove si verificasse la seconda alternativa, le rette appoggiate ai piani in discorso sarebbero ∞^2; e poichè il supporre che da ogni punto di uno dei piani partisse più di una retta appoggiata a tutti gli altri porterebbe alla conclusione che i piani riempiono un cono quadrico, si concluderebbe che di tali rette da ogni punto di uno dei piani non potrebbe partirne che una (1). Ma allora la ∞^2 delle rette sarebbe razionale e tale sarebbe inoltre la V_3 riempita dai piani delle coniche di F_2^7; mentre ciò è manifestamente assurdo.

Bisogna dunque supporre che i piani delle coniche di F_2^7 passino tutti per un punto O e riempiano una V_3^4, proiezione da O di una ordinaria rigata biquadratica (2). Ma allora conducendo un piano

(1) Veramente si potrebbe dubitare che le ∞^2 rette di cui si parla si appoggiassero a ciascuno dei piani delle coniche di F_2^7 in ∞^1 punti distinti soltanto, ma il dubbio si respinge subito molto agevolmente.

(2) Notisi che la F_2^7 è certo *semplice* per la V_3 riempita dai piani delle sue coniche.

per O e considerando le quattro rette secondo cui esso seca la V_3^4, si vede subito che F_2^7 non può essere situata sul cono se non a patto che passi per O; ciò che è assurdo, perchè una Φ_2^6 di 2ª specie dello spazio ordinario, le cui coniche sono situate nei piani di un cono di 3ª classe, non passa per il vertice di questo cono [cfr. (A), n. 44, seconda nota a piè di pagina].

È così dimostrato che soltanto l'ipotesi γ) deve esser presa in considerazione; il che val quanto dire che:

I piani delle ∞^1 coniche di ogni F_2^7 di 2ª specie dell'S_4 riempiono una V_3 ellittica normale del 5º ordine.

30. Ora si prenda nell'S_4 in cui è immersa la F_2^7 un fascio di iperpiani con l'asse γ e si dicano omologhi due iperpiani del fascio quando toccano una stessa conica di F_2^7. Per la formula di Zeuthen, applicata all'involuzione ellittica segnata dalle coniche di F_2^7 sopra ogni sezione iperpiana, otterremo nel fascio una corrispondenza (4, 4) con 8 coincidenze. Di queste, 7 corrispondono ai 7 punti ove γ taglia F_2^7; un'altra, dovendo provenire da una conica *non* appoggiata a γ, proverrà da una conica spezzata in due rette (distinte) l ed m. Segue che:

Delle ∞^1 coniche di F_2^7 una è sempre spezzata in una coppia di rette.

31. La Φ_2^6 proiezione di F_2^7 da un suo punto generico possiede *in ogni caso* almeno una retta doppia, da ogni punto della quale escono due coniche della Φ_2^6, dunque o la F_2^7 possiede anch'essa una tal retta dotata della stessa proprietà, oppure sulla F_2^7 esiste un sistema ∞^1 di curve piane, e precisamente di cubiche (ellittiche) unisecanti le coniche.

Ora si osservi che, se la F_2^7 è dotata di una retta doppia appoggiata alle sue ∞^1 coniche, ogni iperpiano che passi per la retta doppia e per il piano di una di queste coniche seca ulteriormente la superficie in una cubica (ellittica, e quindi) piana; dunque in ogni caso la F_2^7 contiene un sistema ∞^1 di cubiche piane (ellittiche), unisecanti le coniche.

Supposto che questo sia, eventualmente, spezzato, si dica Σ una sua parte irriducibile; il resto di una curva di Σ rispetto al sistema (normale) delle sezioni iperpiane di F_2^7 è un fascio di curve ellittiche del 4º ordine necessariamente sghembe (si pensi, ad esempio, a quella fra queste curve che si spezza in una cubica e in quella delle due rette l ed m, diciamo m, che si appoggia alle curve di Σ);

quindi Σ non può essere un fascio lineare e non può nemmeno essere un sistema ∞^1 razionale, perchè in tal caso, per un noto teorema di ENRIQUES, sarebbe contenuto in un sistema lineare più ampio.

Segue che Σ è necessariamente un sistema di grado 1 (altrimenti i piani delle cubiche di Σ secandosi a due a due in rette e non appartenendo a un S_3 passerebbero per una stessa retta, formerebbero un cono, non razionale, di ordine uguale almeno a 3 e ciò è manifestamente assurdo) e di indice 2 (1).

Di qui si deduce che la Φ_2^6, proiezione di F_2^7 da un suo punto generico sopra un S_3, possiede almeno due rette doppie sghembe. D'altra parte risulta da (A) o, meglio, dal primo capitolo di questo lavoro, che da ogni tal retta doppia partono due piani α e β (eventualmente coincidenti) della sviluppabile di 4ª classe costituita dai piani delle coniche di Φ_2^6, dunque da ogni piano contenente una cubica di Σ partono due S_3 (distinti o coincidenti) che contengono ciascuno una delle coniche di F_2^7 (2). La residua intersezione di uno di questi S_3 con F_2^7 non può essere una conica ulteriore, perchè nessuno dei piani α e β può contenere mai due coniche di Φ_2^6, dunque sarà una retta doppia, e la F_2^7 verrà a contenere due rette doppie g ed h distinte o infinitamente vicine. Tanto g, poi, quanto h si appoggiano ai piani delle cubiche di Σ; ma Σ non è un fascio lineare, dunque g ed h (anche se infinitamente vicine) sono certamente sghembe.

Notisi che le cubiche di Σ, o, addirittura, le cubiche di F_2^7 possono ottenersi congiungendo g (od h) coi piani delle coniche mediante iperpiani e considerando le intersezioni ulteriori di F_2^7 con codesti iperpiani; quindi la ∞^1 delle cubiche di F_2^7 è irriducibile e coincide con Σ. In altri termini:

Ogni F_2^7 di 2ª specie dell'S_4 contiene un sistema ∞^1 ellittico di grado 1 e indice 2 di cubiche piane (ellittiche), ed è dotata di due rette doppie sghembe, distinte o infinitamente vicine.

Queste due rette doppie sono poi due generatrici della rigata ellittica del 5º ordine, che, come è ben noto, costituisce la superficie doppia della V_3^5 riempita dai piani delle coniche delle F_2^7.

(1) Cfr. CASTELNUOVO, *Sulla linearità*, ecc. (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXVIII, 1893), n. 4.

(2) La cosa stessa può del resto dimostrarsi osservando che un piano contenente una cubica di F_2^7 seca la V_3^5 riempita dai piani delle coniche di F_2^7 in quella cubica e in una coppia di rette: quindi esso si appoggia secondo una retta ai piani di due delle coniche della F_2^7, ecc.

32. Mantenute sempre le notazioni dei n. precedenti, e limitandosi a considerare il caso della F_2^7 con due rette doppie distinte (il che, come è facile persuadersi, non ha valore sostanziale), si ricordi che, delle due rette l ed m costituenti una delle coniche di F_2^7, m è quella che si appoggia alle cubiche di F_2^7. Si conclude allora facilmente che la retta m è sghemba con ciascuna delle due rette doppie g ed h di F_2^7: d'altra parte ogni conica di F_2^7 deve appoggiarsi in un punto a g e in un altro punto ad h, dunque l si appoggia a g e ad h, e l'intersezione di F_2^7 con l'S_3 gh si compone oltre che di g ed h contate due volte, di l e di una conica residua, k^2.

E qui possiamo aggiungere un'osservazione notevole sul sistema ∞^1 Σ delle cubiche di F_2^7.

Si noti in primo luogo che per ogni punto di g (o di h) passano due cubiche irriducibili [1] di Σ: esse sono le ulteriori intersezioni di F_2^7 coi due S_3 che proiettano da h (o da g) i piani delle due coniche passanti per quel punto. Ebbene, sia A un punto di g e C_1^3 e C_2^3 le due cubiche che vi passano. Se B è il punto ove C_1^3 si appoggia ad h e D l'ulteriore intersezione di C_1^3 con AB è chiaro che D è pure il punto ove AB si appoggia alla conica di F_2^7 che giace per intero nell'iperpiano gh, cioè a k^2. Ma da A esce una sola retta che si appoggia ad h e a k^2 in punti distinti, dunque, si deve arrivare allo stesso punto D anche se nel ragionamento fatto si sostituisce a C_1^3 la cubica C_2^3. Ciò porta che anche C_2^3 passa per B; e quindi, per una facile considerazione ulteriore, si può enunciare il teorema:

Le ∞^1 cubiche di F_2^7 si distribuiscono in ∞^1 coppie per modo che le cubiche di una stessa coppia si appoggiano a g ed h negli stessi due punti; *e gli ∞^1 S_3 che contengono queste coppie di cubiche passano tutti per la retta m di F_2^7.*

Ora la superficie F_2^7 non è certo situata sopra la V_3 inviluppata dagli ∞^1 S_3, che ne contengono a coppie le cubiche, perchè altrimenti ognuno di questi S_3 la toccherebbe in ∞^1 punti, mentre ciò è manifestamente impossibile, dunque per ogni punto dello spazio ambiente, come per ogni punto di F_2^7, passano soltanto due S_3 che taglino F_2^7 in coppie di cubiche. Si conclude che:

Gli ∞^1 S_3 per m, secanti ulteriormente F_2^7 in coppie di cubiche, inviluppano un cono quadrico doppiamente specializzato.

(1) Intendiamo dunque escluse per il momento le cubiche di Σ spezzate l'una in l e nella retta g contata due volte, l'altra in l e nella retta h contata due volte. Cfr. la nota a piè di pagina del n. 35.

Infine è bene osservare che le due cubiche irriducibili e le due coniche di F_2^7 uscenti da uno stesso punto di g (o di h) si comportano fra di loro in maniera differente. Infatti ciascuna delle cubiche incontra una delle due coniche soltanto su g (o su h) mentre incontra l'altra su g (o su h) — e un tal punto sull'*ente algebrico* ∞^2 di cui la F_2^7 è un modello proiettivo *non* è da considerarsi come un punto comune alle due curve — e in un punto ulteriore; e se una delle cubiche si comporta in un certo modo rispetto a una delle due coniche, l'altra cubica, rispetto alla medesima conica, si comporta nel modo opposto.

33. Sulla F_2^7 esistono, come è chiaro, infinite quartiche sghembe ellittiche. Esse formano un sistema ∞^2 di grado 2 e indice 2 e quelle fra di esse che passano per un qualunque punto di m si spezzano in m e in una cubica ulteriore variabile nel sistema Σ.

Se si proietta F_2^7 da un suo punto generico sopra un S_3 in una Φ_2^6, dei due sistemi di cubiche di cui Φ_2^6 è dotata (n. 26), uno è fornito dalla proiezione del sistema Σ, l'altro da quella del sistema delle ∞^1 quartiche passanti per il centro di proiezione.

Ora si immagini di scegliere il centro di proiezione in un punto O di m. Risulterà *una Φ_2^6 con un solo sistema ∞^1 (di grado 1 e indice 2) di cubiche piane (ellittiche) situate a coppie nei piani tangenti di un cono quadrico, avente per vertice un punto doppio di Φ_2^6 comune a tutte le cubiche in discorso.*

34. Riassumendo quel che si è detto fin qui possiamo enunciare il teorema:

Esiste un solo tipo generale di superficie normali di 2ª specie (a curve sezioni di genere 3) nello spazio a quattro dimensioni. Esse sono tutte delle superficie del 7º ordine con due rette doppie sghembe (distinte o infinitamente vicine) e con un fascio ellittico di coniche situate nei piani di una V_3^5 (ellittica) normale; e posseggono tutte un sistema algebrico ∞^2 di grado 2 e indice 2 di quartiche sghembe ellittiche, nel quale è contenuto (parzialmente) un sistema ∞^1 di cubiche piane (ellittiche) di grado 1 e indice 2.

35. *Rappresentazione sul cono cubico (ellittico) delle superficie (normali) di 2ª specie dell'S_4.*

Sia F_2^7 una superficie normale di 2ª specie dell'S_4 con le rette doppie (sghembe) g ed h e si voglia rappresentarla sopra un cono cubico ellittico.

Per questo supponiamo in primo luogo che g ed h siano distinte e proiettiamo la F_2^7 da un punto P di una delle sue rette doppie, per es. di g, sopra un S_3, α, che non passi per P.

Il risultato della proiezione sarà una superficie del 5^0 ordine Φ_2^5 (*di 1ª specie*) con un tacnodo G nella traccia di g su α, con un punto triplo O nella traccia, su α, della retta secondo cui si intersecano i piani delle due cubiche di F_2^7 uscenti da P, e con tre rette doppie h', p' e q' uscenti da O, e immagini, rispettivamente, della retta h e delle due cubiche in discorso. Quanto alle coniche di Φ_2^5, esse passano tutte per G e a coppie costituiscono le ulteriori intersezioni di Φ_2^5 coi coni quadrici che passano per G e per le tre rette h', p' e q' (¹).

Il sistema $|C|$ delle sezioni iperpiane di F_2^7 sarà rappresentato su Φ_2^5 da un sistema (∞^4) $|C'|$ di curve del 7^0 ordine, trisecate da p' e q', con un punto doppio (fisso) in G e un punto doppio (variabile) su h'.

Ora si sottoponga Φ_2^5 a una trasformazione quadratica prendendo come punto fondamentale il punto G e come conica fondamentale quella spezzata nelle due rette p' e q'. La superficie Φ_2^5 si muterà in una rigata biquadratica, Φ_2^4, e il sistema $|C'|$ si cangerà in un sistema $|C''|$, segnato su Φ_2^4, di curve del 6^0 ordine con un punto-base semplice nel punto fondamentale dello spazio di Φ_2^4 e con un punto doppio (variabile) sulla direttrice, h'', di Φ_2^4 corrispondente alla retta doppia h' di Φ_2^5. Naturalmente ogni curva C'' bisecherà, poi, non solo ogni generatrice di Φ_2^4, ma anche la sua ulteriore direttrice r''.

Ebbene, si applichi ancora alla Φ_2^4 una ulteriore trasformazione quadratica prendendo come punto fondamentale un punto di h'' (od r'') e come conica fondamentale quella spezzata in r'' (od h'') e una generatrice generica di Φ_2^4. La Φ_2^4 si convertirà in un cono cubico e su questo il sistema $|C'''|$ corrispondente a $|C''|$ sarà un sistema di curve dell'8^0 ordine, passanti doppiamente per il vertice, con altri tre punti-base doppi e un punto-base semplice.

36. Nel n. precedente si è supposto che le rette g ed h fossero distinte, ma il ragionamento fatto resta sostanzialmente immutato

(¹) Questa Φ_2^5 è appunto quella che si trova descritta nel già citato lavoro del prof. CASTELNUOVO (*Atti di Torino*, 1890) in una nota a piè di pagina del n. 10. Notisi come dal fatto che le coniche di Φ_2^5 toccano tutte in G il piano tacnodale segua l'altro che nei punti di g (o di h) le coniche di F_2^7 toccano tutte un medesimo S_3, contenente g (o h) ed l. Il che potrebbe vedersi anche per via diretta.

nell'ipotesi che le rette g ed h siano infinitamente vicine [1]: quindi possiamo enunciare il teorema:

Ogni superficie normale di 2^a specie dello spazio a quattro dimensioni è rappresentabile sopra un cono cubico (ellittico) mediante un sistema di curve dell'8° ordine, passanti due volte per il vertice, con altri tre punti-base doppi e un punto-base semplice.

37. *Le superficie (normali) di 2^a specie dello spazio a cinque dimensioni.*

Sia ora F_2^8 una superficie di 2^a specie, a curve sezioni di genere 3, dell'S_5 e quindi dell'ordine 8.

Se la F_2^8 si proietta da un suo punto generico sopra un S_4 si ottiene in questo spazio una F_2^7 con due rette doppie, dunque la F_2^8 o ha qualche retta doppia, o, se non ne ha, possiede un sistema ∞^1 di indice 2 di cubiche piane (ellittiche). Badisi però che se di rette doppie ne ha una, ne ha pure una seconda.

Ciò può esser dimostrato in varia maniera, dopo aver notato da una parte che:

I piani delle coniche di F_2^8 riempiono una V_3^6 ellittica normale; dall'altra, per un ragionamento analogo a quello del n. 30, che:

Nessuna delle coniche di F_2^8 può spezzarsi in una coppia di rette.

Per esempio, può osservarsi che la V_3^6 riempita dai piani delle coniche di F_2^8 ha in generale tre rette doppie: una di queste, diciamo g, sarà la retta doppia di cui F_2^8 si suppone già dotata. Sia h un'altra delle rette doppie della V_3^6: da ogni punto A di h partono i piani di due coniche di F_2^8 che si appoggiano a g in due punti generalmente distinti: quindi l'S_4 di codesti due piani seca F_2^8 in g, in due coniche e in una residua curva del 2^0 ordine. Questa curva non può essere una delle altre coniche di F_2^8, dunque o è una ulteriore retta doppia di $F_2'^8$ o si raccoglie tutta in g contata altre due volte.

Nella prima ipotesi l'assunto è già dimostrato e l'ulteriore retta doppia di F_2^8 è l'ulteriore retta doppia l di V_3^6; nella seconda si conclude che tutti gli S_4 del fascio, avente per asse l'S_3 che congiunge g con l, toccano su g le coniche di F_2^8, il che val quanto dire che tutte codeste coniche toccano su g l'S_3 $g\,l$. Ma allora, in questa seconda ipotesi, basta ripetere per i punti di l il ragiona-

[1] In questa ipotesi si osserverà che la retta doppia h' di Φ_2^7 viene a coincidere con la retta OG.

mento fatto per quelli di h per concludere che h è l'ulteriore retta doppia di F_2^8.

Questo ragionamento porta a un'osservazione che collima con quella fatta in nota a proposito della F_2^7 di S_4, ma richiederebbe considerazioni minute per i casi particolari. Perciò è preferibile servirsi della seguente considerazione.

Se la F_2^8 avesse una sola retta doppia g, poichè per ogni sua proiezione ottenuta da un suo punto sopra un S_4 vi sarebbe una sezione iperpiana composta di due rette doppie, una conica e una retta semplice, appoggiata alle due rette doppie, e poichè tal retta semplice non potrebbe provenire che dalla proiezione della conica di F_2^8 passante per il centro di proiezione, la superficie F_2^8 avrebbe delle sezioni iperpiane composte della retta doppia g, di due coniche e di una ulteriore linea piana d'ordine superiore a 2. Ciò che è manifestamente assurdo.

Riassumendo, possiamo dire che:

Le F_2^8 normali di 2^a specie dell'S_5 si distinguono in due tipi differenti. Quelle del 1^0 tipo non hanno rette doppie, ma contengono un sistema ∞^1 di cubiche piane (ellittiche), unisecanti le coniche, di grado 1 e indice 2; quelle del 2^0 tipo hanno due rette doppie sghembe (che possono essere distinte o infinitamente vicine) [1].

38. Una proprietà comune delle superficie dei due tipi ora enumerati è quella che risulta dalle seguenti osservazioni:

a) Sia F_2^8 una superficie del 1^0 tipo, cioè supponiamo che F_2^8 contenga un sistema ∞^1 Σ di cubiche piane (ellittiche) di grado 1 e indice 2.

Due cubiche di F_2^8 si incontrano in un punto, quindi per i loro piani passano ∞^9 quadriche dell'S_5. Imporre ad una di queste quadriche la condizione di contenere il piano di una terza cubica di F_2^8 equivale ad imporle al più quattro condizioni lineari: cosicchè vi sono almeno ∞^5 quadriche di S_5 che passano per tre cubiche di F_2^8. Così proseguendo si trova che vi sono almeno ∞^1 quadriche che passano per tre cubiche e due coniche di F_2^8. Ora se di queste quadriche nessuna passasse per F_2^8 avremmo sopra F_2^8 un fascio lineare di cubiche piane ellittiche, ciò che è assurdo, perchè queste cubiche taglierebbero sopra ogni cubica di Σ una g_n^1 con $n > 1$,

[1] L'esistenza effettiva dei due tipi risulterà presto dalle cose che seguiranno nel testo.

quindi i loro piani si appoggerebbero in rette ai piani delle cubiche di Σ e l'S_4 di due di questi piani conterrebbe tutta la superficie F_2^8. Se ne trae che F_2^8 appartiene a una quadrica e che quindi può definirsi come la parziale intersezione di una quadrica con una V_3^6 normale, luogo di una ∞^1 ellittica di piani; l'intersezione completa essendo formata da F_2^8 e da una quaterna di piani.

b) Supponiamo invece che F_2^8 appartenga al 2° tipo e quindi abbia due rette doppie g e h. Le quadriche per g e h sono ∞^{14}; imporre a una tal quadrica la condizione di contenere una conica di F_2^8 equivale ad imporle tre condizioni; dunque le quadriche per g, h e quattro coniche di F_2^8 sono almeno ∞^2. Ora se di queste nessuna passasse per F_2^8 avremmo sopra F_2^8 una rete di quartiche, e quindi F_2^8 non sarebbe più una superficie di 2ª specie. Di qua si trae una conseguenza identica a quella dedotta per le superficie del 1° tipo, dunque:

Ogni F_2^8 (normale) di 2ª specie dell'S_5 è parziale intersezione di una quadrica e di una V_3^6 normale luogo di una ∞^1 ellittica di piani.

Per le superficie del 2° tipo troveremo poi più innanzi un risultato ancora più espressivo.

39. *Le F_2^8 di S_5 del 1° tipo.*

Volendo esaminare un po' da vicino le proprietà delle varie F_2^8 di S_5 gioverà distinguere i due tipi e considerarli separatamente.

Sia F_2^8 una superficie del 1° tipo e V_4^2 la quadrica che la contiene.

È chiaro che V_4^2 contiene per intero i piani delle cubiche del sistema Σ di F_2^8: d'altra parte, Σ essendo del grado 1, tali piani debbono tagliarsi a due a due in un punto variabile su F_2^8 e quindi non possono nè passare per un punto fisso nè tagliarsi a due a due sopra una retta, quindi V_4^2 è certo una quadrica non specializzata e i piani delle cubiche di F_2^8 appartengono tutti a uno stesso dei due sistemi ∞^2 di piani della V_4^2.

Si concepisca allora la V_4^2 in discorso come l'immagine della varietà delle rette dello spazio ordinario: la F_2^8 risulterà l'immagine di una congruenza di rette con ∞^1 punti singolari, vertici di ∞^1 coni cubici appartenenti alla congruenza: di più ogni raggio della congruenza ne contiene due punti singolari e due punti singolari sono sempre congiunti da un raggio della congruenza. Segue che:

Una F_2^8 del 1° tipo non è altra cosa che l'immagine nell'S_5 — nell'ordinario senso della geometria della retta — della congruenza delle corde di una quartica sghemba di 1ª specie.

40. Giova che ci fermiamo un momento a esaminare le proiezioni della F_2^8 del 1^0 tipo da due suoi punti sopra un S_3; così potremo dedurre alcune conseguenze notevoli relativamente alla congruenza delle corde della quartica di 1ª specie Γ^4, di cui essa è immagine.

La proiezione della F_2^8 da due suoi punti generici sopra un S_3 è una Φ_2^6 con una cubica gobba doppia e con quattro rette doppie formanti un quadrangolo gobbo semplice inscritto in essa. Invece se essa si proietta da due suoi punti che corrispondano a due corde complanari della quartica Γ^4, è chiaro che i centri di proiezione sono vertici opposti di un quadrilatero piano completo inscritto in F_2^8, e quindi la proiezione risulta una Φ_2^6 con quattro rette doppie uscenti da un punto quadruplo e con una cubica piana doppia avente un nodo nel punto quadruplo. Esiste dunque in questo secondo caso una sezione iperpiana di F_2^8 passante per i centri di proiezione che da essi viene proiettata doppiamente in una cubica piana nodale.

Vogliamo vedere quale sia nella congruenza delle corde di Γ^4 l'immagine di codesta sezione iperpiana: così troveremo una conferma diretta dell'affermazione fatta in seguito ai risultati di (A).

Siano, per questo, A, B, C, D quattro punti complanari di Γ^4 e AB, CD le corde immagini dei centri di proiezione. Posto $M \equiv AB.CD$; $N \equiv AD.BC$ e $P \equiv AC.BD$ si consideri il complesso lineare speciale (dello spazio di Γ^4) avente per asse la retta PN: dico che questo complesso stacca dalla congruenza delle corde di Γ^4 la rigata immagine della sezione iperpiana in discorso.

Infatti sia RS una corda di Γ^4 appoggiata a PN in T, e sia X il punto di F_2^8 immagine di RS. Proiettare X dai centri di proiezione, significa considerare il piano asse della rete di S_4 che corrispondono agli ∞^2 complessi lineari passanti per AB, CD, ed RS. Una tal rete di complessi ha come rigata base una rigata quadrica spezzata in due fasci; uno dei fasci è quello di centro M e piano $A\,B\,C\,D$, l'altro è il fascio di centro T e piano $R\,S\,T\,M$.

Quindi sarà giustificata la nostra asserzione appena avremo fatto vedere che nel piano $R\,S\,T\,M$ vi è un'altra corda di Γ^4 passante per T.

Siano U e V le ulteriori intersezioni di Γ^4 col piano $R\,S\,T\,M$. Il piano polare di M, rispetto a una qualunque quadrica del fascio passante per Γ^4, contiene la retta PN, dunque il piano polare di T rispetto a una qualunque delle quadriche stesse passa per M. In particolare, il piano polare di T rispetto *alla* quadrica del fascio che passa per T (e contiene $R\,S\,T$) sarà dunque il piano $R\,S\,T\,M$, cioè $RSTM$ è il piano tangente in T alla quadrica in discorso (che passa per U e V); ma allora la retta UV passa per T; c. d. d.

41. Nell'intento sempre di esaminare le varie proiezioni di F_2^8, siano AB e CD due corde di Γ^4 tali che le BD e AC siano generatrici di uno stesso sistema di una quadrica Q^2 passante per Γ^4; siano poi P_{AB} e P_{CD} i punti di F_2^8 che rappresentano le corde AB e CD di Γ^4, e si immagini di proiettare F_2^8 sopra un S_3 precisamente dai punti P_{AB} e P_{CD}.

Le rette AB e CD e tutte quelle della quadrica Q^2 appoggiate ad AC e BD stanno in una congruenza lineare, in quella, cioè, che ha per direttrici AC e BD; dunque il piano della conica C_1^2 di F_2^8 rappresentata dalla detta schiera rigata di Q^2 e la retta $P_{AB}P_{CD}$ stanno in un S_3. Ciò vuol dire che $P_{AB}\,P_{CD}$ è una trisecante della V_3^6 dei piani delle coniche di F_2^8, mentre è soltanto una bisecante della F_2^8; la proiezione di F_2^8 da P_{AB} e P_{CD} riuscirà dunque *una Φ_2^6 con le coniche situate nei piani tangenti di un cono di 3^a classe* [cfr. (A), n. 44, 45 e seg.], e la conica C_1^2 si proietterà doppiamente in quella retta doppia di Φ_2^6 che in (A) fu chiamata r. Stavolta la linea doppia di Φ_2^6 è formata da cinque rette (cioè r e le immagini delle quattro cubiche piane di F_2^8 passanti per P_{AB} e P_{CD}) e da una conica.

Si può domandare quale sia la linea di F_2^8 che ha per immagine codesta conica.

Ebbene si consideri la schiera rigata di Q^2 cui *appartengono* BD e AC e la conica C_2^2 di F_2^8 di cui essa è immagine. Dei quattro punti dove si tagliano, fuori di P_{AB} e P_{CD}, le cubiche di F_2^8 uscenti da P_{AB} e P_{CD}, due, M ed N, stanno su C_2^2, poichè essi non sono altra cosa che le immagini di BD e AC. Considero l'S_4 che passa per C_2^2, P_{AB} e P_{CD}. Esso seca ulteriormente F_2^8 in una sestica C^6 di genere 2, bisecante le coniche di F_2^8 e passante per P_{AB} e P_{CD}; la proiezione di C^6 da P_{AB} e P_{CD} è dunque una quartica con un punto doppio, oppure, se non riesce biunivoca, una conica doppia. Ora è facile vedere che deve verificarsi questa seconda alternativa, poichè è facile persuadersi che la proiezione di C^6 ha più di un punto doppio.

Infatti il piano $P_{AB}\,P_{CD}\,M$ incontra in un punto ulteriore la cubica che passa per P_{AB} ed M e in un punto ulteriore la cubica che passa per P_{CD} ed M, e questi due punti situati entrambi su C^6 si riflettono in un punto doppio della sua proiezione. E lo stesso può ripetersi per il piano $P_{AB}\,P_{CD}\,N$; dunque è chiaro che C^6 ha per immagine appunto la conica doppia di Φ_2^6.

E qui si può aggiungere un'osservazione importante.

Sopra la Φ_2^6 del caso attuale una delle ∞^1 aggiunte alle sezioni piane (che si spezzano tutte in coppie di coniche) è formata dalla conica semplice di Φ_2^6 situata nel piano che ne contiene la conica doppia e dalla conica di Φ_2^6 che si spezza nella retta r contata due volte; dunque C_1^2 e C_2^2 prese insieme forniscono una delle ∞^1 aggiunte alle sezioni iperpiane della F_2^8. Ciò val quanto dire:

Le coppie di schiere rigate appartenenti alle varie quadriche passanti per una quartica sghemba di 1ª specie staccano gruppi canonici da tutte le rigate di 8⁰ grado e del genere 3 secondo cui la congruenza delle corde della quartica è secata dai vari complessi lineari del suo spazio.

42. *Rappresentazione sul cono cubico delle F_2^8 di S_5 del 1⁰ tipo.*

Dalle cose dette possiamo ricavare agevolmente la rappresentazione di una F_2^8 del primo tipo sopra un cono cubico (ellittico): per il che, basterà evidentemente rappresentare sopra un tal cono la congruenza delle corde di una quartica sghemba di 1ª specie.

Ebbene sia Γ^4 la quartica in questione e V un suo punto qualunque.

Per ottenere una rappresentazione della varietà delle corde di Γ^4 sui punti del cono cubico che la proietta da V basterà evidentemente coordinare ad ogni corda di Γ^4 quel punto del cono V in cui essa seca il cono fuori di Γ^4.

In questo modo, infatti, ad ogni corda di Γ^4 vien coordinato un punto di V e ad ogni punto di V vien coordinata una corda di Γ^4, poichè per ogni punto di V passano due corde di Γ^4 ma una di queste è appunto la generatrice di V che passa per quel punto.

Sia ora φ una delle rigate secondo cui la congruenza delle corde di Γ^4 è tagliata da un complesso lineare generico; φ è dell'8⁰ grado e del genere 3, ha in Γ^4 una quartica tripla e contiene tre generatrici del cono V.

Ma allora φ taglia il cono V, fuori di Γ^4 e di codeste tre generatrici, in una curva dell'ordine $8.3 - 4.3 - 3 = 9$ con un punto triplo nel vertice V del cono.

Si deduce da ciò che le immagini delle rigate staccate dalla congruenza delle corde di Γ^4 dai complessi lineari dello spazio ambiente, cioè le immagini delle sezioni iperpiane di F_2^8, sono intanto curve del 9⁰ ordine con un punto triplo in V.

Per trovare le altre singolarità di codeste curve, si noti che il cono V passa per i vertici A_1, A_2, A_3, A_4 dei quattro coni quadrici passanti per Γ^4, e che $A_i (i = 1, 2, 3, 4)$ è l'immagine sul cono V di tutte le corde di Γ^4 che costituiscono le generatrici del cono quadrico A_i. Ma allora quelle curve del 9^0 ordine hanno tutte quattro punti doppi in A_1, A_2, A_3 e A_4, poichè ogni complesso lineare contiene due generatrici di un cono quadrico.

Per la formula di Segre, si vede allora che esse non possono avere altre singolarità (atteso che debbono formare un sistema di genere 3 — e grado 8 —), quindi:

Una F_2^8 di S_5 del 1^0 tipo può sempre rappresentarsi sopra un cono cubico per modo che le immagini delle sezioni iperpiane siano curve del 9^0 ordine passanti tre volte per il vertice e con altri quattro punti-base doppi.

43. Vogliamo ora esaminare se nella costruzione precedente possano disporsi le cose in modo che le linee del 9^0 ordine, immagini delle sezioni iperpiane di F_2^8, possano staccarsi dal cono V mediante superficie cubiche.

Per questo si incominci dall'osservare che se M è un punto di Γ^4 le corde di Γ^4 uscenti da M riempiono un cono cubico il quale taglia il cono V secondo la corda MV, la quartica Γ^4 e una ulteriore quartica Γ_m. Questa quartica Γ_m è l'immagine sul cono V del cono riempito dalle corde di Γ^4 uscenti da M, cioè l'immagine di una delle cubiche di F_2^8. La tangente di Γ_m nel punto V deve essere una delle generatrici del cono V, cioè una delle corde di Γ^4; deve poi esser situata nel piano tangente lungo MV al cono M, cioè nel piano che proietta da M la retta g tangente a Γ^4 in V, dunque o è la retta g o è la retta proiettante da V l'ulteriore punto H ove il piano gM taglia Γ^4. Naturalmente la prima alternativa va esclusa perchè altrimenti tutte le ∞^1 quartiche di V per A_1, A_2, A_3, A_4 (e V) si toccherebbero in V (¹) dunque la tangente a Γ_m in V è la retta VH.

Sia ora N un altro punto di Γ^4, K l'ulteriore punto comune al piano gN e a Γ^4, e Γ_n la quartica che rappresenta su V il cono delle corde di Γ^4 uscenti da N; la retta tangente a Γ_n nel punto V sarà la retta VK.

(¹) Come abbiamo già detto, è dovuta al Segre l'osservazione che per cinque punti generici di un cono cubico (ellittico) passano due quartiche (di 1ª specie) situate sul cono; ma se di una quartica (irriducibile) situata sul cono si assegnano quattro punti e la tangente nel vertice essa è univocamente determinata.

Il complesso lineare speciale di asse MN stacca dalla congruenza delle corde di Γ^4 una rigata dell'8^0 grado spezzata nei coni cubici proiettanti Γ^4 da M e da N e nella schiera rigata riempita dalle corde di Γ^4 che si appoggiano ad MN. Se diciamo P il quarto punto di Γ^4 situato nel piano VMN, la direttrice di questa schiera uscente da V è la retta VL che proietta da V l'ulteriore punto L comune a Γ^4 e al piano Pg, dunque VL è l'immagine sul cono V della schiera rigata e l'immagine della rigata dell'8^0 grado in discorso sarà costituita da Γ_m, Γ_n e VL.

Ora se la linea del 9^0 ordine spezzata in Γ_m, Γ_n e VL potesse staccarsi dal cono V mediante una superficie del 3^0 ordine Φ, Φ non potrebbe avere nel punto V che un punto *semplice* e quindi le tangenti in V a Γ_m e Γ_n, cioè le rette VH e VK, e la retta VL dovrebbero stare in uno stesso piano.

Ebbene vediamo sotto quali condizioni può accadere che le rette VH, VK e VL stiano in uno stesso piano.

Diciamo u l'integrale di 1ª specie normale legato alla curva Γ^4 e u_x il valore che esso ha nel punto X di Γ_4; poi supponiamo scelte le cose in modo che per quattro punti complanari X_1, X_2, X_3, X_4 di Γ^4 si abbia:

$$u_{x_1} + u_{x_2} + u_{x_3} + u_{x_4} \equiv 0.$$

Allora si ha, per le ipotesi fatte:

$$2u_v + u_m + u_h \equiv 0 \,; \qquad 2u_v + u_n + u_k \equiv 0 \,; \qquad 2u_v + u_p + u_l \equiv 0 \,;$$

$$u_v + u_m + u_n + u_p \equiv 0.$$

Sommando membro a membro le prime tre congruenze e tenendo conto della quarta si ricava:

$$5u_v + u_h + u_k + u_l \equiv 0 \,;$$

se dunque si vuole che i quattro punti V, H, K ed L stiano in un piano occorre e basta che si abbia:

$$4u_v \equiv 0$$

cioè occorre e basta che V sia il punto di contatto di uno dei 16 piani stazionari di Γ^4.

Ebbene, nel costruire la rappresentazione studiata nel n. precedente, si prenda realmente il vertice V del cono cubico in uno dei 16 punti di contatto dei piani stazionari di Γ^4, cioè in uno dei punti in cui Γ^4 è tagliata dalle facce del tetraedro A_1, A_2, A_3, A_4, e poi siano Γ_m, Γ_n due quartiche di V per A_1, A_2, A_3, A_4 e VL la terza generatrice del cono V contenuta nel piano che congiunge le tangenti in V a Γ_m e Γ_n. Delle ∞^7 superficie del 3^0 ordine che passano per Γ_m, ve n'è ∞^1 che contengono VL e toccano il cono V in A_1, A_2, A_3, A_4. La linea base di codesto fascio di superficie cubiche, cui appartiene il cono V, si spezza in VL, Γ_m e in una residua quartica, che, dovendo passare per A_1, A_2, A_3, A_4 e toccare in V la terza generatrice del cono V situata in un piano con VL e la tangente in V a Γ_m, coinciderà con Γ_n [1]; quindi esiste una superficie del 3^0 ordine che seca il cono V in Γ_m, Γ_n e VL. Ma la curva composta da Γ_m, Γ_n e VL è nel caso attuale l'immagine di una sezione iperpiana di F_2^8, dunque le immagini di tutte le sezioni iperpiane di F_2^8 si possono staccare dal cono V mediante superficie del 3^0 ordine.

Si conclude che:

Ogni F_2^8 di S_5 del 1^0 tipo può rappresentarsi sopra un cono cubico mediante il sistema di linee del 9^0 ordine (con un punto triplo nel vertice del cono e con quattro altri punti-base doppi) staccato dal cono mediante un sistema di superficie cubiche che passano pel suo vertice e lo toccano in quattro punti.

Anzi, per quanto risulta da quel che precede, si può supporre che dei quattro punti-base doppi tre siano congiunti da un piano che passi pel vertice del cono.

44. *Le F_2^8 di S_5 del 2^0 tipo.*

Una prima osservazione, relativamente alle F_2^8 del 2^0 tipo, è che *esse contengono un sistema algebrico ∞^2 di quartiche sghembe costituito da due ∞^1 ellittiche di fasci.*

Infatti sia F_2^8 una superficie del 2^0 tipo e siano g ed h le sue due rette doppie. Supponiamo, per fissar le idee, che g ed h siano

[1] Per togliere ogni obbiezione è bene osservare che una superficie del fascio considerato, diversa dal cono V ha necessariamente in V un punto semplice. Infatti se essa fosse un monoide (l'impossibilità che essa possa essere un cono è manifesta) la linea base del fascio si comporrebbe di Γ_m, VL e delle quattro rette VA_1, VA_2 VA_3, e VA_4 e quindi starebbero sopra un cono quadrico le cinque rette $V(L\,A_1\,A_2\,A_3\,A_4)$ e la tangente a Γ_m in V: il che non è possibile data la genericità della scelta di Γ_m e Γ_n (cioè di Γ_m e VL).

distinte e consideriamo l'S_3 cui appartengono la retta g e il piano di una delle coniche della superficie. Esso è asse di un fascio di iperpiani secanti ulteriormente la F_2^8 in quartiche ellittiche, unisecanti le coniche di F_2^8, e codeste quartiche sono necessariamente sghembe perchè prive di punti doppi. Facendo variare il piano considerato fra quelli della V_3^6, riempita dai piani delle coniche della superficie, si ottiene il sistema algebrico ∞^2 sopra nominato.

Che scambiando la retta g con h si torna a trovare lo stesso sistema ∞^2 risulterà, con altre conseguenze notevoli, dalle seguenti osservazioni [1].

Prima di tutto è chiaro che ognuna delle quadriche costruite partendo dalla retta g si appoggia ad h in un punto: poichè se Γ^4 è l'ulteriore intersezione di F_2^8 con un S_4 che ne contenga g e una conica, il punto ove questa conica si appoggia ad h dovendo risultare doppio per la sezione iperpiana complessiva dovrà essere un punto semplice di Γ^4. Di più un iperpiano generico per g ed h secando ulteriormente F_2^8 in una coppia di coniche incontra Γ^4, fuori di g ed h, soltanto in due punti. Ciò significa che Γ^4 si appoggia in un punto non solo ad h, ma anche a g.

Diciamo A il punto ove Γ^4 si appoggia ad h, B quello ove si appoggia a g. Delle due coniche di F_2^8 uscenti da B, una secherà Γ^4 soltanto in B, l'altra la incontrerà in un punto ulteriore D (e allora sull'*ente algebrico* ∞^2 di cui F_2^8 è un modello proiettivo per questa seconda conica e per Γ^4 il punto B non è da considerarsi come un punto comune). L'S_3 che passa per h, B e D contiene già tre punti della Γ^4 (necessariamente non allineati) dunque ne contiene anche un quarto; *ed esiste un S_4 per h, B e D che contiene Γ^4 per intero.*

Ciò dimostra intanto che il sistema algebrico ∞^2 trovato prima partendo dalla considerazione della retta g, coincide con quello che si troverebbe partendo dalla considerazione della retta h.

Ma vi è di più. Diciamo C^2 la conica che completa una sezione iperpiana con Γ^4 e con la retta g contata due volte; C_1^2 quella che completa una sezione iperpiana con Γ^4 e con la retta h contata due volte; naturalmente C^2 passerà per A e C_1^2 per B. Il fascio di quartiche staccato su F_2^8 dagli iperpiani per g e C^2 ha una quartica (Γ^4) comune col fascio analogo generato dagli iperpiani

[1] Del resto la cosa stessa risulta subito da ciò che proiettando la F_2^8 da un suo punto generico sopra un S_4 si ottiene in questo una F_2^7 con *un* sistema algebrico ∞^1 di cubiche piane.

per h e C_1^2; d'altra parte su F_2^8 non può esistere una rete di quartiche sghembe, dunque i due fasci coincidono e tutte le loro ∞^1 quartiche passano per A e per B.

Il *resto* del considerato fascio di quartiche $|\Gamma^4|$ rispetto al sistema delle sezioni iperpiane di F_2^8 è, evidentemente, un altro fascio di quartiche $|\Gamma_*^4|$ e le quartiche di questo 2^0 fascio passano pure tutte tanto per A, quanto per B; dunque:

Per ogni punto di una delle rette doppie di F_2^8 passano ∞^1 quartiche sghembe (ellittiche) della superficie. Esse si distribuiscono in due fasci lineari e vanno tutte a tagliare l'altra retta doppia in un medesimo punto. In questo modo, fra i punti delle due rette doppie viene stabilita una corrispondenza proiettiva.

Notisi ancora che la proiezione di F_2^8 fatta dai due punti A e B sopra un S_3 generico risulta una quadrica doppia, i cui due sistemi di generatrici provengono dai due fasci di quartiche $|\Gamma^4|$ e $|\Gamma_*^4|$; dunque F_2^8 sta sopra un S_4-cono quadrico avente per vertice la retta AB.

Ma allora *F_2^8 può definirsi come la completa intersezione di tre quadriche dell'S_5 e nella rete delle quadriche per F_2^8 esistono ∞^1 quadriche doppiamente specializzate. Le rette doppie di queste quadriche costituiscono una schiera rigata ordinaria.*

Per arrivare a questi risultati noi abbiamo fatto per semplicità l'ipotesi che g ed h fossero distinte: ma è chiaro che essi restano sostanzialmente immutati anche se g ed h (rimanendo sempre sghembe) diventano infinitamente vicine fra loro.

45. Il teorema dimostrato nel n. precedente può essere invertito e così si arriva alla seguente costruzione della F_2^8 del 2^0 tipo.

Si prendano nell'S_5 due quadriche doppiamente specializzate con le rette-vertici, a e b, sghembe fra di loro, e siano g ed h, due, fra loro sghembe, delle quattro rette appoggiate ad a e b della V_3^4 secondo cui si intersecano le due quadriche. Questa V_3^4 è toccata in ogni punto di g da un S_3 che diremo α, e in ogni punto di h da un S_3 che diremo β.

Ebbene si consideri una terza quadrica tale che rispetto ad essa gli S_3 polari di g ed h siano precisamente α e β (e quindi che passi per g ed h): la completa intersezione delle tre quadriche in discorso sarà precisamente una F_2^8 del 2^0 tipo (1).

(1) Anche una F_2^8 del 2^0 tipo può considerarsi come l'immagine di una congruenza di rette dello spazio ordinario: anzi di una congruenza (del 4^0 grado) che sia intersezione completa di due complessi quadratici.

46. *Rappresentazione sul cono cubico delle F_2^8 di S_5 del 2⁰ tipo.* Sia F_2^8 una superficie di 2ª specie dell'S_5 del 2⁰ tipo e sia g una delle sue due rette doppie. Si proietti F_2^8 da g sopra un S_3: il risultato della proiezione sarà una rigata biquadratica e su questa il sistema $|C|$ delle sezioni iperpiane di F_2^8 sarà rappresentato da un sistema $|C'|$ di curve del 6⁰ ordine (con un punto doppio variabile sopra una delle direttrici della rigata) bisecate dalle generatrici e dall'altra direttrice (che in generale sarà distinta dalla prima). Ora tanto se la biquadratica è a direttrici distinte, quanto se è a direttrice unica tacnodale, essa si può convertire mediante una trasformazione quadratica in un cono cubico e attraverso questa trasformazione le C' si cangiano in curve dell'8⁰ ordine con tre punti doppi, dunque:

Ogni F_2^8 di 2ª specie di S_5 del 2⁰ tipo si può rappresentare sopra un cono cubico (ellittico) mediante un sistema di curve dell'8⁰ ordine con un punto doppio nel vertice del cono e con altri tre punti-base doppi.

Notisi che il piano contenente i tre punti-base doppi delle curve di 8⁰ ordine ora considerate non passa o passa per il vertice del cono secondo che sono distinte o infinitamente vicine le due rette doppie della F_2^8 corrispondente. Nel caso che il piano non passi per il vertice, una delle rette doppie della F_2^8 è rappresentata sul cono dalla sezione praticata con quel piano, l'altra ha per immagine il vertice.

47. *Sistemi lineari di genere 3 tracciati sul cono cubico (ellittico).* I risultati di (A) e di questo lavoro mentre dànno la classificazione completa delle superficie di 2ª specie a curve sezioni di genere 3, permettono di risolvere immediatamente il problema della riduzione dei sistemi lineari semplici di genere 3 e dimensione non inferiore a 3 tracciati nel cono cubico ellittico, quando siano posti a riscontro con quelli già conseguiti dai professori Castelnuovo e De Franchis [1].

E infatti un tal sistema può considerarsi come il sistema rappresentativo di una superficie irregolare a curve sezioni di genere 3 di uno spazio a tre o più dimensioni: e allora tale superficie o è dell'ordine 4, e quindi, se non è proiezione da qualche suo punto di una superficie iperspaziale, è una delle superficie con ∞^1 cubiche

[1] Castelnuovo, loc. cit. (Atti di Torino, vol. XXV, 1890); De Franchis (Rendic. Circolo Mat. di Palermo, tom. XIV, 1890).

gobbe trovate dal De Franchis, o è di un ordine maggiore di 4 e allora o rientra fra le superficie trovate dal Castelnuovo o è una di quelle trovate in questo lavoro.

Segue che:

Se $|C|$ è un sistema lineare semplice, almeno tre volte infinito, di curve di genere tre segnato sopra un cono cubico ellittico, esso è sempre (birazionalmente o cremonianamente (1)*) riducibile:*

α) a un sistema di curve del 9⁰ ordine, non passanti per il vertice, con due punti-base tripli, un punto-base doppio e un punto-base semplice (De Franchis); *oppure*

β) a un sistema di curve del 6⁰ ordine, non passanti per il vertice, con un punto-base doppio e, se occorre, con altri punti-base semplici (Castelnuovo); *oppure*

γ) a un sistema di curve dell'ordine $9-\mu$, passanti $3-\mu$ volte per il vertice del cono, con altri $4-\mu$ punti-base doppi ($\mu = 0,1$) e, se occorre, con qualche punto-base semplice.

Eccettuato poi il caso β) in cui il sistema di curve del 6⁰ ordine si può staccare dal cono mediante quadriche, in tutti gli altri casi i sistemi di curve che si presentano come sistemi tipici possono essere staccati dal cono mediante superficie cubiche.

Roma, 19 marzo 1910

(1) Vedi l'ultima nota a piè di pagina della Memoria del De Franchis ora citata.