OSSERVAZIONI VARIE SULLA TEORIA DELLE SOSTITUZIONI E SULLE PARTIZIONI DEI NUMERI INTERI IN NUMERI INTERI

Per una ricerca sulle funzioni abeliane a un numero qualunque di variabili, che sarà presto pubblicata, ho avuto bisogno di risolvere alcuni problemi di teoria delle sostituzioni, che non mi pare inutile di fissare in questa Nota per le curiose formule a cui dan luogo relativamente alle partizioni di un numero intero in numeri interi.

Ecco di che si tratta.

Fra i q elementi

(1) $$1, 2, \dots, q$$

prendiamone di mira τ, per es. i primi $\tau \, (1 \leq \tau \leq q)$

(2) $$1, 2, \dots, \tau.$$

Allora se si decompone in cicli (operanti su elementi diversi) (1), una qualunque sostituzione effettuata sugli elementi (1), può darsi che in ogni ciclo contenente qualcuno degli elementi (2) ne appaia un numero pari — nel qual caso bisognerà che τ sia un numero pari — oppure che in ognuno di codesti cicli ne appaia un numero dispari, oppure che qualche ciclo contenga un numero pari e qualche altro un numero dispari degli elementi (2).

Indichiamo rispettivamente con s_τ^q e con t_τ^q una sostituzione per la quale si presenti la prima o la seconda alternativa, e con S_τ^q

(1) Per non esser costretti a ripetizioni continue resti stabilito una volta per tutte che quando si parla di una decomposizione di una sostituzione in cicli si ha da intendere in cicli operanti su elementi diversi.

e T_τ^q [1] i numeri totali delle s_τ^q e delle t_τ^q. Ebbene, noi vogliamo dimostrare che, chiamato σ il massimo intero contenuto in $\frac{\tau}{2}$, si ha

$$S_\tau^q = T_\tau^q = \frac{1}{2^{2\sigma}}\binom{2\sigma}{\sigma} q\,!, \tag{3}$$

dove, beninteso, del simbolo S_τ^q non può parlarsi se non quando sia $\tau = 2\sigma$; dopo di che resta calcolato senz'altro, e per il caso di τ pari e per il caso di τ dispari, il numero delle sostituzioni per le quali si verifica la terza alternativa.

Alla dimostrazione delle (3), che per i primi valori di τ si giustifican subito, noi perverremo col metodo dell'induzione matematica: poi, cercando di calcolare i numeri S_τ^q e T_τ^q con un procedimento diretto e confrontando con le (3) alcuni dei risultati che ci si presenteranno, dimostreremo i seguenti teoremi:

I. *Se τ è un numero intero pari positivo (>0) qualunque, si ha*

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau} + \Sigma \frac{1}{j_1 j_2\, \delta_{j_1 j_2}} + \Sigma \frac{1}{j_1 j_2 j_3\, \delta_{j_1 j_2 j_3}} + \ldots \\ \ldots + \Sigma \frac{1}{j_1 j_2 \ldots j_k\, \delta_{j_1 j_2 \ldots j_k}} + \ldots = \frac{1}{2^\tau}\binom{\tau}{\frac{1}{2}\tau},\end{aligned} \tag{4}$$

dove il $(k-1)^{mo}$ sommatorio del primo membro $\left(2 \leq k \leq \frac{\tau}{2}\right)$ si estende a tutti i gruppi distinti di numeri interi pari positivi $j_1, j_2, \ldots$ $\ldots, j_k$ $(j_1 \leq j_2 \leq j_3 \leq \ldots \leq j_k)$ pei quali si ha

$$j_1 + j_2 + \ldots + j_k = \tau$$

e

$$\delta_{j_1 j_2 \ldots j_k} = \alpha\,!\, \beta\,!\, \gamma\,! \ldots$$

se per il considerato gruppo $j_1 j_2 \ldots j_k$ si ha

$$\begin{aligned}j_1 = j_2 = \ldots = j_\alpha < j_{\alpha+1} = j_{\alpha+2} = \ldots = j_{\alpha+\beta} < j_{\alpha+\beta+1} = \ldots \\ \ldots = j_{\alpha+\beta+\gamma} < j_{\alpha+\beta+\gamma+1} \ldots .\end{aligned}$$

[1] Occorre appena avvertire che i valori di S_τ^q e T_τ^q dipendono semplicemente dai numeri τ e q: essi cioè restano gli stessi anche se i τ elementi presi di mira nella serie di (1) non siano i primi τ. Si tenga presente questa osservazione per i ragionamenti che seguono nei n. successivi.

II. *Se τ è un numero pari positivo qualunque, si ha*

$$\Sigma \frac{1}{j_1 j_2\, \delta_{j_1 j_2}} + \dots + \Sigma \frac{1}{j_1 j_2 \dots j_{2k}\, \delta_{j_1 j_2 \dots j_{2k}}} + \dots = \frac{1}{2^\tau} \binom{\tau}{\frac{1}{2}\tau}, \tag{5}$$

dove i sommatori e le δ hanno lo stesso significato di prima, solo che questa volta si han da considerare le partizioni di τ in una somma di 2 o di 4 ... o di $2k$ ... numeri interi tutti dispari, anzi che tutti pari.

III. *Se τ è un numero dispari positivo qualunque, si ha*

$$\frac{1}{\tau} + \Sigma \frac{1}{j_1 j_2 j_3\, \delta_{j_1 j_2 j_3}} + \dots = \frac{1}{2^{\tau-1}} \binom{\tau-1}{\frac{1}{2}(\tau-1)}, \tag{6}$$

dove i sommatori e le δ hanno il solito significato e le partizioni di τ da considerare son quelle in 3, o 5, ... numeri interi tutti dispari.

IV. *Se τ è un numero intero positivo qualunque, si ha*

$$\frac{1}{\tau} + \Sigma \frac{1}{j_1 j_2\, \delta_{j_1 j_2}} + \dots + \Sigma \frac{1}{j_1 j_2 \dots j_k\, \delta_{j_1 j_2 \dots j_k}} + \dots = 1 \tag{7}$$

quando, restando sempre fermo il significato delle δ, si intenda che i sommatori si estendano a tutte le partizioni distinte di τ in una somma di 2, o 3, ... o k, ... numeri interi positivi [1].

[1] Per es. si ha $6 = 4 + 2 = 2 + 2 + 2$ oppure $6 = 5 + 1 = 3 + 3 = 3 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ e quindi:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{4.2} + \frac{1}{2^3.3!} = \frac{1}{5.1} + \frac{1}{3^2.2!} + \frac{1}{3.3!} + \frac{1}{6!} = \frac{1}{2^6}\binom{6}{3};$$

$7 = 5 + 1 + 1 = 3 + 3 + 1 = 3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ e quindi

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{5.2!} + \frac{1}{3^2.2!} + \frac{1}{3.4!} + \frac{1}{7!} = \frac{1}{2^6}\binom{6}{3};$$

infine

$$6 = 5 + 1 = 4 + 2 = 3 + 3 = 4 + 1 + 1 = 3 + 2 + 1 = 2 + 2 + 2$$

$$= 3 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

e quindi

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4.2} + \frac{1}{3^2.2!} + \frac{1}{4.2!} + \frac{1}{3.2} + \frac{1}{2^3.3!} + \frac{1}{3.3!} + \frac{1}{2^2.2!\,2!} + \frac{1}{2.4!} + \frac{1}{6!} = 1.$$

I.

1. Supponiamo che la formula

$$T^q_\tau = \frac{1}{2^{2\sigma}} \binom{2\,\sigma}{\sigma} q\,!$$

sia stata già dimostrata vera per i valori $1, 2, \ldots \tau$ di τ e facciamo vedere che allora è vera anche per il valore $\tau + 1$.

Per questo supponiamo di voler procedere alla costruzione di tutte le sostituzioni $t^q_{\tau+1}$, cioè di quelle sostituzioni sui q elementi (1) che si comportano rispetto alla serie

(8) $$1, 2, \ldots, \tau, \; \tau + 1$$

come le t^q_τ si comportano rispetto alla serie (2).

Consideriamo una $t^q_{\tau+1}$, immaginiamo di averla decomposta in cicli e prendiamo di mira il ciclo Γ che contiene l'elemento $\tau + 1$.

Detto k l'ordine di Γ, a formar Γ concorreranno, oltre l'elemento $\tau + 1$, un numero pari 2ϱ $(0 \leq 2\varrho \leq \tau)$ di elementi della serie (2) e altri $k - 2\varrho - 1$ elementi della serie (1) diversi da quelli che compaiono nella (8); poi se si immagina di scrivere il ciclo Γ ponendo al primo posto $\tau + 1$, esso non sarà fissato se non quando sia stato assegnato l'ordine in cui si debbono succedere i suoi $k - 1$ elementi residui. Il prodotto dei cicli di $t^q_{\tau+1}$ diversi da Γ è poi, evidentemente, una sostituzione, sui $q - k$ elementi di (1) diversi da quelli di Γ, che si comporta, rispetto ai $\tau - 2\varrho$ elementi di (8) che non appaiono in Γ, come $t^q_{\tau+1}$ si comporta rispetto agli elementi (8); e infine, fissato il valore di ϱ, l'ordine k di Γ può variare da $2\varrho + 1$ a $q - \tau + 2\varrho$.

Da tutto ciò segue che, indicato sempre con σ il massimo intero contenuto in $\frac{\tau}{2}$, si ha

$$T^q_{\tau+1} = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\sigma} \sum_{k=2\varrho+1}^{k=q-\tau+2\varrho} \binom{\tau}{2\varrho} \binom{q - \tau - 1}{k - 2\varrho - 1} (k-1)\,!\; T^{q-k}_{\tau-2\varrho}\,.$$

Ma, per ipotesi,

$$T^{q-k}_{\tau-2\varrho} = \frac{1}{2^{2\sigma-2\varrho}} \binom{2\sigma - 2\varrho}{\sigma - \varrho} (q-k)\,!\,,$$

quindi

$$T^q_{\tau+1}=\sum_{\varrho=0}^{\varrho=\sigma}\frac{1}{2^{2\sigma-2\varrho}}\binom{2\sigma-2\varrho}{\sigma-\varrho}\binom{\tau}{2\varrho}\sum_{k=2\varrho+1}^{k=q-\tau+2\varrho}\binom{q-\tau-1}{k-2\varrho-1}(k-1)!\,(q-k)!\,.$$

Ora

$$\binom{q-\tau-1}{k-2\varrho-1}(k-1)!\,(q-k)!=(2\varrho)!\,(\tau-2\varrho)!\,(q-\tau-1)!\binom{k-1}{2\varrho}\binom{q-k}{\tau-2\varrho}$$

e

$$\sum_{k=2\varrho+1}^{k=q-\tau+2\varrho}\binom{k-1}{2\varrho}\binom{q-k}{\tau-2\varrho}=\sum_{k=0}^{k=q-\tau-1}\binom{k+2\varrho}{2\varrho}\binom{q-k-2\varrho-1}{\tau-2\varrho}=\binom{q}{q-\tau-1}\ (^1);$$

dunque resta

$$T^q_{\tau+1}=\sum_{\varrho=0}^{\varrho=\sigma}\frac{1}{2^{2\sigma-2\varrho}}\binom{2\sigma-2\varrho}{\sigma-\varrho}\binom{\tau}{2\varrho}\binom{q}{q-\tau-1}(2\varrho)!\,(\tau-2\varrho)!\,(q-\tau-1)!\,,$$

ossia

(9) $$T^q_{\tau+1}=\frac{q!}{\tau+1}\sum_{\varrho=0}^{\varrho=\sigma}\frac{1}{2^{2\sigma-2\varrho}}\binom{2\sigma-2\varrho}{\sigma-\varrho}.$$

Adesso si supponga di far sulle t^q_τ e sul numero T^q_τ il ragionamento fatto sulle $t^q_{\tau+1}$ e il numero $T^q_{\tau+1}$; si troverà, indicato con σ' il massimo intero contenuto in $\dfrac{\tau-1}{2}$,

$$T^q_\tau=\frac{q!}{\tau}\sum_{\varrho=0}^{\varrho=\sigma'}\frac{1}{2^{2\sigma'-2\varrho}}\binom{2\sigma'-2\varrho}{\sigma'-\varrho};$$

ma noi abbiamo supposto che sia

$$T^q_\tau=\frac{1}{2^{2\sigma}}\binom{2\sigma}{\sigma}q!\,,$$

dunque

(10) $$\sum_{\varrho=0}^{\varrho=\sigma'}\frac{1}{2^{2\sigma'-2\varrho}}\binom{2\sigma'-2\varrho}{\sigma'-\varrho}=\frac{\tau}{2^{2\sigma}}\binom{2\sigma}{\sigma}.$$

(1) Vedi: Netto, *Lehrbuch der Kombinatorik* (Leipzig, Teubner, 1901), pag. 251, form. (26).

Se τ è dispari, $\sigma = \sigma'$, e quindi il sommatorio del 2^0 membro della (9) è identico a quello del primo membro della (10); se τ è pari, $\sigma' = \sigma - 1$ e

$$\sum_{\varrho=0}^{\varrho=\sigma} \frac{1}{2^{2\sigma-2\varrho}} \binom{2\sigma-2\varrho}{\sigma-\varrho} = \frac{1}{2^{2\sigma}} \binom{2\sigma}{\sigma} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\sigma} \frac{1}{2^{2\sigma-2\varrho}} \binom{2\sigma-2\varrho}{\sigma-\varrho} =$$

$$= \frac{1}{2^{2\sigma}} \binom{2\sigma}{\sigma} + \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\sigma'} \frac{1}{2^{2\sigma'-2\varrho}} \binom{2\sigma'-2\varrho}{\sigma'-\varrho};$$

dunque in ogni caso il sommatorio del 2^0 membro della (9) può calcolarsi facilmente e così si finisce per trovare, come volevasi,

$$T^q_{\tau+1} = \frac{1}{2^{2\sigma_1}} \binom{2\sigma_1}{\sigma_1} q!,$$

dove σ_1 è il massimo intero contenuto in $\dfrac{\tau+1}{2}$.

2. Osservazione. Col ragionamento precedente non solo resta stabilita la formula che assegna il valore di T^q_τ ma incidentalmente resta pure dimostrato che

$$\sum_{\varrho=0}^{\varrho=\sigma} \frac{1}{2^{2\sigma-2\varrho}} \binom{2\sigma-2\varrho}{\sigma-\varrho} = \frac{2\sigma+1}{2^{2\sigma}} \binom{2\sigma}{\sigma}, \tag{11}$$

ossia che:

$$\sum_{\varrho=0}^{\varrho=\sigma} \frac{1}{2^{2\varrho}} \binom{2\varrho}{\varrho} = \frac{2\sigma+1}{2^{2\sigma}} \binom{2\sigma}{\sigma}. \tag{12}$$

3. Passiamo ora a far vedere che se la formula

$$S^q_{2\sigma} = \frac{1}{2^{2\sigma}} \binom{2\sigma}{\sigma} q!$$

è vera per i valori $2, 4, \ldots, 2\sigma$ dell'indice 2σ, si ha pure

$$S^q_{2\sigma+2} = \frac{1}{2^{2\sigma+2}} \binom{2\sigma+2}{\sigma+1} q!.$$

Indichiamo con $s^q_{2\sigma+2}$ una sostituzione sugli elementi (1) che si comporti rispetto alla serie

$$1,\ 2,\ \ldots,\ 2\sigma,\ \ 2\sigma+1,\ \ 2\sigma+2 \tag{13}$$

come le s^q_τ di cui si discorre nell'introduzione rispetto alla serie (2); e presa a considerare una di codeste $s^q_{2\sigma+2}$ immaginiamo di averla decomposta in cicli.

Due casi possono presentarsi:

α) o gli elementi $2\sigma+1$ e $2\sigma+2$ compariscono in uno stesso suo ciclo;

β) o gli elementi $2\sigma+1$ e $2\sigma+2$ compariscono in due suoi cicli differenti.

Per ragionamenti analoghi a quello sviluppato al principio del n. 1, il numero totale delle $s^q_{2\sigma+2}$ per le quali si verifica l'alternativa α) è dato da

$$\sum_{\varrho=0}^{\varrho=\sigma} \sum_{k=2\varrho+2}^{k=q-2\sigma+2\varrho} \binom{2\sigma}{2\varrho} \binom{q-2\sigma-2}{k-2\varrho-2} (k-1)!\, S^{q-k}_{2\sigma-2\varrho},$$

mentre quello delle $s^q_{2\sigma+2}$ per le quali si verifica l'alternativa β) è dato da

$$\sum_{\varrho=0}^{\varrho=\sigma-1} \sum_{k=2\varrho+2}^{k=q-2\sigma+2\varrho} \binom{2\sigma}{2\varrho+1} \binom{q-2\sigma-2}{k-2\varrho-2} (k-1)!\, S^{q-k}_{2\sigma-2\varrho}$$

o anche, giacchè per $\varrho=\sigma$ si ha $\binom{2\sigma}{2\varrho+1}=0$, da

$$\sum_{\varrho=1}^{\varrho=\sigma} \sum_{k=2\varrho+2}^{k=q-2\sigma+2\varrho} \binom{2\sigma}{2\varrho+1} \binom{q-2\sigma-2}{k-2\varrho-2} (k-1)!\, S^{q-k}_{2\sigma-2\varrho};$$

dunque, in virtù dell'identità

$$\binom{2\sigma}{2\varrho+1}+\binom{2\sigma}{2\varrho}=\binom{2\sigma+1}{2\varrho+1},$$

possiamo scrivere:

$$S^q_{2\sigma+2}=\sum_{\varrho=0}^{\varrho=\sigma} \sum_{k=2\varrho+2}^{k=q-2\sigma+2\varrho} \binom{2\sigma+1}{2\varrho+1} \binom{q-2\sigma-2}{k-2\varrho-2} (k-1)!\, S^{q-k}_{2\sigma-2\varrho}.$$

Di qua, poichè

$$S^{q-k}_{2\sigma-2\varrho}=\frac{1}{2^{2\sigma-2\varrho}}\binom{2\sigma-2\varrho}{\sigma-\varrho}(q-k)!,$$

segue

$$S^q_{2\sigma+2}=\sum_{\varrho=0}^{\varrho=\sigma} \frac{1}{2^{2\sigma-2\varrho}} \binom{2\sigma-2\varrho}{\sigma-\varrho} \binom{2\sigma+1}{2\varrho+1} \sum_{k=2\varrho+2}^{k=q-2\sigma+2\varrho} \binom{q-2\sigma-2}{k-2\varrho-2} (k-1)!\,(q-k)!\,.$$

Ora

$$\binom{q-2\sigma-2}{k-2\varrho-2}(k-1)!(q-k)!=(2\varrho+1)!(2\sigma-2\varrho)!(q-2\sigma-2)!\binom{k-1}{2\varrho+1}\binom{q-k}{2\sigma-2\varrho}$$

e

$$\sum_{k=2\varrho+2}^{k=q-2\sigma+2\varrho}\binom{k-1}{2\varrho+1}\binom{q-k}{2\sigma-2\varrho}=$$

$$=\sum_{k=0}^{k=q-2\sigma-2}\binom{k+2\varrho+1}{2\varrho+1}\binom{q-k-2\varrho-2}{2\sigma-2\varrho}=\binom{q}{q-2\sigma-2}\ (^1),$$

dunque

$$S^q_{2\sigma+2}=$$

$$=\sum_{\varrho=0}^{\varrho=\sigma}\frac{1}{2^{2\sigma-2\varrho}}(2\varrho+1)!(2\sigma-2\varrho)!(q-2\sigma-2)!\binom{2\sigma-2\varrho}{\sigma-\varrho}\binom{2\sigma+1}{2\varrho+1}\binom{q}{q-2\sigma-2},$$

cioè

$$S^q_{2\sigma+2}=\frac{q\,!}{2\sigma+2}\sum_{\varrho=0}^{\varrho=\sigma}\frac{1}{2^{2\sigma-2\varrho}}\binom{2\sigma-2\varrho}{\sigma-\varrho}.$$

Ma allora, in virtù della (11), si ha appunto:

$$S^q_{2\sigma+2}=\frac{2\sigma+1}{2\sigma+2}\frac{1}{2^{2\sigma}}\binom{2\sigma}{\sigma}q\,!=\frac{1}{2^{2\sigma+2}}\binom{2\sigma+2}{\sigma+1}q\,!.$$

Con ciò la formula (3) dell'introduzione è pienamente giustificata.

II.

4. Per arrivare alla dimostrazione dei Teoremi I, II, III e IV giova partire dalle seguenti considerazioni.

Supponiamo in primo luogo di voler determinare quante sono le sostituzioni su gli elementi (1) per ciascuna delle quali accade che decompostala in cicli gli elementi (2) appaiano tutti in uno stesso suo ciclo.

(1) Loc. cit. a pag. 469, nota (1).

Con un ragionamento analogo a quello sviluppato al principio del n. 1, si riconosce subito che il loro numero totale è dato da

$$\sum_{k=\tau}^{k=q}\binom{q-\tau}{k-\tau}(k-1)!\,(q-k)! = \sum_{k=0}^{k=q-\tau}\binom{q-\tau}{k}(k+\tau-1)!\,(q-k-\tau)! =$$

$$=(q-\tau)!\,(\tau-1)!\sum_{k=0}^{k=q-\tau}\binom{k+\tau-1}{\tau-1}=(q-\tau)!\,(\tau-1)!\binom{q}{\tau}=\frac{q!}{\tau}.$$

5. Adesso facciamo un secondo passo, cioè domandiamoci quante sono le sostituzioni su gli elementi (1) che contengono quelli della serie (2) in due loro cicli distinti.

Per questo scindiamo la totalità degli elementi (2) in due parti di j_1 e j_2 elementi rispettivamente; sarà

$$j_1+j_2=\tau$$

e tale scissione potrà farsi in tutto in

$$\frac{\tau!}{j_1!\,j_2!\,\delta_{j_1 j_2}}$$

modi distinti, dove

$$\delta_{j_1 j_2}=\begin{cases}1 & \text{se } j_1 \neq j_2,\\ 2! & \text{se } j_1=j_2.\end{cases}$$

Supponiamo che una partizione degli elementi (2) in due insiemi di j_1 e j_2 elementi, rispettivamente, sia quella fornita dalle serie

$$1, 2, \ldots, j_1 \tag{14}$$

e

$$j_1+1,\ j_1+2, \ldots, \tau. \tag{15}$$

Allora il numero totale delle sostituzioni sugli elementi (1) che contengono in un unico ciclo d'ordine $k\,(j_1 \leq k \leq q-j_2)$ gli elementi (14) e in un unico ciclo gli elementi (15) è dato da

$$\sum_{k=j_1}^{k=q-j_2}\binom{q-\tau}{k-j_1}(k-1)!\,\frac{(q-k)!}{j_2}=$$

$$=(q-\tau)!\,(j_1-1)!\,(j_2-1)!\sum_{k=j_1}^{k=q-j_2}\binom{k-1}{j_1-1}\binom{q-k}{j_2};$$

ossia, poichè

$$\sum_{k=j_1}^{k=q-j_2}\binom{k-1}{j_1-1}\binom{q-k}{j_2}=\sum_{k=0}^{k=q-\tau}\binom{j_1+k-1}{j_1-1}\binom{q-k-j_1}{j_2}=\binom{q}{q-\tau},$$

da

$$\frac{(j_1-1)\,!\,(j_2-1)\,!}{\tau\,!}\,q\,!\,.$$

Di qua segue che il numero totale delle sostituzioni sugli elementi (1) ciascuna delle quali contiene in un suo ciclo j_1 elementi della serie (2) e in un altro suo ciclo i rimanenti $\tau - j_1 = j_2$ elementi della serie stessa è dato da

$$\frac{\tau\,!}{j_1\,!\,j_2\,!\,\delta_{j_1 j_2}}\cdot\frac{(j_1-1)\,!\,(j_2-1)\,!}{\tau\,!}\,q\,!=\frac{q\,!}{j_1 j_2\,\delta_{j_1 j_2}}$$

e quindi il numero richiesto al principio di questo articolo è

$$q\,!\,\Sigma\,\frac{1}{j_1 j_2\,\delta_{j_1 j_2}},$$

dove il segno di somma si intende esteso a tutte le partizioni distinte di τ in due interi (positivi) j_1 e j_2.

6. Fondandosi sul risultato ora conseguito e ragionando in maniera analoga, si trova che le sostituzioni sugli elementi (1) che contengono quelli della serie (2) in tre cicli distinti è dato da

$$q\,!\,\Sigma\,\frac{1}{j_1 j_2 j_3\,\delta_{j_1 j_2 j_3}},$$

dove il sommatorio si estende a tutte le partizioni di τ in tre interi (positivi) j_1, j_2 e j_3 e $\delta_{j_1 j_2 j_3}$ ha il significato stabilito nell'introduzione; e così procedendo di passo in passo si giunge a dimostrare che le sostituzioni sugli elementi (1) per ciascuna delle quali accade che gli elementi (2) si distribuiscono in k suoi cicli distinti sono in numero di

$$q\,!\,\Sigma\,\frac{1}{j_1 j_2 \cdots j_k\,\delta_{j_1 j_2 \cdots j_k}},$$

dove il significato dei simboli introdotti può riguardarsi ormai come noto.

7. Dopo ciò basta ricordare che il numero N delle sostituzioni su q elementi è $q!$ e che S^q_r e T^q_r sono dati dalla formula (3) e computare N, S^q_r e T^q_r distinguendo le sostituzioni che contengono gli elementi (2) in un unico ciclo da quelle che li contengono in due, o tre, o quattro, ... cicli, per arrivare immediatamente alla dimostrazione dei Teoremi IV, I, II, e III.

Cagliari, 25 marzo 1913.