Complément au travail „Sur le théorème intégral de Cauchy“.

Par

M. W. Wilkosz (Cracovie).

Le but essentiel du travail „Sur le théorème intégral de Cauchy“ inséré dans ce volume (p. 19 *ss.*) consistait à démontrer le théorème de Montel-Looman sur les équations de Cauchy-Riemann et cela sous les conditions suivantes:

Supposons les fonctions $p(x, y)$ et $q(x, y)$ *continues* dans le domaine D et douées dans tout point de ce domaine de dérivées partielles du 1er ordre *finies*. Supposons encore les relations:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

vérifiées *presque* partout dans le domaine D. Dans ce cas, les fonctions $p(x, y)$ et $q(x, y)$ représentent respectivement la partie *réelle* et *imaginaire* d'une fonction *analytique* dans le domaine considéré. Il est bien connu que la démonstration de cette proposition s'achève immédiatement lorsque l'on possède comme lemme le Théorème du travail mentionné (p. 20).

Dans cet énoncé, aux conditions du Théorème que nous venons de citer, *s'ajoutent automatiquement* les conditions *d'existence* et de *finitude* des dérivées

$$\frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial q}{\partial y}.$$

Pour achever rigoureusement la démonstration du Théorème, nous appliquerons donc le lemme de M. Looman (p. 21) à l'ensemble des rapports

$$\frac{p(x,y')-p(x,y'')}{y'-y''}, \qquad \frac{p(x',y)-p(x'',y)}{x'-x''}$$
$$\frac{q(x,y')-q(x,y'')}{y'-y''}, \qquad \frac{q(x',y)-q(x'',y)}{x'-x''}$$

en modifiant en même temps dans ce sens les suppositions au commencement du N⁰ 4 (p. 21).

Lorsque l'on considère le Théorème (p. 20) en lui-même, *l'existence* et la *finitude* des dérivées

$$\frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial q}{\partial y}$$

doit être (au moins dans notre raisonnement) *additionellement postulée* [1]).

Les résultats obtenus se prêtent à une *généralisation* immédiate: au lieu de supposer *l'existence* des dérivées

$$\frac{\partial p}{\partial x}, \ \frac{\partial p}{\partial y}, \ \frac{\partial q}{\partial x}, \ \frac{\partial q}{\partial y}$$

en tout point du domaine D, il *suffit* d'exiger que:

1⁰ les *nombres dérivés* de Dini par rapport à x et y des fonctions $p(x, y)$ et $q(x, y)$ soient *partout finis*;

2⁰ les *dérivées* existent *presque* partout et satisfassent aux relations de Cauchy-Riemann *presque* partout dans le domaine D.

On voit facilement que dans ce cas la démonstration du texte reste presque inaltérée. Nous nous trouvons alors exactement dans les conditions de M. Looman. Une généralisation analogue s'applique au Théorème (p. 20) de notre travail.

---

[1]) Je dois cette remarque à l'amabilité de M. Saks.