

4.45 — maszyny,
mechanizmy

Wojciech Szczepiński

ANALIZA DOKŁADNOŚCI POZYCJONOWANIA
MANIPULATORÓW ROBOTÓW
O RUCHACH PRZESTRZENNYCH

54/1988

P.269



WARSZAWA 1988

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 8 listopada 1988 r.



56746



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark.wyd. 2,85 Ark.druk. 3,75

Oddano do drukarni w styczniu 1989

Nr zamówienia 158/89

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Sniadeckich 8

ANALIZA DOKŁADNOŚCI POZYCJONOWANIA MANIPULATORÓW
ROBOTÓW O RUCHACH PRZESTRZENNYCH

Streszczenie

Przedstawiono metodę wyznaczania błędów pozycjonowania manipulatorów robotów o ruchu przestrzennym. Dla każdego z możliwych położeń chwytaka można wyznaczyć obszar, wewnątrz którego mieszczą się wszystkie wektory możliwych odchyień od położenia nominalnego w założeniu, że znane są skrajne dopuszczalne odchylenia dokładności ustawienia wszystkich par kinematycznych manipulatora. Obszar ten ma postać wielościanu i jest w pracy określany jako bryła tolerancyjna dokładności pozycjonowania.

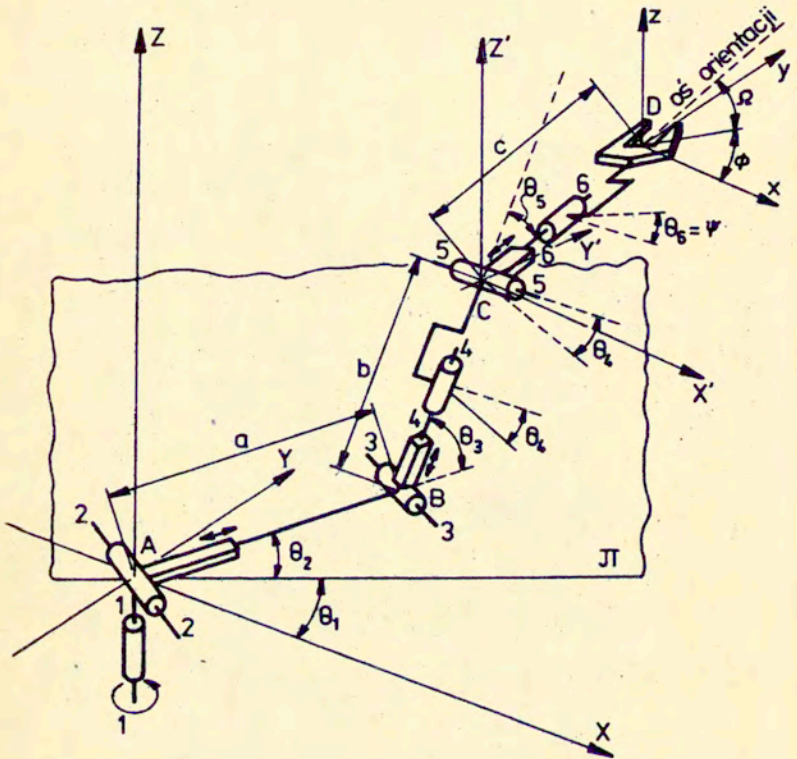
1. Wstęp

W poprzedniej pracy [1] rozpatrywano zagadnienie wyznaczania pól tolerancyjnych dokładności pozycjonowania manipulatorów robotów o ruchach płaskich. Pokazano również sposób wyznaczania tak zwanych brył /obszarów/ tolerancyjnych dla pewnego szczególnego typu manipulatorów o ruchu przestrzennym. Problem dokładności pozycjonowania manipulatorów o ruchu przestrzennym był rozpatrywany na przykład w książce R.Paula [2], w której podano również inne pozycje literatury dotyczące tej dziedziny. Odnotujmy również polskie prace J.Knapczyka, A.Moreckiego i R.Hipfa [3] oraz J.Knapczyka i A.Moreckiego [4] z tego zakresu. Podano w nich również odsyłacze do nowszych pozycji literatury.

W manipulatorach robotów o przestrzennych ruchach istotne jest równoczesne zbadanie wrażliwości pozycji i orientacji jego końcówki, na przykład w postaci chwytaka, na błędy ustawienia jego poszczególnych par kinematycznych przy kolejnym powtarzaniu ruchów. W niniejszej pracy zajmiemy się zagadnieniem wyznaczania całego obszaru możliwych odchyłeń pozycji chwytaka roboczego przy wszystkich możliwych kombinacjach wielkości błędów ustawienia wszystkich par kinematycznych. Obszar taki będziemy określali jako bryłę tolerancyjną dokładności pozycjonowania.

Sposób racjonalnego budowania takich obszarów tolerancyjnych został podany w pracy autora [5] jeszcze w roku 1955 w zastosowaniu do mechanizmów o ruchu płaskim. Jednakże ówczesne zapotrzebowanie ze strony świata techniki tymi zagadnieniami było bardzo ograniczone. Obecny rozwój manipulatorów przemysłowych stwarza potrzebę analizy dokładności ich ruchów, Obecne opracowanie stanowi uogólnienie poprzedniej pracy [5] na mechanizmy o ruchu przestrzennym.

Będziemy rozpatrywali pewną ogólną klasę manipulatorów wyposażonych w kilka obrotowych i kilka posuwisto-zwrotnych /pryzmatycznych/ par kinematycznych. Dla przykładu na rys.1 pokazano schemat dość rozbudowanego manipulatora tej klasy. Wyposażony on jest w sześć obrotowych par kinematycznych i trzy posuwisto-zwrotne pary kinematyczne. Obrotowe pary kinematyczne umożliwiają ustawienie wymiarów kątowych odpowiednio od θ_1 do θ_6 , a pary posuwisto-zwrotne umożliwiają ustawienie długości ramion a , b i c . Dowolna pozycja okreś-



rys.1.

lonego punktu D chwytaka może być określona w przyjętym układzie współrzędnych X, Y, Z przez funkcje ustawczych wymiarów kątowych i liniowych

$$(1) \quad \begin{aligned} X &= X(a, b, c, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6) , \\ Y &= Y(a, b, c, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6) , \\ Z &= Z(a, b, c, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6) , \end{aligned}$$

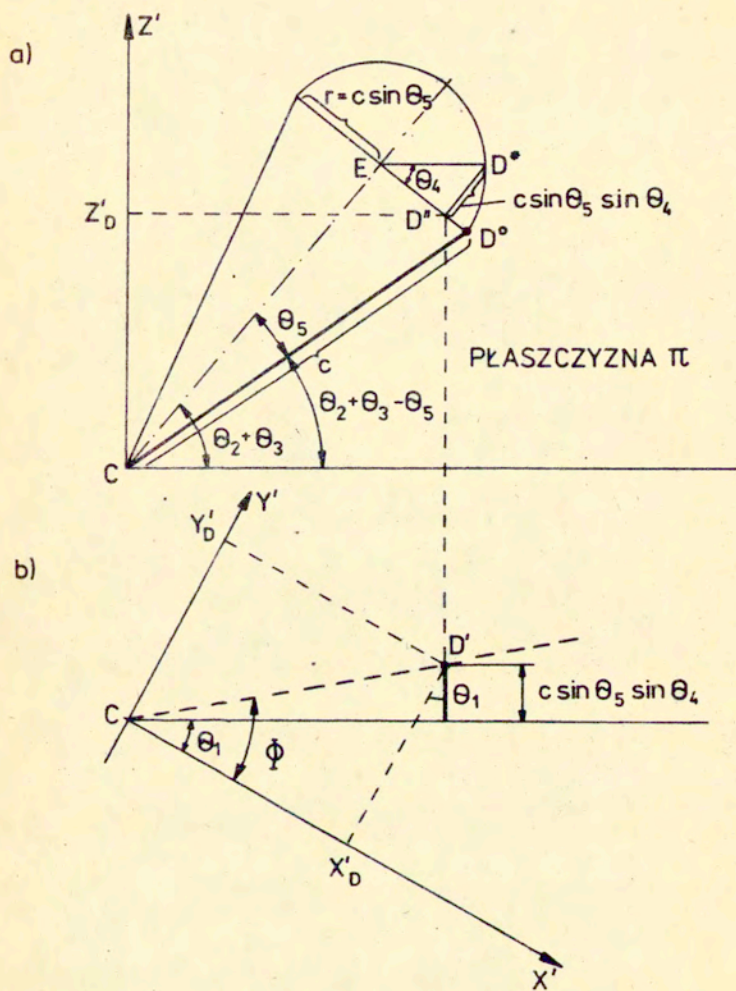
albo ogólnie, jeśli uogólniony wymiar ustawczy /liniowy lub kątowy/ oznaczmy przez q_i / $i = 1, 2, \dots, n$ /

$$(2) \quad \begin{aligned} X &= X(q_1, q_2, \dots, q_n) , \\ Y &= Y(q_1, q_2, \dots, q_n) , \\ Z &= Z(q_1, q_2, \dots, q_n) , \end{aligned}$$

gdzie n jest liczbą wszystkich wymiarów ustawczych.

Funkcje (1) mają zwykle dość złożoną postać, ale ich określenie nie sprawia większych trudności. Pokażemy sposób ich wyznaczania na przykładzie układu z rys.1.

Przy ustalonym kącie θ_1 ruchy segmentów A-B i B-C zachodzą w płaszczyźnie π , przechodzącej przez oś Z i wyznaczonej przez wartość kąta θ_1 . Przy obrocie pary kinematycznej o osi 4-4 następuje ruch segmentu C-D, którego oś opisuje powierzchnię stożkową. Osią stożka jest przedłużenie osi segmentu B-C, a jego wierzchołkiem jest punkt C. Wprowadźmy teraz pomocniczy układ współrzędnych $X'Y'Z'$ o osiach równoległych odpowiednio do osi układu XYZ i początku w wierzchołku stożka C. W tym układzie wyznaczmy współrzędne punktu D. Wygodnie jest rozpatrywać wstępnie zależności na płaszczyźnie π /rys.2a/. Gdyby kąt skręcenia θ_4 w parze kinematycznej



rys.2.

4-4 równał się zeru to również końcowe ramię C-D leżałoby w tej płaszczyźnie, a jego końcowy punkt zajmowałby pozycję oznaczoną przez D^0 na rysunku. Wówczas mielibyśmy sytuację odpowiadającą manipulatorowi o ruchu płaskim. Jeśli jednak kąt skręcenia θ_4 nie równa się zeru to punkt D dokonuje obrotu względem osi stożka C-E o kąt θ_4 z położenia D^0 do położenia pokazanego na kładzie przekroju stożka jako punkt D^* . Rzut tego punktu w tym nowym położeniu na płaszczyznę Π oznaczono przez D'' , a rzut na płaszczyznę $X'Y'$ znajduje się w położeniu oznaczonym przez D' /rys.2b/.
Z rozważań trygonometrycznych otrzymujemy następujące wyrażenia na współrzędne punktu D w pomocniczym układzie współrzędnych $X'Y'Z'$

$$X' = c \left\{ \left[\cos(\theta_2 + \theta_3 - \theta_5) - \sin\theta_5 \sin(\theta_2 + \theta_3) (1 - \cos\theta_4) \right] \cos\theta_1 + \right. \\ \left. - \sin\theta_5 \sin\theta_4 \sin\theta_1 \right\} ,$$

$$(a) \quad Y' = c \left\{ \left[\cos(\theta_2 + \theta_3 - \theta_5) - \sin\theta_5 \sin(\theta_2 + \theta_3) (1 - \cos\theta_4) \right] \sin\theta_1 + \right. \\ \left. + \sin\theta_5 \sin\theta_4 \cos\theta_1 \right\} ,$$

$$Z' = c \left[\sin(\theta_2 + \theta_3 - \theta_5) + \sin\theta_5 \cos(\theta_2 + \theta_3) (1 - \cos\theta_4) \right] .$$

Wartości współrzędnych punktu D w podstawowym układzie współrzędnych XYZ otrzymamy dodając wyrażenia (a) do odpowiednich wyrażeń na współrzędne punktu C. Ostatecznie otrzymujemy następujące wyrażenia

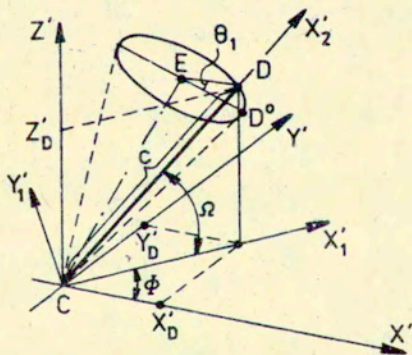
$$X = [a \cos\theta_2 + b \cos(\theta_2 + \theta_3)] \cos\theta_1 + c \left\{ [\cos(\theta_2 + \theta_3 - \theta_5) - \sin\theta_5 \sin(\theta_2 + \theta_3)(1 - \cos\theta_4)] \cos\theta_1 - \sin\theta_5 \sin\theta_4 \sin\theta_1 \right\},$$

$$(3) \quad Y = [a \cos\theta_2 + b \cos(\theta_2 + \theta_3)] \sin\theta_1 + c \left\{ [\cos(\theta_2 + \theta_3 - \theta_5) - \sin\theta_5 \sin(\theta_2 + \theta_3)(1 - \cos\theta_4)] \sin\theta_1 + \sin\theta_5 \sin\theta_4 \cos\theta_1 \right\},$$

$$Z = a \sin\theta_2 + b \sin(\theta_2 + \theta_3) + c [\sin\theta_5 \cos(\theta_2 + \theta_3)(1 - \cos\theta_4) + \sin(\theta_2 + \theta_3 - \theta_5)].$$

Określają one pozycję punktu D jako funkcję wszystkich wymiarów ustawczych.

Oprócz określenia pozycji ważne jest również określenie orientacji chwytaka w przestrzeni. Można ją na przykład określić za pomocą kątów Φ , Ω , $\bar{\Psi}$ pokazanych schematycznie na



rys.3.

rys.1 w lokalnym układzie współrzędnych x, y, z związanych z rozpatrywanym położeniem punktu D. Osie tego układu są równoległe do osi podstawowego układu X, Y, Z . Wielkości tych kątów jako funkcje kątów $\theta_1, \theta_2 \dots \theta_6$ najdogodniej określić rozpatrując zagadnienie we wprowadzonym już poprzednio pomocniczym układzie współrzędnych $X'Y'Z'$. Jeżeli jako sytuację odniesienia przyjmiemy orientację osi chwytaka wzdłuż osi X' to rozpatrywany kierunek C-D tej osi /rys.3/ można otrzymać najpierw przez obrót o kąt Φ wokół osi Z' do położenia osi współrzędnych oznaczonych przez $X'_1 Y'_1$, a następnie przez obrót wokół nowego położenia osi Y'_1 o kąt Ω . Ostateczną orientację chwytaka określa następnie obrót wokół nowego położenia osi X'_2 o pewien kąt Ψ . Na podstawie rys.3 możemy napisać

$$(4) \quad \Phi = \arctg \frac{Y'_D}{X'_D}, \quad \Omega = \arcsin \frac{Z'_D}{CD}.$$

Szczegółowe wyrażenia na kąty Φ, Ω, Ψ są bardzo złożone i nie zostały tu podane dla pokazanego na rys.1 ogólnego typu manipulatora, ponieważ przedmiotem rozważań w tej pracy jest analiza dokładności pozycjonowania, a nie orientacji. Ogólnie kąty orientacji chwytaka wyrażają się przez uogólnione wymiary ustawcze q_i / $i = 1, 2, \dots, n$ /

$$(5) \quad \begin{aligned} \Phi &= \Phi(q_1, q_2, \dots, q_n), \\ \Omega &= \Omega(q_1, q_2, \dots, q_n), \\ \Psi &= \Psi(q_1, q_2, \dots, q_n). \end{aligned}$$

Jeśli przy powtarzających się kolejnych ruchach manipulatora każdy z jego wymiarów ustawczych q_i zostaje ustawiony z pewnym odchyleniem Δq_i od żadanego ustawienia nominalnego, to punkt D chwytaka zajmie pozycję odchyloną od żądanej pozycji nominalnej o pewien wektor, którego składowe w lokalnym układzie współrzędnych x, y, z mają następujące wielkości

$$(6) \quad x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x}{\partial q_i} \Delta q_i, \quad y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial q_i} \Delta q_i, \quad z = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z}{\partial q_i} \Delta q_i.$$

Podobnie kąty orientacji chwytaka Φ, Ω, Ψ doznają małych odchylen od swych żądanych nominalnych wielkości. Odchylenia te oznaczone odpowiednio małymi literami φ, ω, ψ będą się równały

$$(7) \quad \varphi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \Delta q_i, \quad \omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Omega}{\partial q_i} \Delta q_i, \quad \psi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Psi}{\partial q_i} \Delta q_i.$$

Pochodne cząstkowe występujące w wyrażeniach (6) i (7) można traktować jako współczynniki wrażliwości odpowiednio dokładności pozycjonowania i orientacji na błędy ustawienia poszczególnych par kinematycznych. Można je zestawić w postaci macierzy funkcyjnej

(8)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial q_1} & \frac{\partial X}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial X}{\partial q_n} \\ \frac{\partial Y}{\partial q_1} & \frac{\partial Y}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial Y}{\partial q_n} \\ \frac{\partial Z}{\partial q_1} & \frac{\partial Z}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial Z}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \Phi}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial q_1} & \frac{\partial \Omega}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \Omega}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \Psi}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

którą można nazwać macierzą współczynników wrażliwości manipulatora. W przypadku manipulatora przedstawionego na rys.1 macierz ta przyjmuje postać

(9)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial a} & \frac{\partial X}{\partial b} & \frac{\partial X}{\partial c} & \frac{\partial X}{\partial \theta_1} & \frac{\partial X}{\partial \theta_2} & \frac{\partial X}{\partial \theta_3} & \frac{\partial X}{\partial \theta_4} & \frac{\partial X}{\partial \theta_5} & 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial a} & \frac{\partial Y}{\partial b} & \frac{\partial Y}{\partial c} & \frac{\partial Y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial Y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial Y}{\partial \theta_3} & \frac{\partial Y}{\partial \theta_4} & \frac{\partial Y}{\partial \theta_5} & 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial a} & \frac{\partial Z}{\partial b} & \frac{\partial Z}{\partial c} & 0 & \frac{\partial Z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial Z}{\partial \theta_3} & \frac{\partial Z}{\partial \theta_4} & \frac{\partial Z}{\partial \theta_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_5} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_6} \end{bmatrix}$$

Równości (6) i (7) można ogólnie zapisać w postaci macierzowej

$$(10) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \varphi \\ \omega \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial x}{\partial q_n} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial y}{\partial q_n} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial z}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \omega}{\partial q_1} & \frac{\partial \omega}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \omega}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \psi}{\partial q_1} & \frac{\partial \psi}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \psi}{\partial q_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta q_n \end{bmatrix}$$

Dla manipulatora z rys.1 zapiszemy to w następującej postaci

$$(11) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \varphi \\ \omega \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x}{\partial \theta_3} & \frac{\partial x}{\partial \theta_4} & \frac{\partial x}{\partial \theta_5} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial y}{\partial \theta_3} & \frac{\partial y}{\partial \theta_4} & \frac{\partial y}{\partial \theta_5} & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} & 0 & \frac{\partial z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial z}{\partial \theta_3} & \frac{\partial z}{\partial \theta_4} & \frac{\partial z}{\partial \theta_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \omega}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \omega}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \omega}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \omega}{\partial \theta_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \psi}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \psi}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \psi}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \psi}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \psi}{\partial \theta_5} & \frac{\partial \psi}{\partial \theta_6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \\ \Delta c \\ \Delta \theta_1 \\ \Delta \theta_2 \\ \Delta \theta_3 \\ \Delta \theta_4 \\ \Delta \theta_5 \\ \Delta \theta_6 \end{bmatrix}$$

W konstrukcji manipulatorów dąży się do ograniczenia liczby par kinematycznych do niezbędnego minimum. Jeśli najogólniej końcówka manipulatora o ruchu przestrzennym ma mieć sześć stopni swobody to niezbędna najmniejsza liczba par kinematycznych musi również wynosić sześć. Wówczas macierz współczynników wrażliwości manipulatora na błędy ustawienia poszczególnych par kinematycznych jest macierzą kwadratową

$$(12) \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial q_1} & \frac{\partial X}{\partial q_2} & \frac{\partial X}{\partial q_3} & \frac{\partial X}{\partial q_4} & \frac{\partial X}{\partial q_5} & \frac{\partial X}{\partial q_6} \\ \frac{\partial Y}{\partial q_1} & \frac{\partial Y}{\partial q_2} & \frac{\partial Y}{\partial q_3} & \frac{\partial Y}{\partial q_4} & \frac{\partial Y}{\partial q_5} & \frac{\partial Y}{\partial q_6} \\ \frac{\partial Z}{\partial q_1} & \frac{\partial Z}{\partial q_2} & \frac{\partial Z}{\partial q_3} & \frac{\partial Z}{\partial q_4} & \frac{\partial Z}{\partial q_5} & \frac{\partial Z}{\partial q_6} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} & \frac{\partial \Phi}{\partial q_3} & \frac{\partial \Phi}{\partial q_4} & \frac{\partial \Phi}{\partial q_5} & \frac{\partial \Phi}{\partial q_6} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial q_1} & \frac{\partial \Omega}{\partial q_2} & \frac{\partial \Omega}{\partial q_3} & \frac{\partial \Omega}{\partial q_4} & \frac{\partial \Omega}{\partial q_5} & \frac{\partial \Omega}{\partial q_6} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial q_2} & \frac{\partial \Psi}{\partial q_3} & \frac{\partial \Psi}{\partial q_4} & \frac{\partial \Psi}{\partial q_5} & \frac{\partial \Psi}{\partial q_6} \end{bmatrix}$$

Jest ona nazywana macierzą jakobianową, ponieważ jej wyznacznik jest wyznacznikiem Jacobiego /jakobianem/.

Równości (10) mają teraz postać

$$(13) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \varphi \\ \omega \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial a_1} & \frac{\partial X}{\partial a_2} & \frac{\partial X}{\partial a_3} & \frac{\partial X}{\partial a_4} & \frac{\partial X}{\partial a_5} & \frac{\partial X}{\partial a_6} \\ \frac{\partial Y}{\partial a_1} & \frac{\partial Y}{\partial a_2} & \frac{\partial Y}{\partial a_3} & \frac{\partial Y}{\partial a_4} & \frac{\partial Y}{\partial a_5} & \frac{\partial Y}{\partial a_6} \\ \frac{\partial Z}{\partial a_1} & \frac{\partial Z}{\partial a_2} & \frac{\partial Z}{\partial a_3} & \frac{\partial Z}{\partial a_4} & \frac{\partial Z}{\partial a_5} & \frac{\partial Z}{\partial a_6} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} & \frac{\partial \Phi}{\partial a_3} & \frac{\partial \Phi}{\partial a_4} & \frac{\partial \Phi}{\partial a_5} & \frac{\partial \Phi}{\partial a_6} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial a_1} & \frac{\partial \Omega}{\partial a_2} & \frac{\partial \Omega}{\partial a_3} & \frac{\partial \Omega}{\partial a_4} & \frac{\partial \Omega}{\partial a_5} & \frac{\partial \Omega}{\partial a_6} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial a_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial a_2} & \frac{\partial \Psi}{\partial a_3} & \frac{\partial \Psi}{\partial a_4} & \frac{\partial \Psi}{\partial a_5} & \frac{\partial \Psi}{\partial a_6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \\ \Delta a_3 \\ \Delta a_4 \\ \Delta a_5 \\ \Delta a_6 \end{bmatrix}$$

2. Wyznaczanie brył /wielościianów/ tolerancyjnych dokładności pozycjonowania - metoda równań ścian wielościanu

Jak już wspomniano we wstępie jeśli przy ustawianiu poszczególnych par kinematycznych manipulatora powstają odchylenia dokładności ustawienia w pewnym dopuszczalnym zakresie, to końcówka robocza manipulatora zmienia swą pozycję w stosunku do pozycji nominalnej. Wszystkie takie możliwe odchylenia pozycji zawierają się w granicach pewnego obszaru przestrzennego, który będziemy określali jako bryłę tolerancyjną dokładności pozycjonowania. Pokażemy, że bryła ta ma postać wielościanu.

Początek O lokalnego układu odniesienia x, y, z obierzemy w miejscu idealnej /bez odchyłek/ pozycji określonego punktu końcówki roboczej. Zbadajmy jak będzie się zmieniało odchylenie pozycji tego punktu od pozycji idealnej /nominalnej/, jeśli odchylenia Δq_r i Δq_s ustawienia dwóch par kinematycznych oznaczonych numerami odpowiednio r i s będą się zmieniały, a odchylenia dokładności ustawienia pozostałych par kinematycznych będą miały stałe wartości. W tym celu odchylenia Δq_r i Δq_s należy uważać za zmienne parametry w równaniach

$$(14) \quad x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x}{\partial q_i} q_i, \quad y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial q_i} q_i, \quad z = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z}{\partial q_i} q_i.$$

określających składowe x, y, z wektora małego odchylenia pozycji końcówki roboczej od jej pozycji nominalnej [por. wzory (6)].

Równania (14) zapiszemy w nieco innej postaci

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\partial X}{\partial q_1} \Delta q_1 + \dots + \frac{\partial X}{\partial q_r} \Delta q_r + \dots + \frac{\partial X}{\partial q_s} \Delta q_s + \dots + \frac{\partial X}{\partial q_n} \Delta q_n, \\
 (14a) \quad y &= \frac{\partial Y}{\partial q_1} \Delta q_1 + \dots + \frac{\partial Y}{\partial q_r} \Delta q_r + \dots + \frac{\partial Y}{\partial q_s} \Delta q_s + \dots + \frac{\partial Y}{\partial q_n} \Delta q_n, \\
 z &= \frac{\partial Z}{\partial q_1} \Delta q_1 + \dots + \frac{\partial Z}{\partial q_r} \Delta q_r + \dots + \frac{\partial Z}{\partial q_s} \Delta q_s + \dots + \frac{\partial Z}{\partial q_n} \Delta q_n.
 \end{aligned}$$

Wyznamy teraz Δq_r i Δq_s rozwiązując względem nich dwa pierwsze z równań 14a. W rezultacie otrzymujemy wyrażenia

$$(a) \quad \Delta q_r = \frac{\frac{\partial Y}{\partial q_s}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial q_r} & \frac{\partial X}{\partial q_s} \\ \frac{\partial Y}{\partial q_r} & \frac{\partial Y}{\partial q_s} \end{vmatrix}} x - \frac{\frac{\partial X}{\partial q_s}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial q_r} & \frac{\partial X}{\partial q_s} \\ \frac{\partial Y}{\partial q_r} & \frac{\partial Y}{\partial q_s} \end{vmatrix}} y -$$

$$- \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial q_1} & \frac{\partial X}{\partial q_s} \\ \frac{\partial Y}{\partial q_1} & \frac{\partial Y}{\partial q_s} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial q_r} & \frac{\partial X}{\partial q_s} \\ \frac{\partial Y}{\partial q_r} & \frac{\partial Y}{\partial q_s} \end{vmatrix}} \Delta q_i - \sum_{i=r+1}^n \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial q_1} & \frac{\partial X}{\partial q_s} \\ \frac{\partial Y}{\partial q_1} & \frac{\partial Y}{\partial q_s} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial q_r} & \frac{\partial X}{\partial q_s} \\ \frac{\partial Y}{\partial q_r} & \frac{\partial Y}{\partial q_s} \end{vmatrix}} \Delta q_i,$$

$$(b) \quad \Delta q_s = \frac{\frac{\partial Y}{\partial q_r}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial q_s} & \frac{\partial X}{\partial q_r} \\ \frac{\partial Y}{\partial q_s} & \frac{\partial Y}{\partial q_r} \end{vmatrix}} x - \frac{\frac{\partial X}{\partial q_r}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial q_s} & \frac{\partial X}{\partial q_r} \\ \frac{\partial Y}{\partial q_s} & \frac{\partial Y}{\partial q_r} \end{vmatrix}} y -$$

$$- \sum_{i=1}^{s-1} \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial q_i} & \frac{\partial X}{\partial q_r} \\ \frac{\partial Y}{\partial q_i} & \frac{\partial Y}{\partial q_r} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial q_s} & \frac{\partial X}{\partial q_r} \\ \frac{\partial Y}{\partial q_s} & \frac{\partial Y}{\partial q_r} \end{vmatrix}} \Delta q_i - \sum_{s+1}^n \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial q_i} & \frac{\partial X}{\partial q_r} \\ \frac{\partial Y}{\partial q_i} & \frac{\partial Y}{\partial q_r} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial q_s} & \frac{\partial X}{\partial q_r} \\ \frac{\partial Y}{\partial q_s} & \frac{\partial Y}{\partial q_r} \end{vmatrix}} \Delta q_i .$$

Po podstawieniu tych wyrażeń do trzeciego z równań (14a) otrzymujemy równanie płaszczyzny we współrzędnych x, y, z

$$(15) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial Y}{\partial q_r} & \frac{\partial Y}{\partial q_s} \\ \frac{\partial Z}{\partial q_r} & \frac{\partial Z}{\partial q_s} \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} \frac{\partial Z}{\partial q_r} & \frac{\partial Z}{\partial q_s} \\ \frac{\partial X}{\partial q_r} & \frac{\partial X}{\partial q_s} \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial q_r} & \frac{\partial X}{\partial q_s} \\ \frac{\partial Y}{\partial q_r} & \frac{\partial Y}{\partial q_s} \end{vmatrix} z =$$

$$= \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial q_r} & \frac{\partial X}{\partial q_s} & \frac{\partial X}{\partial q_i} \\ \frac{\partial Y}{\partial q_r} & \frac{\partial Y}{\partial q_s} & \frac{\partial Y}{\partial q_i} \\ \frac{\partial Z}{\partial q_r} & \frac{\partial Z}{\partial q_s} & \frac{\partial Z}{\partial q_i} \end{vmatrix} \Delta q_i .$$

Użyto tu zapisu wyznacznikowego w postaci jacobianów. Zwracamy uwagę, że sumowanie w wyrazie po prawej stronie można przeprowadzić od $i = 1$ do $i = n$ bez wyłączenia przypadków $i = r$ oraz $i = s$, ponieważ dla $i = r$ oraz $i = s$ wyznacznik pod znakiem sumy równa się zero, gdy dwie jego kolumny są jednokowe.

Równanie (15) można również zapisać w zwartej postaci

$$(15a) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial q_r} & \frac{\partial X}{\partial q_s} & x \\ \frac{\partial Y}{\partial q_r} & \frac{\partial Y}{\partial q_s} & y \\ \frac{\partial Z}{\partial q_r} & \frac{\partial Z}{\partial q_s} & z \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial q_r} & \frac{\partial X}{\partial q_s} & \frac{\partial X}{\partial q_i} \\ \frac{\partial Y}{\partial q_r} & \frac{\partial Y}{\partial q_s} & \frac{\partial Y}{\partial q_i} \\ \frac{\partial Z}{\partial q_r} & \frac{\partial Z}{\partial q_s} & \frac{\partial Z}{\partial q_i} \end{vmatrix} \Delta q_i .$$

Rozwijając lewą stronę równania (15a) na podwyznaczniki względem trzeciej kolumny otrzymujemy równanie w postaci (15).

Biorąc kolejno pó dwa odchylenia różnych par kinematycznych jako zmienne parametry otrzymujemy równania różnych płaszczyzn. Ich liczbę określa wzór

$$(16) \quad m = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2(n-2)!} .$$

Liczbę płaszczyzn m w zależności od liczby par kinematycznych n zestawiono w poniższej tabelicy /zwróćmy uwagę, że rozpatrujemy tu tylko występowanie par kinematycznych piątej klasy, to znaczy par o jednym stopniu swobody /obrotowym lub postępowym/

n	3	4	5	6	7	8
m	3	6	10	15	21	28

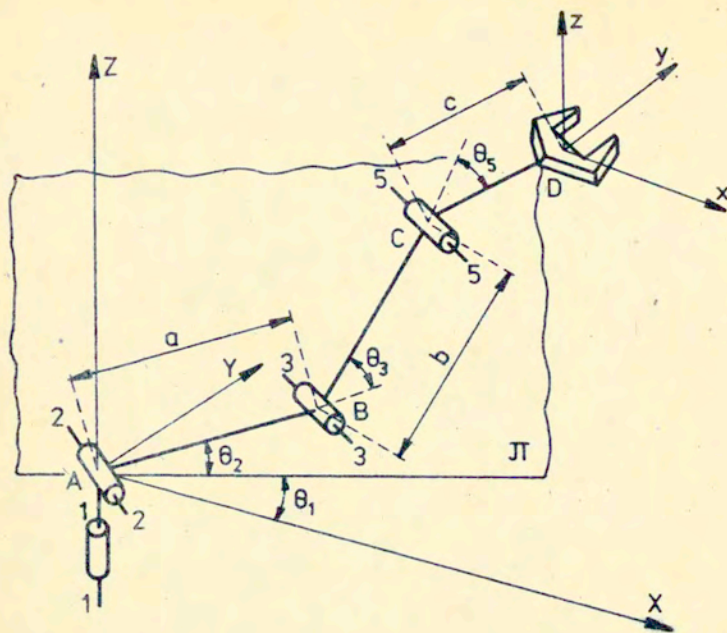
W konkretnych przypadkach równania niektórych z tych płaszczyzn mogą być także same i wówczas efektywnie liczba płaszczyzn będzie mniejsza niż określona wzorem (16). Ruch niektórych par kinematycznych może nie mieć wpływu na pozycję końcówki manipulatora - na przykład obrót o kąt θ_6 pary obrotowej o osi 6-6 w przypadku pokazanym na rys.1 nie zmienia pozycji końcówki. Takich par nie należy uwzględniać we wzorze (16).

3. Przykłady wyznaczania brył /wielościągów/ tolerancyjnych dokładności pozycjonowania metodą równań ścian

Jako przykład wprowadzający rozpatrzmy manipulator o czterech kinematycznych parach obrotowych przedstawiony na rys.4. Stanowi on szczególny przypadek manipulatora z rys.1, z którego usunięto wszystkie pary posuwisto-zwrotne zmieniające długości a , b , c oraz pary obrotowe o osiach 4-4 i 6-6.

Pozycję punktu D chwytaka określają zależności

$$\begin{aligned}
 X &= [a \cos\theta_2 + b \cos(\theta_2 + \theta_3) + c \cos(\theta_2 + \theta_3 - \theta_5)] \cos\theta_1, \\
 (a) \quad Y &= [a \cos\theta_2 + b \cos(\theta_2 + \theta_3) + c \cos(\theta_2 + \theta_3 - \theta_5)] \sin\theta_1, \\
 Z &= a \sin\theta_2 + b \sin(\theta_2 + \theta_3) + c \sin(\theta_2 + \theta_3 - \theta_5).
 \end{aligned}$$



rys. 4.

Macierz współczynników wrażliwości dokładności pozycjonowania ma teraz następującą postać

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \theta_1} & \frac{\partial X}{\partial \theta_2} & \frac{\partial X}{\partial \theta_3} & \frac{\partial X}{\partial \theta_5} \\ \frac{\partial Y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial Y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial Y}{\partial \theta_3} & \frac{\partial Y}{\partial \theta_5} \\ \frac{\partial Z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial Z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial Z}{\partial \theta_3} & \frac{\partial Z}{\partial \theta_5} \end{bmatrix}$$

a jej elementy w postaci pochodnych cząstkowych funkcji (a) względem zmiennych niezależnych, którymi są kąty ustawienia obrotowych par kinematycznych $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_5$, mają postać zależności:

$$\frac{\partial X}{\partial \theta_1} = - [a \cos \theta_2 + b \cos(\theta_2 + \theta_3) + c \cos(\theta_2 + \theta_3 - \theta_5)] \sin \theta_1,$$

$$\frac{\partial X}{\partial \theta_2} = - [a \sin \theta_2 + b \sin(\theta_2 + \theta_3) + c \sin(\theta_2 + \theta_3 - \theta_5)] \cos \theta_1,$$

$$\frac{\partial X}{\partial \theta_3} = - [b \sin(\theta_2 + \theta_3) + c \sin(\theta_2 + \theta_3 - \theta_5)] \cos \theta_1,$$

$$\frac{\partial X}{\partial \theta_5} = c \sin(\theta_2 + \theta_3 - \theta_5) \cos \theta_1,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \theta_1} = [a \cos \theta_2 + b \cos(\theta_2 + \theta_3) + c \cos(\theta_2 + \theta_3 - \theta_5)] \cos \theta_1,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \theta_2} = - [a \sin \theta_2 + b \sin(\theta_2 + \theta_3) + c \sin(\theta_2 + \theta_3 - \theta_5)] \sin \theta_1,$$

(b)

$$\frac{\partial Y}{\partial \theta_3} = - [b \sin(\theta_2 + \theta_3) + c \sin(\theta_2 + \theta_3 - \theta_5)] \sin \theta_1,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \theta_5} = c \sin(\theta_2 + \theta_3 - \theta_5) \sin \theta_1,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \theta_1} = 0,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \theta_2} = a \cos \theta_2 + b \cos(\theta_2 + \theta_3) + c \cos(\theta_2 + \theta_3 - \theta_5),$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \theta_3} = b \cos(\theta_2 + \theta_3) + c \cos(\theta_2 + \theta_3 - \theta_5),$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \theta_5} = - c \cos(\theta_2 + \theta_3 - \theta_5).$$

Zależności te po podstawieniu odpowiednio do równań (15) pozwalają wyznaczyć w ogólnej postaci równania wszystkich płaszczyzn ograniczających bryły /wielościany/ tolerancyjne dokładności pozycjonowania w całym polu roboczym manipulatora, przy założeniu, że znane są tolerancje dokładności ustawienia par kinematycznych. Wyrażenia (b) są jednak dość długie, co prowadzi do uciążliwych przekształceń przy wyprowadzaniu równań płaszczyzn w ogólnej postaci. W obliczeniach praktycznych można wykonywać obliczenia na liczbach szczegółowych dla kolejnych rozpatrywanych położań manipulatora. Ten sposób zastosujemy w tym przykładzie. Przyjmijmy następujące dane określające wymiary manipulatora i parametry jego ustawienia w rozpatrywanym położeniu

$$a = 700 \text{ mm}, \quad b = 600 \text{ mm}, \quad c = 250 \text{ mm}$$
$$\theta_2 = 30^\circ, \quad \theta_3 = 30^\circ, \quad \theta_5 = 60^\circ.$$

Wyprowadzimy równania dla dowolnej wartości kąta θ_1 .

Odchylenia dokładności ustawienia kinematycznych par obrotowych wynoszą

$$\Delta\theta_1 = \Delta\theta_2 = \Delta\theta_3 = \Delta\theta_5 = \pm 2' = \pm 0,00058 \text{ rad}.$$

Dla tych danych pochodne (b) przyjmują następujące wartości liczbowe /wielkości wymiarów liniowych podstawiono w milimetrach/ :

$$\frac{\partial X}{\partial \theta_1} = -R \sin \theta_1, \quad \text{gdzie}$$

$$R = a \cos \theta_2 + b \cos(\theta_2 + \theta_3) + c \cos(\theta_2 + \theta_3 - \theta_5) = 1156,2 \text{ mm}$$

$$\frac{\partial X}{\partial \theta_2} = -869,6 \cos \theta_1, \quad \frac{\partial X}{\partial \theta_3} = -519,6 \cos \theta_1, \quad \frac{\partial X}{\partial \theta_5} = 0$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \theta_1} = R \cos \theta_1, \quad \frac{\partial Y}{\partial \theta_2} = -869,6 \sin \theta_1,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \theta_3} = -519,6 \sin \theta_1, \quad \frac{\partial Y}{\partial \theta_5} = 0,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \theta_1} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial \theta_2} = 1206,2,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \theta_3} = 550, \quad \frac{\partial Z}{\partial \theta_5} = -250.$$

Poniżej kolejno wyprowadzono równania płaszczyzn ograniczających bryłę /wielościąg/ tolerancyjną dokładności pozycjonowania punktu D.

I. Zmienne odchyłki dokładności ustawienia kątów θ_2 i θ_3 ; stałe wielkości odchyłen ustawienia kątów θ_1 i θ_5 .

Równanie (15) przyjmuje teraz następującą postać

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial Y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial Y}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial Z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial Z}{\partial \theta_3} \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} \frac{\partial Z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial Z}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial X}{\partial \theta_2} & \frac{\partial X}{\partial \theta_3} \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial \theta_2} & \frac{\partial X}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial Y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial Y}{\partial \theta_3} \end{vmatrix} z =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x}{\partial \theta_3} & \frac{\partial x}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial y}{\partial \theta_3} & \frac{\partial y}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial z}{\partial \theta_3} & \frac{\partial z}{\partial \theta_1} \end{vmatrix} \Delta \theta_1 + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x}{\partial \theta_3} & \frac{\partial x}{\partial \theta_5} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial y}{\partial \theta_3} & \frac{\partial y}{\partial \theta_5} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial z}{\partial \theta_3} & \frac{\partial z}{\partial \theta_5} \end{vmatrix} \Delta \theta_5$$

i po podstawieniu liczbowych wartości pochodnych

$$\begin{vmatrix} -869,6 \cos \theta_1 & -519,6 \cos \theta_1 \\ 1206,2 & 550 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 1206,2 & 550 \\ -869,6 \cos \theta_1 & -519,6 \cos \theta_1 \end{vmatrix} y + \\ + \begin{vmatrix} -869,6 \cos \theta_1 & -519,6 \cos \theta_1 \\ -869,6 \sin \theta_1 & -519,6 \sin \theta_1 \end{vmatrix} z = \\ = \begin{vmatrix} -869,6 \cos \theta_1 & -519,6 \cos \theta_1 & R \sin \theta_1 \\ -869,6 \sin \theta_1 & -519,6 \sin \theta_1 & R \cos \theta_1 \\ 1206,2 & 550 & 0 \end{vmatrix} \Delta \theta_1 + \\ + \begin{vmatrix} -869,6 \cos \theta_1 & -519,6 \cos \theta_1 & 0 \\ -869,6 \sin \theta_1 & -519,6 \sin \theta_1 & 0 \\ 1206,2 & 550 & -250 \end{vmatrix} \Delta \theta_5 .$$

Wyznacznik przy zmiennej z po lewej stronie równania i wyznacznik przy odchyłce $\Delta \theta_5$ po prawej stronie równają się zeru. Ostatecznie równanie tej rodziny płaszczyzn przyjmuje prostą postać

$$(c) \quad x \sin \theta_1 - y \cos \theta_1 = -R \Delta \theta_1 .$$

Są to płaszczyzny prostopadłe do płaszczyzny x, y .

II. Zmienne odchyłki dokładności ustawienia kątów θ_2 i θ_5 ;
stałe wielkości odchyłeń ustawienia kątów θ_1 i θ_3 .

Po wykonaniu rachunków podobnych jak w przypadku I otrzymujemy równanie rodziny płaszczyzn w postaci

$$x \sin \theta_1 - y \cos \theta_1 = -R \Delta \theta_1 ,$$

a więc równanie identyczne z równaniem (c) otrzymanym w poprzednim przypadku.

III. Zmienne odchyłki dokładności ustawienia kątów θ_3 i θ_5 ;
stałe wielkości odchyłeń ustawienia kątów θ_1 i θ_2 .

Również w tym przypadku otrzymujemy równanie

$$x \sin \theta_1 - y \cos \theta_1 = -R \Delta \theta_1$$

identyczne z równaniem (c) .

IV. Zmienne odchyłki dokładności ustawienia kątów θ_1 i θ_2 ;
stałe wielkości odchyłeń ustawienia kątów θ_3 i θ_5 .

Równanie (15) ma teraz następującą postać

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial z}{\partial \theta_2} \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial z}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} \end{vmatrix} z =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial y}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial z}{\partial \theta_3} \end{vmatrix} \Delta \theta_3 + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x}{\partial \theta_5} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial y}{\partial \theta_5} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial z}{\partial \theta_5} \end{vmatrix} \Delta \theta_5 .$$

Po podstawieniu liczbowych wartości pochodnych i wykonaniu rachunków otrzymujemy równanie rodziny płaszczyzn w postaci

$$(d) \quad x \cos \theta_1 + y \sin \theta_1 + 0,7209 z = -123,08 \Delta \theta_3 - 180,24 \Delta \theta_5 .$$

Są to płaszczyzny nachylone względem wszystkich trzech osi współrzędnych x, y, z .

V. Zmienne odchyłki dokładności ustawienia kątów θ_1 i θ_3 ;
stałe wielkości odchyłeń ustawienia kątów θ_2 i θ_5 .

W tym przypadku równanie rodziny płaszczyzn ma postać

$$(e) \quad x \cos \theta_1 + y \sin \theta_1 + 0,945 z = 269,93 \Delta \theta_2 - 236,18 \Delta \theta_5 .$$

Są one więc również nachylone względem wszystkich trzech osi współrzędnych x, y, z .

VI. Zmienne odchyłki dokładności ustawienia kątów θ_1 i θ_5 ;
stałe wielkości odchyłeń ustawienia kątów θ_2 i θ_3 .

Równanie rodziny płaszczyzn przyjmuje postać

$$(f) \quad x \cos \theta_1 + y \sin \theta_1 = -869,6 \Delta \theta_2 - 519,6 \Delta \theta_3 .$$

Są to więc płaszczyzny prostopadłe do płaszczyzny współrzędnych x, y .

Równania wyprowadzone przy kombinacjach odchyłeń rozpatrywanych powyżej jako przypadki I, II i III są identyczne. A więc bryła tolerancyjna dokładności pozycjonowania dla manipulatora z rys.4 będzie ograniczona przez cztery pary płaszczyzn, a nie przez sześć jak wynikałoby ze wzoru (16). Występowanie takich szczególnych przypadków jest częste w zagadnieniach praktycznych.

Wyznamy teraz dla przykładu bryły tolerancyjne dokładności pozycjonowania dla dwóch szczególnych przypadków przyjmując kolejno $\theta_1 = 30^\circ$ i $\theta_1 = 0$.

Przypadek 1 dla $\theta_1 = 30^\circ$

Bryła tolerancyjna będzie ograniczona przez cztery pary płaszczyzn o równaniach otrzymanych z równań (c), (d), (e), (f) po podstawieniu $\sin \theta_1 = 0,500$, $\cos \theta_1 = 0,866$. Mamy więc następujące równania płaszczyzn:

płaszczyzny A - równanie wynikające z równania (c)

$$y = 0,577 x + 1335,1 \Delta \theta_1 ;$$

płaszczyzny B - równanie wynikające z równania (d)

$$0,866 x + 0,5 y + 0,721 z = -123,08 \Delta \theta_3 - 180,24 \Delta \theta_5 ;$$

płaszczyzny C - równanie wynikające z równania (e)

$$0,866 x + 0,5 y + 0,945 z = 269,93 \Delta \theta_2 - 236,18 \Delta \theta_5 ;$$

płaszczyzny D - równania wynikające z równania (f)

$$y = -1,732 x - 1739,2 \Delta \theta_2 - 1039,2 \Delta \theta_3 ;$$

Równania dla skrajnych pólżeń tych płaszczyzn, ograniczających bryłę tolerancyjną, otrzymamy podstawiając wartości skrajnych odchyłek /tolerancji/ dokładności ustawienia par kinematycznych $\Delta \theta_1 = \Delta \theta_2 = \Delta \theta_3 = \Delta \theta_5 = \pm 0,00058$ rad odpowiednio z takimi znakami aby wolne wyrazy w powyższych równaniach miały raz największą wartość, a następnie wartość najmniejszą. W ten sposób otrzymujemy ostatecznie równania par skrajnych płaszczyzn

płaszczyzny A

$$A_1 \quad y = 0,577 x + 0,774 ,$$

$$A_2 \quad y = 0,577 x - 0,774$$

płaszczyzny B

$$B_1 \quad 0,866 x + 0,500 y + 0,721 z = 0,176$$

$$B_2 \quad 0,866 x + 0,500 y + 0,721 z = - 0,176$$

płaszczyzny C

$$C_1 \quad 0,866 x + 0,500 y + 0,945 z = 0,294$$

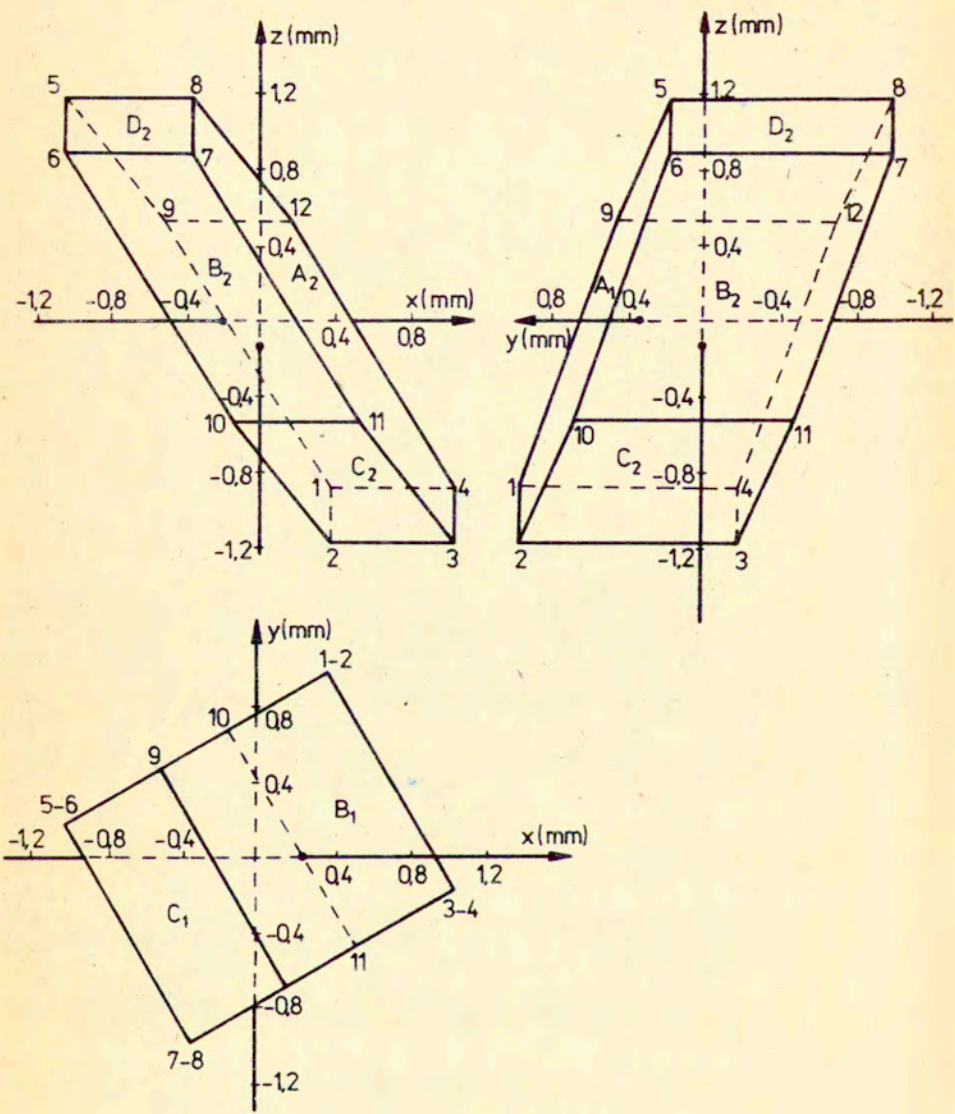
$$C_2 \quad 0,866 x + 0,500 y + 0,945 z = - 0,294$$

płaszczyzny D

$$D_1 \quad y = - 1,732 x + 1,612$$

$$D_2 \quad y = - 1,732 x - 1,612 .$$

Na rys.5 przedstawiono w trzech rzutach bryłę tolerancyjną dokładności pozycjonowania w rozpatrywanym położeniu manipulatora. Płaszczyzny widoczne oznaczono dla większej jasności wykładu wyżej podanymi symbolami. Bryłę tę wyznaczono przez obliczenie współrzędnych jej punktów narożnych, rozwiązując



rys. 5.

względem współrzędnych x, y, z układy trzech równań utworzone z równań trzech przecinających się w danym narożu płaszczyzn. Wielkości współrzędnych poszczególnych naroży oznaczonych na rysunku liczbami od 1 do 12 zestawiono w poniższej tabelicy. Zaznaczono w niej również, które z płaszczyzn przecinają się w danym narożu.

Naroże	Płaszczyzny przecinające się w narożu	Współrzędne naroża w mm		
		x	y	z
1	$A_1 - B_1 - D_1$	0,363	0,984	-0,874
2	$A_1 - C_2 - D_1$	0,363	0,984	-1,164
3	$A_2 - C_2 - D_1$	1,033	-0,178	-1,164
4	$A_2 - B_1 - D_1$	1,033	-0,178	-0,874
5	$A_1 - C_1 - D_2$	-1,033	0,178	1,164
6	$A_1 - B_2 - D_2$	-1,033	0,178	0,874
7	$A_2 - B_2 - D_2$	-0,363	-0,984	0,874
8	$A_2 - C_1 - D_2$	-0,363	-0,984	1,164
9	$A_1 - B_1 - C_1$	-0,512	0,478	0,527
10	$A_1 - B_2 - C_2$	-0,158	0,682	-0,527
11	$A_2 - B_2 - C_2$	0,512	-0,478	-0,527
12	$A_2 - B_1 - C_1$	0,158	-0,682	0,527

Przypadek 2 dla $\theta_1 = 0^\circ$

Bryła tolerancyjna będzie ograniczona przez cztery pary płaszczyzn o równaniach:

płaszczyzny A:

$$y = 1156,2 \Delta \theta_1 ;$$

płaszczyzny B:

$$z = -1,387 x - 170,73 \Delta \theta_3 - 250 \Delta \theta_5 ;$$

płaszczyzny C:

$$z = -1,058 x + 285,64 \Delta \theta_3 - 250 \Delta \theta_5 ;$$

płaszczyzny D:

$$x = -869,6 \Delta \theta_2 + 519,6 \Delta \theta_3 .$$

Równania te wynikają z ogólnych równań (c) , (d) , (e) , (f) po uwzględnieniu, że teraz $\theta_1 = 0^\circ$.

Dla skrajnych położenia tych płaszczyzn mają one następujące postacie:

płaszczyzny A

$$A_1 \quad y = 0,671 ,$$

$$A_2 \quad y = -0,671 ,$$

płaszczyzny B

$$B_1 \quad z = -1,387 x + 0,244 ,$$

$$B_2 \quad z = -1,387 x - 0,244 ,$$

płaszczyzny C

$$C_1 \quad z = -1,058 x + 0,311 ,$$

$$C_2 \quad z = -1,058 x - 0,311 ,$$

płaszczyzny D

$$D_1 \quad x = 0,806 ,$$

$$D_2 \quad x = -0,806 .$$

Płaszczyzny są prostopadłe do odpowiednich płaszczyzn układu współrzędnych x, y, z . Współrzędne punktów narożnych bryły tolerancyjnej podaje poniższa tablica.

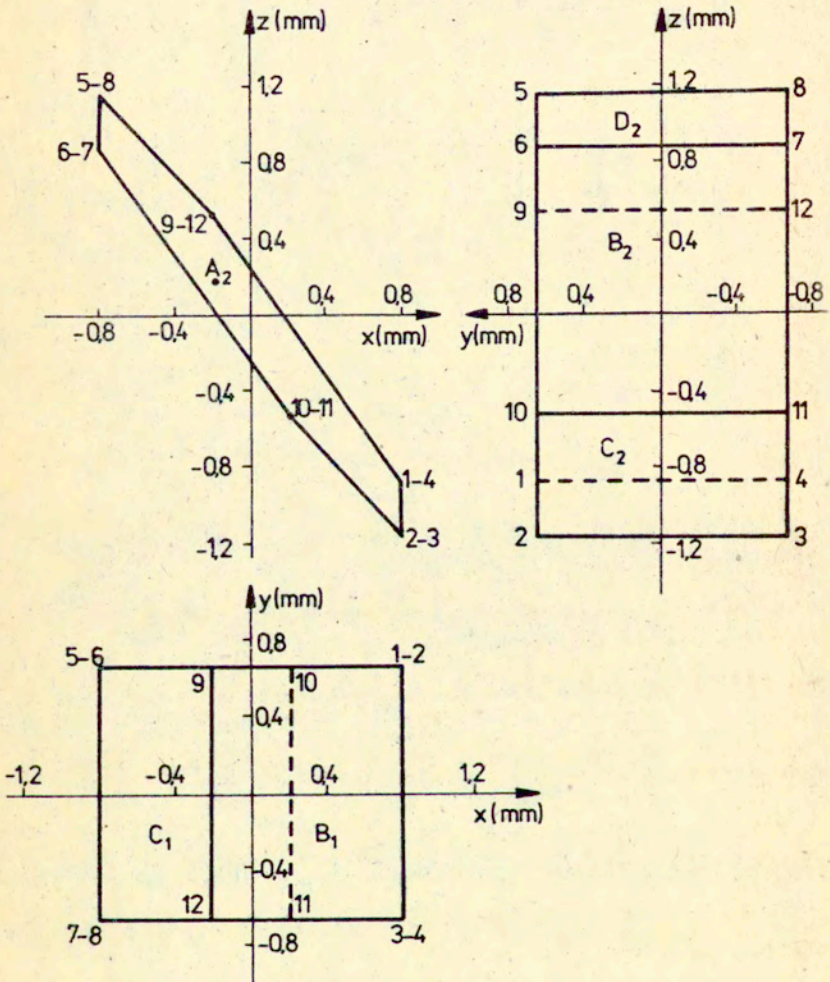
Bryłę tolerancyjną dokładności pozycjonowania dla tego położenia pokazuje rys.6. Jest ona identyczna z bryłą tolerancyjną z rys.5. Jest tylko obrócona o kąt $\theta_1 = 30^\circ$ wokół osi z .

Naroże	Płaszczyzny przecinające się w narożu	Współrzędne naroża w mm		
		x	y	z
1	$A_1 - B_1 - D_1$	0,806	0,671	-0,874
2	$A_1 - C_2 - D_1$	0,806	0,671	-1,164
3	$A_2 - C_2 - D_1$	0,806	-0,671	-1,164
4	$A_2 - B_1 - D_1$	0,806	-0,671	-0,874
5	$A_1 - C_1 - D_2$	-0,806	0,671	1,164
6	$A_1 - B_2 - D_2$	-0,806	0,671	0,874
7	$A_2 - B_2 - D_2$	-0,806	-0,671	0,874
8	$A_2 - C_1 - D_2$	-0,806	-0,671	1,164
9	$A_1 - B_1 - C_1$	-0,204	0,671	0,527
10	$A_1 - B_2 - C_2$	0,204	0,671	-0,527
11	$A_2 - B_2 - C_2$	0,204	-0,671	-0,527
12	$A_2 - B_1 - C_1$	-0,204	-0,671	0,527

4. Wyznaczanie brył /wielościągów/ tolerancyjnych dokładności pozycjonowania - metoda równań krawędzi

W punkcie 2 wyprowadzono równania płaszczyzn ograniczających bryłę /wielościąg/ tolerancyjną dokładności pozycjonowania. Pokazano jak za pomocą tych równań wyznaczyć bryłę tolerancyjną ilustrując to przykładami podanymi w punkcie 3.

Bryły tolerancyjne można również wyznaczyć przy użyciu równań określających ich krawędzie. W celu wyprowadzenia ogólnej postaci tych równań zbadajmy jak będzie się zmieniało odchylenie pozycji określonego punktu końcówki roboczej manipulatora od pozycji idealnej /nominalnej/, jeśli odchylenie Δa_p dokładności ustawienia jednej z par kinematycznych,



rys. 6.

którą oznaczymy liczbą r , będzie się zmieniało, a odchylenia dokładności ustawienia pozostałych par kinematycznych będą miały stałe wartości. Odchylenie Δq_r będziemy uważali za zmienny parametr w równaniach (14), określających składowe x, y, z wektora małego odchylenia pozycji wybranego punktu końcówki roboczej od pozycji idealnej /nominalnej/.

Równania (14) zapiszemy teraz w postaci

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\partial X}{\partial q_1} \Delta q_1 + \dots + \frac{\partial X}{\partial q_r} \Delta q_r + \dots + \frac{\partial X}{\partial q_n} \Delta q_n, \\
 (17) \quad y &= \frac{\partial Y}{\partial q_1} \Delta q_1 + \dots + \frac{\partial Y}{\partial q_r} \Delta q_r + \dots + \frac{\partial Y}{\partial q_n} \Delta q_n, \\
 z &= \frac{\partial Z}{\partial q_1} \Delta q_1 + \dots + \frac{\partial Z}{\partial q_r} \Delta q_r + \dots + \frac{\partial Z}{\partial q_n} \Delta q_n.
 \end{aligned}$$

Wyznaczmy teraz Δq_r z pierwszego z tych równań, otrzymując wyrażenie

$$(a) \quad q_r = \frac{1}{\frac{\partial Y}{\partial q_r}} x - \frac{1}{\frac{\partial Y}{\partial q_r}} \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\partial Y}{\partial q_i} \Delta q_i - \frac{1}{\frac{\partial Y}{\partial q_r}} \sum_{i=r+1}^n \frac{\partial Y}{\partial q_i} \Delta q_i,$$

które następnie podstawiamy do dwóch pozostałych równań (17).

W wyniku otrzymujemy równania

$$\begin{aligned}
 (18) \quad y &= \frac{\frac{\partial Y}{\partial q_r}}{\frac{\partial X}{\partial q_r}} x + \frac{1}{\frac{\partial X}{\partial q_r}} \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \frac{\partial Y}{\partial q_i} & \frac{\partial Y}{\partial q_r} \\ \frac{\partial X}{\partial q_i} & \frac{\partial X}{\partial q_r} \end{vmatrix} \Delta q_i, \\
 z &= \frac{\frac{\partial Z}{\partial q_r}}{\frac{\partial X}{\partial q_r}} x + \frac{1}{\frac{\partial X}{\partial q_r}} \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \frac{\partial Z}{\partial q_i} & \frac{\partial Z}{\partial q_r} \\ \frac{\partial X}{\partial q_i} & \frac{\partial X}{\partial q_r} \end{vmatrix} \Delta q_i.
 \end{aligned}$$

Zwracamy uwagę, że sumowanie w wyrazach po prawej stronie można przeprowadzić od $i = 1$ do $i = n$ bez wyłączenia przypadku $i = r$, ponieważ dla $i = r$ wyznaczniki pod znakiem sumy równają się zeru.

Równania (18) są to równania prostej w układzie współrzędnych x, y, z . Każde z nich jest równaniem płaszczyzny rzutującej prostą odpowiednio na płaszczyzny Dxy i Dxz . A zatem przy zmianie wielkości odchylenia dokładności ustawienia jednej z par kinematycznych i utrzymywaniu stałych wartości odchylen dokładności ustawienia pozostałych par badany punkt końcówki roboczej manipulatora porusza się wzdłuż linii prostej określonej równaniami (18).

Dobierając odpowiednio wielkości skrajnych dopuszczalnych odchylen Δq_i /tolerancji dokładności ustawienia pozostałych par kinematycznych/ znajdujemy wszystkie skrajne położenia tej prostej. Te skrajne położenia określają krawędzie bryły /wielościanu/ tolerancyjnej.

Równań (18) nie można stosować jeżeli $\partial X / \partial q_r = 0$. W takich przypadkach należy posługiwać się bezpośrednio równaniami (17). Zostanie to pokazane w następujących przykładach.

Przy rozwiązywaniu konkretnych zadań często okazuje się, że nie wszystkie skrajne położenia prostych określonych równaniami (18) odpowiadają krawędziom wielościanu tolerancyjnego. Niektóre z nich mogą znajdować się na ścianach tego wielościanu lub w jego wnętrzu. Jest to komplikacja związana ze stosowaniem metody wyznaczania równań krawędzi. Niemniej

jednak metoda ta może być użyteczna, przede wszystkim jako metoda uzupełniająca przy stosowaniu metody wyznaczania równań ścian wielościanu.

5. Przykład wyznaczania brył /wielościanów/ tolerancyjnych dokładności pozycjonowania metodą równań krawędzi.

Rozpatrzmy manipulator o czterech kinematycznych parach obrotowych przedstawiony na rys.4. W punkcie 3 pracy wyznaczaliśmy dla niego bryłę tolerancyjną metodą wyznaczania równań jej ścian. Teraz posłużymy się metodą wyznaczania równań jej krawędzi.

Jak poprzednio przyjmiemy następujące dane określające wymiary manipulatora i parametry jego ustawienia w rozpatrywanym położeniu.

$$\begin{array}{lll} a = 700 \text{ mm}, & b = 600 \text{ mm}, & c = 250 \text{ mm} \\ \theta_2 = 30^\circ, & \theta_3 = 30^\circ, & \theta_5 = 60^\circ. \end{array}$$

Równania krawędzi wyprowadzimy dla dowolnej wartości kąta θ_1 .

Tak samo jak w poprzednich przykładach omówionych w punkcie 3 przyjmiemy następujące tolerancje /największe dopuszczalne odchylenia/ dokładności ustawienia par kinematycznych

$$\Delta \theta_1 = \Delta \theta_2 = \Delta \theta_3 = \Delta \theta_5 = \pm 2' = \pm 0,00058 \text{ rad.}$$

Dla tych danych pochodne cząstkowe funkcji położenia względem zmiennych $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ i θ_5 mają następujące, obliczone poprzednio, wartości liczbowe:

$$\frac{\partial X}{\partial \theta_1} = - 1156,2 \sin \theta_1 , \quad \frac{\partial X}{\partial \theta_2} = - 869,6 \cos \theta_1 ,$$

$$\frac{\partial X}{\partial \theta_3} = - 519,6 \cos \theta_1 , \quad \frac{\partial X}{\partial \theta_5} = 0 ,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \theta_1} = 1156,2 \cos \theta_1 , \quad \frac{\partial Y}{\partial \theta_2} = - 869,6 \sin \theta_1 ,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \theta_3} = - 519,6 \sin \theta_1 , \quad \frac{\partial Y}{\partial \theta_5} = 0 ,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \theta_1} = 0 , \quad \frac{\partial Z}{\partial \theta_2} = 1206,2 ,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \theta_3} = 550 , \quad \frac{\partial Z}{\partial \theta_5} = - 250 .$$

Poniżej kolejno wyprowadzono równania krawędzi bryły /wielościachu/ tolerancyjnej dokładności pozycjonowania punktu D /por. rys.4/.

I. Zmienna odchyłka dokładności ustawienia kąta θ_1 ;

stałe wielkości odchyłek ustawienia kątów θ_2, θ_3 i θ_5 .

Równania (18) zapiszemy teraz w postaci

$$y = \frac{\frac{\partial Y}{\partial \theta_1}}{\frac{\partial X}{\partial \theta_1}} x + \frac{1}{\frac{\partial X}{\partial \theta_1}} \begin{vmatrix} \frac{\partial Y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial Y}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial X}{\partial \theta_2} & \frac{\partial X}{\partial \theta_1} \end{vmatrix} \Delta \theta_2 + \frac{1}{\frac{\partial X}{\partial \theta_1}} \begin{vmatrix} \frac{\partial Y}{\partial \theta_3} & \frac{\partial Y}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial X}{\partial \theta_3} & \frac{\partial X}{\partial \theta_1} \end{vmatrix} \Delta \theta_3 +$$

$$+ \frac{1}{\frac{\partial X}{\partial \theta_1}} \begin{vmatrix} \frac{\partial Y}{\partial \theta_5} & \frac{\partial Y}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial X}{\partial \theta_5} & \frac{\partial X}{\partial \theta_1} \end{vmatrix} \Delta \theta_5,$$

$$z = \frac{\frac{\partial Z}{\partial \theta_1}}{\frac{\partial X}{\partial \theta_1}} x + \frac{1}{\frac{\partial X}{\partial \theta_1}} \begin{vmatrix} \frac{\partial Z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial Z}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial X}{\partial \theta_2} & \frac{\partial X}{\partial \theta_1} \end{vmatrix} \Delta \theta_2 + \frac{1}{\frac{\partial X}{\partial \theta_1}} \begin{vmatrix} \frac{\partial Z}{\partial \theta_3} & \frac{\partial Z}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial X}{\partial \theta_3} & \frac{\partial X}{\partial \theta_1} \end{vmatrix} \Delta \theta_3 +$$

$$+ \frac{1}{\frac{\partial X}{\partial \theta_1}} \begin{vmatrix} \frac{\partial Z}{\partial \theta_5} & \frac{\partial Z}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial X}{\partial \theta_5} & \frac{\partial X}{\partial \theta_1} \end{vmatrix} \Delta \theta_5.$$

i po podstawieniu liczbowych wartości pochodnych

$$y = \frac{1156,2 \cos \theta_1}{-1156,2 \sin \theta_1} x +$$

$$- \frac{1}{1156,2 \sin \theta_1} \begin{vmatrix} -869,2 \sin \theta_1 & 1156,2 \cos \theta_1 \\ -869,2 \cos \theta_1 & -1156,2 \sin \theta_1 \end{vmatrix} \Delta \theta_2 +$$

$$- \frac{1}{1156,2 \sin \theta_1} \begin{vmatrix} -519,6 \sin \theta_1 & 1156,2 \cos \theta_1 \\ -519,6 \cos \theta_1 & -1156,2 \sin \theta_1 \end{vmatrix} \Delta \theta_3 +$$

$$- \frac{1}{1156,2 \sin \theta_1} \begin{vmatrix} 0 & 1156,2 \cos \theta_1 \\ 0 & -1156,2 \sin \theta_1 \end{vmatrix} \Delta \theta_5,$$

$$z = - \frac{1}{1156,2 \sin \theta_1} \begin{vmatrix} 1206,2 & 0 \\ -869,6 \cos \theta_1 & -1156,2 \sin \theta_1 \end{vmatrix} \Delta \theta_2 +$$

$$- \frac{1}{1156,2 \sin \theta_1} \begin{vmatrix} 550 & 0 \\ -519,6 \cos \theta_1 & -1156,2 \sin \theta_1 \end{vmatrix} \Delta \theta_3 +$$

$$- \frac{1}{1156,2 \sin \theta_1} \begin{vmatrix} -250 & 0 \\ 0 & -1156,2 \sin \theta_1 \end{vmatrix} \Delta \theta_5 .$$

Po wykonaniu przekształceń otrzymujemy równania rodziny prostych równoległych

$$y \sin \theta_1 = -x \cos \theta_1 - 869,2 \Delta \theta_2 - 519,6 \Delta \theta_3 ,$$

$$z = 1206,2 \Delta \theta_2 + 550 \Delta \theta_3 - 250 \Delta \theta_5 .$$

Są to proste równoległe do płaszczyzny xy , a ich skrajne położenia określają krawędzie 1-4, 2-3, 5-8, 6-7, 9-12, 10-11 wielościanów tolerancyjnych pokazanych na rysunkach 5 i 6. Te skrajne położenia otrzymujemy podstawiając wartości skrajnych odchyłek /tolerancji/ dokładności ustawienia par kinematycznych $\Delta \theta_2$, $\Delta \theta_3$ i $\Delta \theta_5$ we wszystkich możliwych kombinacjach znaków tych odchyłek. Kombinacji tych jest osiem $/2^3/$, ale przy dwóch z nich, a mianowicie przy

$$\Delta \theta_2 = +0,00058 \text{ rad}, \quad \Delta \theta_3 = -0,00058 \text{ rad}, \quad \Delta \theta_5 = +0,00058 \text{ rad},$$

oraz przy

$$\Delta \theta_2 = -0,00058 \text{ rad}, \quad \Delta \theta_3 = +0,00058 \text{ rad}, \quad \Delta \theta_5 = -0,00058 \text{ rad}$$

proste te nie są krawędziami wielościanu tolerancyjnego, ale są położone w jego wnętrzu.

II. Zmienna odchyłka dokładności ustawienia kąta θ_2 ;

stałe wielkości odchyłeń ustawienia kątów θ_1 , θ_3 i θ_5 .

Równania (18) przyjmują następującą postać

$$y = \frac{\frac{\partial Y}{\partial \theta_2}}{\frac{\partial X}{\partial \theta_2}} x + \frac{1}{\frac{\partial X}{\partial \theta_2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial Y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial Y}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial X}{\partial \theta_1} & \frac{\partial X}{\partial \theta_2} \end{vmatrix} \Delta \theta_1 + \frac{1}{\frac{\partial X}{\partial \theta_2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial Y}{\partial \theta_3} & \frac{\partial Y}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial X}{\partial \theta_3} & \frac{\partial X}{\partial \theta_2} \end{vmatrix} \Delta \theta_3 + \\ + \frac{1}{\frac{\partial X}{\partial \theta_2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial Y}{\partial \theta_5} & \frac{\partial Y}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial X}{\partial \theta_5} & \frac{\partial X}{\partial \theta_2} \end{vmatrix} \Delta \theta_5 ,$$

$$z = \frac{\frac{\partial Z}{\partial \theta_2}}{\frac{\partial X}{\partial \theta_2}} x + \frac{1}{\frac{\partial X}{\partial \theta_2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial Z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial Z}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial X}{\partial \theta_1} & \frac{\partial X}{\partial \theta_2} \end{vmatrix} \Delta \theta_1 + \frac{1}{\frac{\partial X}{\partial \theta_2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial Z}{\partial \theta_3} & \frac{\partial Z}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial X}{\partial \theta_3} & \frac{\partial X}{\partial \theta_2} \end{vmatrix} \Delta \theta_3 + \\ + \frac{1}{\frac{\partial X}{\partial \theta_2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial Z}{\partial \theta_5} & \frac{\partial Z}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial X}{\partial \theta_5} & \frac{\partial X}{\partial \theta_2} \end{vmatrix} \Delta \theta_5 .$$

Po podstawieniu liczbowych wartości pochodnych i wykonaniu przekształceń otrzymujemy równania rodziny prostych w postaci

$$y = x \operatorname{tg} \theta_1 + \frac{1156,2}{\cos \theta_1} \Delta \theta_1,$$

$$z = -\frac{1,387}{\cos \theta_1} x - 1603,7 \operatorname{tg} \theta_1 \Delta \theta_1 - 170,72 \Delta \theta_3 - 250 \Delta \theta_5.$$

Są to proste w ogólnym przypadku $\theta_1 = 0$ nachylone względem wszystkich płaszczyzn układu współrzędnych x, y, z .

Ich skrajne położenia określają krawędzie 4-12, 1-9, 6-10, 7-11 wielościanów tolerancyjnych /por. rys.5 i 6/. Równania tych krawędzi otrzymamy podstawiając do powyższych równań następujące kombinacje skrajnych odchyłek ustawienia par kinematycznych

krawędź 4-12 : $\Delta \theta_1 = \Delta \theta_3 = \Delta \theta_5 = -0,00058$ rad,

krawędź 1-9 : $\Delta \theta_1 = +0,00058$ rad, $\Delta \theta_3 = \Delta \theta_5 = -0,00058$ rad

krawędź 6-10 : $\Delta \theta_1 = \Delta \theta_3 = \Delta \theta_5 = +0,00058$ rad,

krawędź 7-11 : $\Delta \theta_1 = -0,00058$ rad, $\Delta \theta_3 = \Delta \theta_5 = +0,00058$ rad.

Proste dla pozostałych czterech możliwych kombinacji wielkości tolerancji dokładności ustawienia par kinematycznych nie są krawędziami wielościanu tolerancyjnego. Są one położone na jego ścianach 1-2-10-6-5-9 lub 4-3-11-7-8-12.

III, Zmienna odchyłka dokładności ustawienia kąta θ_3 ;

stałe wielkości odchylen kątów θ_1, θ_2 i θ_5

Postępując tak jak w poprzednim punkcie II otrzymujemy równania rodziny prostych w postaci

$$y = x \operatorname{tg} \theta_1 + \frac{1156,2}{\cos \theta_1} \theta_1,$$

$$z = -\frac{1,058}{\cos \theta_1} x - 1223,85 \operatorname{tg} \theta_1 \Delta\theta_1 + 285,72 \Delta\theta_2 - 250 \Delta\theta_5.$$

Skrajne położenia tych prostych określają krawędzie wielościanu, których równania otrzymamy podstawiając do powyższych równań następujące kombinacje skrajnych odchyłek dokładności ustawienia par kinematycznych /numeracja krawędzi tak jak na rysunkach 5 i 6 /

krawędź 5-9 : $\Delta\theta_1 = +0,00058 \text{ rad}, \Delta\theta_2 = +0,00058 \text{ rad},$
 $\Delta\theta_5 = -0,00058 \text{ rad},$

krawędź 8-12 : $\Delta\theta_1 = -0,00058 \text{ rad}, \Delta\theta_2 = +0,00058 \text{ rad},$
 $\Delta\theta_5 = -0,00058 \text{ rad},$

krawędź 2-10 : $\Delta\theta_1 = +0,00058 \text{ rad}, \Delta\theta_2 = -0,00058 \text{ rad},$
 $\Delta\theta_5 = +0,00058 \text{ rad},$

krawędź 3-11 : $\Delta\theta_1 = -0,00058 \text{ rad}, \Delta\theta_2 = -0,00058 \text{ rad},$
 $\Delta\theta_5 = +0,00058 \text{ rad}.$

Proste dla czterech pozostałych możliwych kombinacji wielkości tolerancji dokładności ustawienia par kinematycznych nie są krawędziami wielościanu tolerancyjnego. Są one położone na jego ścianach.

IV. Zmienna odchyłka dokładności ustawienia kąta θ_5 ;

stałe wielkości odchylen kątów θ_1, θ_2 i θ_3 .

Mamy tu szczególny przypadek, ponieważ $\partial X / \partial \theta_5 = 0$.

Nie można zatem stosować równań (18). Równania krawędzi otrzymamy bezpośrednio z równań (17).

Uwzględniając, że również w naszym przypadku $\partial Y / \partial \theta_5 = 0$, otrzymujemy z dwóch pierwszych równań (17) następujące wyrażenia na współrzędne x i y

$$x = \frac{\partial X}{\partial \theta_1} \Delta \theta_1 + \frac{\partial X}{\partial \theta_2} \Delta \theta_2 + \frac{\partial X}{\partial \theta_3} \Delta \theta_3 ,$$

$$y = \frac{\partial Y}{\partial \theta_1} \Delta \theta_1 + \frac{\partial Y}{\partial \theta_2} \Delta \theta_2 + \frac{\partial Y}{\partial \theta_3} \Delta \theta_3 .$$

Dla określonych odchyłek $\Delta \theta_1, \Delta \theta_2$ i $\Delta \theta_3$ są to wielkości stałe. A zatem oznacza to, że rodzinę stanowią proste równoległe do osi z . Podstawiając w miejsce pochodnych ich wartości otrzymujemy

$$x = -1156,2 \sin \theta_1 \Delta \theta_1 - 869,6 \cos \theta_1 \Delta \theta_2 - 519,6 \cos \theta_1 \Delta \theta_3 ,$$

$$y = 1156,2 \cos \theta_1 \Delta \theta_1 - 869,6 \sin \theta_1 \Delta \theta_2 - 519,6 \sin \theta_1 \Delta \theta_3 .$$

W szczególnym przypadku dla $\theta_1 = 30^\circ$ mamy

$$x = -578,1 \Delta \theta_1 - 753,1 \Delta \theta_2 - 450 \Delta \theta_3 ,$$

$$y = 1001,5 \Delta \theta_1 - 434,8 \Delta \theta_2 - 259,8 \Delta \theta_3 .$$

Krawędziami będą proste dla następujących kombinacji skrajnych wartości odchyłek $\Delta \theta_1, \Delta \theta_2, \Delta \theta_3$ /oznaczenia krawędzi według rysunków 5 i 6/

- krawędź 1-2 : $\Delta \theta_2 = \Delta \theta_3 = -0,00058 \text{ rad,}$
 $\Delta \theta_1 = +0,00058 \text{ rad,}$
- krawędź 3-4 : $\Delta \theta_2 = \Delta \theta_3 = -0,00058 \text{ rad,}$
 $\Delta \theta_1 = -0,00058 \text{ rad,}$
- krawędź 5-6 : $\Delta \theta_2 = \Delta \theta_3 = +0,00058 \text{ rad,}$
 $\Delta \theta_1 = +0,00058 \text{ rad,}$
- krawędź 7-8 : $\Delta \theta_2 = \Delta \theta_3 = +0,00058 \text{ rad,}$
 $\Delta \theta_1 = -0,00058 \text{ rad.}$

Proste wynikające z pozostałych czterech możliwych kombinacji wartości skrajnych odchyłek nie są krawędziami. Są one położone na ścianach wielościanu.

6. Wyznaczanie brył /wielościanów/ tolerancyjnych dokładności pozycjonowania - metoda wyznaczania współrzędnych punktów narożnych wielościanu

Jak wynika z poprzednich rozważań i przykładów punkty narożne wielościanu tolerancyjnego osiągnane są przy pewnych kombinacjach skrajnych wielkości /tolerancji/ odchyłek dokładności ustawienia wszystkich par kinematycznych. Jeżeli liczbę par kinematycznych manipulatora oznaczymy przez n to liczba możliwych kombinacji skrajnych wielkości odchyłek dokładności ich ustawienia wynosi 2^n . Współrzędne punktów narożnych można określić bezpośrednio ze wzorów (6) podstawiając do nich kolejno wielkości skrajnych odchyłek Δq_1 odpowiadające wszystkim możliwym kombinacjom.

Należy zwrócić jednak uwagę, że nie wszystkie tak wyznaczone punkty są punktami narożnymi wielościanu tolerancyjnego. Na przykład manipulator pokazany na rys.4 ma cztery pary kinematyczne, a więc $n = 4$. Liczba wyznaczonych w powyższy sposób punktów wyniesie $2^4 = 16$, a liczba punktów narożnych wielościanu tolerancyjnego /rysunki 5 i 6/ równa się 12. Dla czterech kombinacji skrajnych wielkości odchyłek Δq_i punkty o tak wyznaczonych współrzędnych nie będą punktami narożnymi, ale będą położone na ścianach wielościanu. Te cztery kombinacje odchyłek to:

Kombinacja numer	$\Delta\theta_1$	$\Delta\theta_2$	$\Delta\theta_3$	$\Delta\theta_4$	Współrzędne punktu w mm /dla $\theta_1 = 0^\circ$ /		
					x	y	z
1	$+\delta$	$+\delta$	$-\delta$	$+\delta$	-0,203	0,671	0,236
2	$+\delta$	$-\delta$	$+\delta$	$-\delta$	0,203	0,671	-0,236
3	$-\delta$	$+\delta$	$-\delta$	$+\delta$	-0,203	-0,671	0,236
4	$-\delta$	$-\delta$	$+\delta$	$-\delta$	0,203	-0,671	-0,236

Wprowadzono tu oznaczenie $\delta = 0,00058$ rad. W tablicy podano również współrzędne punktu obliczone dla odpowiedniej kombinacji odchyłek dla szczególnego przypadku $\theta_1 = 0^\circ$. Z porównania z wielościanem przedstawionym na rys.6 widać, że punkty te nie stanowią jego narożników, lecz znajdują się na jego ścianach.

Fakt, że nie zawsze wszystkie obliczone w powyższy sposób punkty stanowią narożniki wielościanu tolerancyjnego znacznie utrudnia ustalenie wyłącznie tą metodą formy tego

wielościanu. Szczególnie odnosi się to do bardziej złożonych przypadków. Jednakże metoda wyznaczania współrzędnych punktów narożnych może być użyteczna i w takich przypadkach jako metoda uzupełniająca obie poprzednio omówione metody, a więc metodę wyznaczania równań ścian wielościanu i metodę wyznaczania równań jego krawędzi.

Literatura

1. W.SZCZEPIŃSKI, Analiza pól tolerancji dokładności pozycjonowania i orientacji manipulatorów roboczych o ruchach płaskich, Prace IPPT /w druku/
2. R.P.PAUL, Robot Manipulators, Mathematics, Programming and Control, MIT Press, Third printing, Cambridge MASS, 1982
3. J.KNAPCZYK, A.MORECKI, R.HIPF, Analiza dokładności pozycjonowania i orientacji manipulatorów z sześcioma parami obrotowymi, Prace Naukowe Instytutu Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej nr 66, Seria: Konferencje nr 25, 1985
4. J.KNAPCZYK and A.MORECKI, Analysis of the Positioning and Orientation Accuracy in 6R Manipulators /Direct Task/ Prace międzynarodowej konferencji Ro-Man-Sy, 9-12 Sept., 1986, Kraków, str.64-73
5. W.SZCZEPIŃSKI, O pewnej metodzie wyznaczania pól tolerancyjnych, Archiwum Budowy Maszyn, 2, 3, 1955, 275-284